

問題解決技法入門

ゲーム理論

Game Theory

堀田 敬介

ゲーム理論とは何か？

出展:「数学セミナー」2014(v53,n10)p.9 渡辺隆裕

- 喫茶店ダタールとスタボが2地域A,Bへの出店を検討中である
 - 各地域の1日あたり喫茶店利用見込み客は, $A=600$ 人, $B=300$ 人
 - 両店舗が別々の地域に出店すると, 見込み客を全て獲得できる
 - 両店舗が同じ地域に出店すると, スタボがダタールの2倍の客を獲得
 - 同時にどちらか1地域に必ず出店(両方出店や出店中止はない)
- 問:ダタールは**どちら**に出店すべきか? またそれは**何故**か?

A 600人



B 300人

ゲーム理論とは何か？

出展:「数学セミナー」2014(v53,n10)p.9 渡辺隆裕

- 喫茶店ダタールとスタボが2地域A,Bへの出店を検討中である
 - 各地域の1日あたり喫茶店利用見込み客は, $A=600$ 人, $B=300$ 人
 - 両店舗が別々の地域に出店すると, 見込み客を全て獲得できる
 - 両店舗が同じ地域に出店すると, スタボがダタールの2倍の客を獲得
 - 同時にどちらか1地域に必ず出店(両方出店や出店中止はない)
- 問:ダタールは**どちら**に出店すべきか? またそれは**何故**か?

ダタ\スタ	A地域	B地域
A地域	(200,400)	(600,300)
B地域	(300,600)	(100,200)

A
600人

B
300人

ゲーム理論とは何か？

出展:「数学セミナー」2014(v53,n10)p.9 渡辺隆裕

- 喫茶店ダタールとスタボが2地域A,Bへの出店を検討中である
 - 各地域の1日あたり喫茶店利用見込み客は, A=600人, B=300人
 - 両店舗が別々の地域に出店すると, 見込み客を全て獲得できる
 - 両店舗が同じ地域に出店すると, スタボがダタールの2倍の客を獲得
 - 同時にどちらか1地域に必ず出店(両方出店や出店中止はない)
- 問:ダタールは**どちら**に出店すべきか? またそれは**何故**か?

ダタ\スタ	A地域	B地域
A地域	(200,400)	(600,300)
B地域	(300,600)	(100,200)

A
600人

B
300人

◆ 検討

- マキシミン基準(悲観的意思決定基準) → A地域へ出店せよ
- マキシマックス基準(楽観的意思決定基準) → A地域へ出店せよ
- 期待値基準(算術平均値) → A地域へ出店せよ

ゲーム理論とは何か？

出展:「数学セミナー」2014(v53,n10)p.9 渡辺隆裕

- 喫茶店ダタールとスタボが2地域A,Bへの出店を検討中である
 - 各地域の1日あたり喫茶店利用見込み客は, A=600人, B=300人
 - 両店舗が別々の地域に出店すると, 見込み客を全て獲得できる
 - 両店舗が同じ地域に出店すると, スタボがダタールの2倍の客を獲得
 - 同時にどちらか1地域に必ず出店(両方出店や出店中止はない)
- 問:ダタールは**どちら**に出店すべきか? またそれは**何故**か?

ダタ\スタ	A地域	B地域
A地域	(200,400)	(600,300)
B地域	(300,600)	(100,200)

A
600人

B
300人

◆ 検討

- マキシミン基準(悲観的意思決定基準) → A地域へ出店せよ
- マキシマックス基準(楽観的意思決定基準) → A地域へ出店せよ
- 期待値基準(算術平均値) → A地域へ出店せよ
- ゲーム理論**による解答 → **B地域**へ出店せよ

「1人の意思決定」と「複数の意思決定主体の相互作用」であるゲーム」では解が異なる!

ゲーム理論とは何か？

- プレイヤー player

- 意思決定し、行動する主体. (2人, 3人, ..., n人, ..., ∞)
 - 例: 個人, 複数の個人から成る組織, 政党, 国家, ...

プレイヤーの集合

$$N = \{1, 2, \dots, n\}$$

- 戦略 strategy

- プレイヤーが取りうる行動. (有限, 無限)

プレイヤー*i*の戦略集合

$$S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}\} \quad (i \in N)$$

- 利得と利得関数 payoff

- 各プレイヤーの戦略決定後, ゲームは終了し, 結果が出る. 結果に対する各プレイヤーの何らかの評価値 (利得 payoff, 効用 utility, ...)

プレイヤー*i*の利得関数

$$f_i : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \rightarrow R \quad (i \in N)$$

ゲームの定義

$$G = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{f_i\}_{i \in N})$$

各プレイヤーは**自己の利得最大化**を目指し,
Gは全てのプレイヤーの**共有知識**とする

ゲーム理論とは何か？

J. von Neumann & O. Morgenstern
「ゲーム理論と経済行動」(1944)

- ゲーム的状况 game situations
 - 複数の意思決定主体(プレイヤー)が存在し、各々目的を持ち、その実現を目指して相互に依存しあっている状況
- ゲーム理論 game theory
 - ゲーム的状况を数理モデルを用いて定式化し、プレイヤー間の利害の対立と協力を分析する理論

<ノーベル経済学賞受賞者(ゲーム理論関連)>

1994年: J.F.Nash Jr., R.Selten, J.C.Harsanyi [非協力ゲームにおける均衡分析に関する理論の開拓]
1996年: Sir J.A.Mirrlees, W.S.Vickrey [「情報の非対称性のもとでの経済的誘因の理論」に対する貢献]
2001年: G.A.Akerlof, A.M.Spence, J.E.Stiglitz [非対称情報下での市場分析に関する貢献]
2005年: R.J.Aumann, T.C.Schelling [ゲーム理論分析を通じて対立と協力の理解を深めた功績]
2007年: L.Hurwicz, E.S.Maskin, R.B.Myerson [メカニズムデザインの理論の基礎を築いた功績]
2012年: A.E.Roth, L.S.Shapley [安定的な分配とマーケットデザインの実践に関する功績]
2014年: J.M.Tirole [市場の力と規制の分析に関する功績]
2016年: O.S.D.Hart, B.R.Holmstroem [契約理論への貢献]
2020年: P.R.Milgrom, R.B.Wilson Jr. [オークション理論の改良と新しいオークション形式の発明]

囚人のジレンマ

- 2人のプレイヤー(太郎と花子)がゲームをする
 - プレイヤーの戦略は「協力する(C; cooperate)」か「裏切る(D; defect)」か
 - 2人とも協力すれば、双方共に5の利得を獲得 [(C, C)なら(5, 5)]
 - 片方が裏切り(D), 片方が協力(C)なら、裏切った方が多くの利得を得、裏切られた方は利得が無くなる [(D, C)なら(9, 0) / (C, D)なら(0, 9)]
 - 2人とも裏切った場合、双方共に1の利得を獲得 [(D, D)なら(1, 1)]
- 問: 各プレイヤーはどちらの戦略をとるだろうか？

囚人のジレンマ

- 2人のプレイヤー(太郎と花子)がゲームをする
 - プレイヤーの戦略は「協力する(C; cooperate)」か「裏切る(D; defect)」か
 - 2人とも協力すれば, 双方共に5の利得を獲得 [(C, C)なら(5, 5)]
 - 片方が裏切り(D), 片方が協力(C)なら, 裏切った方が多くの利得を得, 裏切られた方は利得が無くなる [(D, C)なら(9, 0) / (C, D)なら(0, 9)]
 - 2人とも裏切った場合, 双方共に1の利得を獲得 [(D, D)なら(1, 1)]
- **考察**: 2人のプレイヤーの利得表は以下

太郎\花子	C	D
C	(5, 5)	(0, 9)
D	(9, 0)	(1, 1)

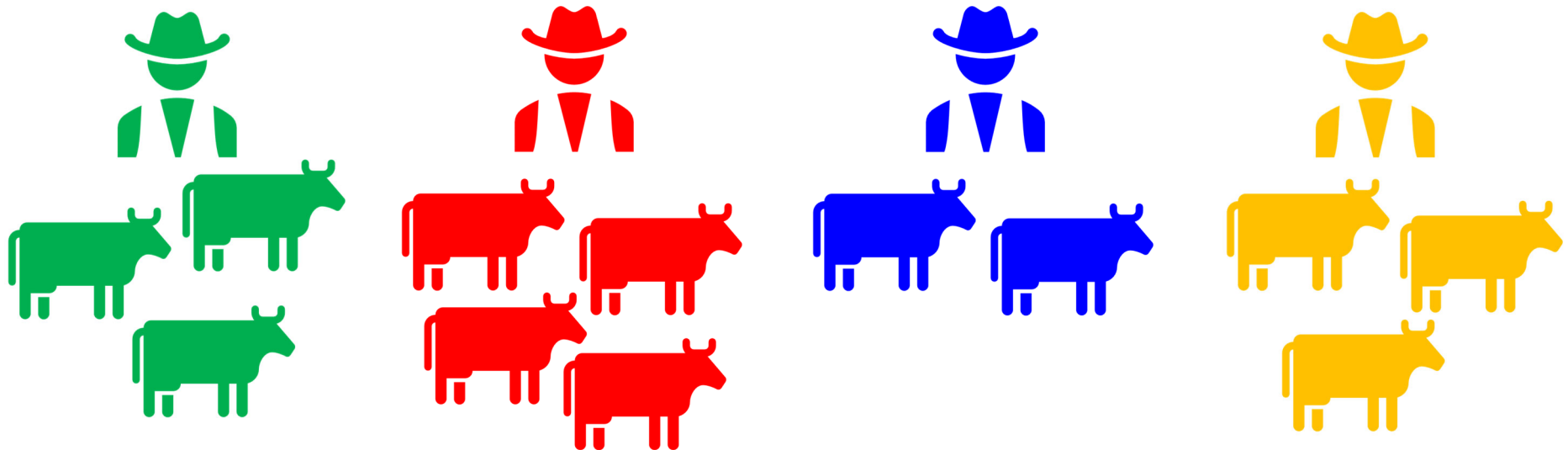
- ◆ 2人非協力非零和ゲームのNash均衡解
 - 戦略の組が**Nash均衡解**であるとは, 「相手のプレイヤーが戦略を変えないときに, 自分が戦略を変更しても今以上に利得が大きくなる, ということが双方について成り立っている状態(解)」のことである

※戦略の組(*,*)の例: (C, C) とか (C, D) 等

**To *C*ooperate, or to *D*efect,
that is the question!**

共有地の悲劇(囚人のジレンマの n 人拡張版)

- 数軒の酪農家で牧草地を共同所有している
 - 各酪農家は何頭かの牛を飼っている(飼育頭数は各酪農家の自由)
 - 牛を共同所有の牧草地に放す(牛は餌である牧草を食べる)
 - 飼育頭数が増える程、酪農家の利益はあがる
 - ただし、たくさんの牛が放牧されれば牧草地は荒れて使えなくなる(牛は餌である牧草が少なくなり、生産性が下がる＝酪農家の利益が減る)
 - 各酪農家は自己の利益を最大化したい
- **問**: 各酪農家はそれぞれ何頭の牛を飼うだろうか？



共有地の悲劇(囚人のジレンマの n 人拡張版)

- 数軒の酪農家で牧草地を共同所有している
- 考察: この問題の **モデル化の例**
 - 酪農家は4軒 (**プレイヤーは4人**) ($i=1,2,3,4$)
 - 酪農家 i が放牧する牛の数を q_i とし, 各3頭まで飼える ($q_i=0,1,2,3$)
 - 酪農家の **戦略は飼育頭数** ($q_i=0,1,2,3$)
 - 牛の購入価格は全て同じで一頭 p
 - 牧草地の許容量 T
 - 酪農家 i の **収益** を π_i とし, $\pi_i = q_i \{T - (q_1 + q_2 + q_3 + q_4)\} - pq_i$ で計算
- モデル**より計算される **酪農家 i の利得表** ($p=2, T=17$ で計算)

$i \setminus$ 他3人	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
2	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8
3	36	33	30	27	24	21	18	15	12	9

例えば, $i=1$ で
 $q_1=2, q_2=3, q_3=1, q_4=2$
なら
 $\pi_1 = 2 \{17 - (2+3+1+2)\} - 4$
 $= 2 \times 8 - 4 = 14$
となる

Nash均衡解
はどこか?

繰り返し囚人のジレンマ

➤ Google colab で axelrod ライブラリを利用して実行

- ◆ Google アカウントにログインし, google drive へ移動する

- ◆ [新規]ー[その他]ー[Google colab] を選択

- ◆ [コード]欄に以下を記述し, 実行(▶クリック)して axelrod をインストール

```
▶ !pip install axelrod
```

- ✓ インストールが終了する(以下のメッセージが出る)まで静かに待つ

```
...  
Successfully installed gurobipy-13.0.2
```

- ✓ 既にインストール済みの場合は, 以下のメッセージが出る

```
Requirement already satisfied:...
```

- ◆ 次に[+コード] をクリックして [コード]欄を追加し, 次ページの python コードを入力して, 実行(▶クリック)する

繰り返し囚人のジレンマ

➤ Google colab で axelrod ライブラリを

◆ Python code

```
import axelrod as axl

res = axl.Match([axl.Random(), axl.TitForTat()], 50) #Random vs TFT 50回

print(res.play())          # プレイし, 結果を表示
print(res.scores())        # プレイしたScoreを表示
print(res.sparklines(c_symbol='協', d_symbol='裏')) # 結果を縦に並べて表示
print(res.final_score_per_turn()) # 総合Score[平均点]を表示
print(res.cooperation())   # 各々がC(協調)を出した回数を表示
res.winner()               #勝者を表示(引き分けの場合はFalseと表示)
```

注) # とその右側の緑色の文字は, 人間用のコメント(後で見た時に何が書かれているか理解を助けるために残す文字)なので, 記述する必要はない

◆ 実行結果

```
[(D, C), (C, D), (D, C), (D, D), (C, D), (C, C), (C, C), (C, C), ...
[(np.int64(5), np.int64(0)), (np.int64(0), np.int64(5)), ...
裏協裏裏協協協協裏協裏協協協協協裏裏裏協協協協協裏協協協裏裏協裏協協裏協協協裏協裏...
協裏協裏裏協協協協裏協裏協協協協協裏裏裏協協協協協裏協協協裏裏協裏協協裏協協協裏協...
(np.float64(2.44), np.float64(2.44))
(30, 30)
False
```

参考文献

- ◆ 鈴木光男「ゲーム理論入門」共立出版(1981,2003(新装版))
- ◆ 鈴木光男「新ゲーム理論」勁草書房(1994)
- ◆ 岡田章「ゲーム理論」有斐閣(1996, 2011(新版))
- ◆ 渡辺隆裕「ゲーム理論入門」日本経済新聞社(2008)
- ◆ R.アクセルロッド「つきあい方の科学」ミネルヴァ書房(1998)

もっと知りたい人へ

- 関連する経営学科の授業
 - 「**ゲーム理論**」(4セメ)
 - etc...