

経営学部の数学基礎 ～練習問題～

堀田 敬介
2024(R6) / 8 / 16

1 ベクトル

1.1 ベクトルとは

練習 1.1) 次を実施せよ

- あなたの学籍番号下 2 桁の 2 つの数値を並べて 2 次元ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ をつくり, 2 次元平面上に描画せよ
- そのベクトル $\mathbf{a}$ の l_1 -ノルム $\|\mathbf{a}\|_1$, l_2 -ノルム $\|\mathbf{a}\|_2$, 無限大ノルム $\|\mathbf{a}\|_\infty$ を各々求めよ
- あなたの学籍番号下 3 桁の 3 つの数値を並べて 3 次元ベクトル $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ をつくり, 3 次元空間上に描画せよ
- そのベクトル $\mathbf{b}$ の l_1 -ノルム $\|\mathbf{b}\|_1$, l_2 -ノルム $\|\mathbf{b}\|_2$, 無限大ノルム $\|\mathbf{b}\|_\infty$ を各々求めよ
- あなたの学籍番号の 6 個の数値を好きな順に並べて 6 次元ベクトル $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$ をつくり示せ
- そのベクトル $\mathbf{c}$ の l_1 -ノルム $\|\mathbf{c}\|_1$, l_2 -ノルム $\|\mathbf{c}\|_2$, 無限大ノルム $\|\mathbf{c}\|_\infty$ を各々求めよ

1.2 和（差）とスカラー倍

練習 1.2) 次を実施せよ

- あなたの学籍番号下 3 桁の 3 つの数値を並べて 3 次元ベクトル $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ をつくり示せ
- あなたの学籍番号下 3 桁の 3 つの数値を逆に並べ 3 次元ベクトル $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ をつくり示せ
- 2 つのベクトルの和 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ と差 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ をそれぞれ計算せよ
- あなたの学籍番号 2 桁目の数値でスカラー k をつくり, $k\mathbf{a}$ と $-k\mathbf{b}$ をそれぞれ計算せよ

1.3 内積

練習 1.3) 次を実施せよ

1. あなたの学籍番号下 4 桁の 4 つの数値を並べて 4 次元ベクトル $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^4$ をつくり示せ
2. あなたの学籍番号下 4 桁の 4 つの数値を逆に並べ 4 次元ベクトル $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ をつくり示せ
3. 2 つのベクトルの内積 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ を計算せよ
4. 2 つのベクトルの l_2 -ノルムの積 $\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$ を計算せよ
5. 2 つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす角を θ とする. 上記結果を用いて $\cos \theta$ を求めよ

1.4 効用関数と Pareto 最適性

練習 1.4) 次を実施せよ

1. あなたが明日の昼に食べたいものを 3 つあげよ (例: 「ご飯, 味噌汁, 鯖の味噌煮」など)
2. その 3 つに対し, 嬉しさの度合いを表すベクトルを $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とし, 各値をあなたの嬉しさの度合いに基づいて設定せよ. ただし, $1 \leq p_1, p_2, p_3 \leq 5$ とする (例: 「 $p_{\text{ご飯}} = 3, p_{\text{味噌汁}} = 2, p_{\text{鯖の味噌煮}} = 5$ 」など)
3. 嬉しさベクトル $\mathbf{p}$ と, 食べる量を表す変数ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を用いて, あなたの効用関数 $u(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle$ を示せ
4. 実際にあなたが食べる量 $\mathbf{x}$ を適当に設定して, そのときの効用関数 $u(\mathbf{x})$ の値を求めよ. ただし, $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 100, x_1 + x_2 + x_3 = 100$ とする (例: 「 $x_{\text{ご飯}} = 30, x_{\text{味噌汁}} = 20, x_{\text{鯖の味噌煮}} = 50$ 」など)

練習 column) 次を実施せよ

1. スカラー値をとる 2 つのパラメータ α, β を適当に設定し, 1 変数関数 $f(x) = \alpha x + \frac{\beta}{x}$ の最小値を求めよ. また, その最小値を与える x を求めよ. ただし, $1 \leq \alpha, \beta \leq 9$ とする

2 行列

2.1 行列とは

練習 2.1.1) 次を実施せよ

1. $(3, 2)$ 行列 A を適当につくり示せ. また, 対角成分と非対角成分をそれぞれ全て示せ
2. A^T を求めよ
3. $(2, 4)$ 行列 B を適当につくり示せ. また, 対角成分と非対角成分をそれぞれ全て示せ
4. B^T を求めよ
5. 4 次正方行列 C を適当につくり示せ. また, 対角成分と非対角成分をそれぞれ全て示せ
6. C^T を求めよ
7. あなたの学籍番号下 3 桁の 3 つの数値を対角要素とする 3 次対角行列 D をつくり示せ
8. 2 次単位行列 I_2 をつくり示せ

練習 2.1.2) 次を実施せよ

1. 3 次対称行列 S を適当につくり示せ
2. 3 次歪対称行列 W を適当につくり示せ
3. 3 次上三角行列 U を適当につくり示せ. また U^T は何行列になるか?
4. 3 次下三角行列 L を適当につくり示せ. また L^T は何行列になるか?

練習 2.1.3) 次を実施せよ

1. n 次対称行列 $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ について, $S^T = S$ を証明せよ
2. n 次歪対称行列 $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ について, $W^T = -W$ を証明せよ

2.2 行列の演算

練習 2.2.1) 次を実施せよ

1. $(4, 2)$ 行列 A と, $(2, 4)$ 行列 B を適当につくり示せ
2. 2 つの行列の積 AB のサイズがどうなるか示せ

3. 2つの行列の積 AB を計算せよ
4. 2つの行列の積 $B^T A^T$ を計算し、積 AB の結果と比較せよ
5. 2つの行列の積 $A^T B^T$ のサイズがどうか示せ
6. 2つの行列の積 $A^T B^T$ を計算せよ
7. 2つの行列の積 BA を計算し、積 $A^T B^T$ の結果と比較せよ

練習 2.2.2) 次を実施せよ

1. あなたの学籍番号下3桁の3つの数値を正順に並べた3次元ベクトル x と逆順に並べた3次元ベクトル y を作り示せ
2. $x^T y$ を計算せよ
3. xy^T を計算せよ
4. $y^T x$ を計算せよ
5. yx^T を計算せよ
6. 内積 $\langle x, y \rangle$ を計算せよ

練習 2.2.3) 次を実施せよ

1. 4次正方行列 A を適当につくれ
2. この行列 A について、 $\frac{1}{2}(A + A^T)$ を計算し、結果が対称行列になることを確認せよ。出来た行列を S とする
3. この行列 A について、 $\frac{1}{2}(A - A^T)$ を計算し、結果が歪対称行列になることを確認せよ。出来た行列を W とする
4. $S + W$ を計算し、結果がもとの行列 A に一致することを確認せよ
5. 任意の n 次正方行列は、対称行列と歪対称行列の和に一意に分解できることを証明せよ

練習 2.2.4) 次の連立一次方程式をそれぞれ行列表記せよ

$$1. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 - 4x_2 = 5 \\ -2x_1 + 3x_2 = 2 \\ 4x_1 + 7x_2 = 3 \\ 5x_1 - 6x_2 = -4 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -2 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

2.3 行列演算の性質

練習 2.3.1) 次を実施せよ

1. 3つの $(2, 3)$ 行列 A, B, C と, 2つのスカラー p, q を適当につくり, 「加法とスカラー倍の性質 1~6」が成り立つことを確認せよ

練習 2.3.2) 次を実施せよ

1. $(3, 2)$ 行列 A と, $(2, 3)$ 行列 B と, $(3, 1)$ 行列 C と, スカラー p を適当につくり, 「乗法とスカラー倍の性質 1~2」が成り立つことを確認せよ
2. $(3, 2)$ 行列 A と, 2つの $(2, 2)$ 行列 B, C を適当につくり, 「乗法とスカラー倍の性質 3」が成り立つことを確認せよ
3. 2つの $(3, 2)$ 行列 A, B と, $(2, 4)$ 行列 C を適当につくり, 「乗法とスカラー倍の性質 4」が成り立つことを確認せよ
4. $(3, 2)$ 行列 A と $(2, 3)$ 行列 B を適当につくり, 「乗法とスカラー倍の性質 5」が成り立たないことを確認せよ

2.4 感染症シミュレーション

練習 2.4) テキストを読んで理解し, Excel で再現せよ

3 連立一次方程式を解く

3.1 行列の基本変形と連立一次方程式の解法

練習 3.1) 以下の 3 次元連立一次方程式をそれぞれガウスの消去法で解き, 解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を求めよ. ただし, 左辺係数行列と右辺定数ベクトルを並べた拡大係数行列に対して, 行に関する基本変形を最後まで (階数標準形の左上ブロック行列が単位行列になるまで) 実施して求めること

$$1. \begin{cases} 5x_1 - 15x_2 + 10x_3 = -5 \\ 4x_1 - 14x_2 = -8 \\ -2x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 11 \\ 3x_1 - 8x_2 + 7x_3 = -4 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 11 \\ -4x_1 + x_2 - 5x_3 = -10 \\ 2x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 5x_1 + 15x_2 - 10x_3 = 20 \\ -2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = -8 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4 \\ 3x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 = -8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 12x_3 = 16 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 = -2 \end{cases}$$

3.2 行列の階数

練習 3.2) 以下の各行列に対して、行に関する基本変形を行い、階数標準形と階数を求めよ

$$1. \begin{pmatrix} 2 & -10 & 2 & 8 \\ -4 & 23 & 5 & -10 \\ -2 & 12 & 6 & -8 \\ 3 & -17 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 3 & 12 & -6 & 9 \\ 1 & 8 & 6 & -1 \\ 2 & 6 & -8 & 8 \\ -1 & -1 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & -6 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & -3 & 7 & 16 \end{pmatrix}$$

3.3 連立一次方程式の解の存在性

練習 3.3) 練習 3.1 の各連立一次方程式について、左辺係数行列を A 、右辺定数ベクトルを $\mathbf{b}$ とし、拡大係数行列を $(A|\mathbf{b})$ とする.、解 $\mathbf{x}$ の次元 n と、 $\text{rank}(A|\mathbf{b})$, $\text{rank}(A)$ の値をそれぞれ求め、値と結果を比較せよ

4 グラフ理論と連立一次方程式

4.1 グラフ

練習 4.1) 次を実施せよ

1. 点集合 $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とし、枝集合を $|E| = 8$ となるよう適当に設定して、無向グラフ $G = (V, E)$ をつくり、 $|V|$ の値と集合 E を示せ。また作成したグラフを図示せよ
2. このグラフの接続行列 A のサイズ $m \times n$ を答えよ
3. このグラフの接続行列 A をつくれ。ただし、行と列の順番は各集合に示した順とせよ。

4.2 割当問題

練習 4.2 4 人の部下 ($V_p = \{1, 2, 3, 4\}$) に 8 つの仕事 ($V_j = \{j_1, j_2, \dots, j_8\}$) を割り当てる

1. テキスト表 4.1 と同じ要領で、割当問題を適当につくれ (同様の表を示せばよい)
2. 作成した問題の点集合 $V = V_p \cup V_j$ と枝集合 E 、及び $|V|, |E|$ の値をそれぞれ示せ
3. この問題を、テキスト図 4.2 と同じ要領で 2 部グラフで表現せよ
4. テキストと同様の 0-1 変数を用いて、この問題の解を求める連立一次方程式をつくる
 - (a) 式 (4.1) に相当する式を示せ。ただし、各部下には 2 つずつ仕事を割り当てる。
 - (b) 式 (4.2) に相当する式を示せ
 - (c) 接続行列 A のサイズ $m \times n$ を答えよ
 - (d) 接続行列 A と右辺ベクトル $\mathbf{b}$ をそれぞれ示せ
 - (e) 連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ について、ガウスの消去法で解 $\mathbf{x}$ を求めよ

4.3 2 部グラフの最大マッチング

練習 4.3 4 人の男性 ($V_m = \{1, 2, 3, 4\}$) と 3 人の女性, $V_f = \{1, 2, 3\}$) で幾つかのペアを作る

1. テキスト表 4.2 と同じ要領で、マッチング問題を適当につくれ (同様の表を示せばよい)
2. 作成した問題の点集合 $V = V_m \cup V_f$ と枝集合 E 、及び $|V|, |E|$ の値をそれぞれ示せ
3. この問題を、テキスト図 4.3 と同じ要領で 2 部グラフで表現せよ
4. テキストと同様の 0-1 変数を用いて、この問題の解を求める連立一次方程式をつくる
 - (a) 式 (4.4) に相当する式を示せ
 - (b) 式 (4.5) に相当する式を示せ
 - (c) 接続行列 A のサイズ $m \times n$ を答えよ
 - (d) 接続行列 A と右辺ベクトル $\mathbf{b}$ をそれぞれ示せ
 - (e) 連立一次不等式 $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ について、非負のスラック変数ベクトル $\mathbf{s} (\mathbf{s} \geq \mathbf{0})$ を導入して連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の形に変換し、ガウスの消去法で解 $\mathbf{x}$ を求めよ

4.4 安定集合

練習 4.4) レスキュー隊員が7人いる (A, B, ..., G)．要救助者1名を助けるべくなるべく大人数の搜索隊を作りたい．レスキュー隊員には連携の練度が不十分のペアが幾組かある．各隊員のペア同士の連携練度は、右表の通りである (o = 連携練度充分, x = 連携練度不十分)

連携の練度が充分なペアのみで構成される搜索隊を作りたい．この問題は安定集合を求める問題でモデル化出来る

	B	C	D	E	F	G
A	o	o	x	o	x	o
B	-	o	o	o	o	x
C	-	-	o	o	o	o
D	-	-	-	x	x	o
E	-	-	-	-	o	o
F	-	-	-	-	-	x

1. 隊員を点集合 $V = \{A, B, \dots, G\}$ とし、仲が悪い同士に枝を張って枝集合 E をつくる．枝集合 E 、及び $|V|, |E|$ の値をそれぞれ示せ
2. この問題を、テキスト図 4.4 と同じ要領で グラフで表現せよ
3. テキストと同様の 0-1 変数を用いて、この問題の解を求める連立一次方程式をつくる
 - (a) 式 (4.7) に相当する式を示せ
 - (b) 接続行列 A のサイズ $m \times n$ を答えよ
 - (c) 接続行列 A と右辺ベクトル b をそれぞれ示せ
 - (d) 連立一次不等式 $A^T x \leq b$ について、非負のスラック変数ベクトル s ($s \geq 0$) を導入して連立一次方程式 $A^T x = b$ の形に変換し、ガウスの消去法で解 x を求めよ (※ 接続行列は転置して使っていることに注意)

4.5 生産計画

練習 4.5) 7つの資材 (m) を使って4つの製品 (p) を作る

1. テキスト表 4.4 と同じ要領で、生産計画問題を適当につくれ (同様の表を示せばよい)
2. テキストと同様の変数を用いて、この問題の解を求める連立一次方程式をつくる
 - (a) 変数ベクトル x の次元はいくつか?
 - (b) 式 (4.9) に相当する式を示せ
 - (c) 係数行列 A と右辺ベクトル b をそれぞれ示せ
 - (d) 連立一次不等式 $Ax \leq b$ について、非負のスラック変数ベクトル s ($s \geq 0$) を導入して連立一次方程式 $Ax = b$ の形に変換し、ガウスの消去法で解 x を求めよ

4.6 栄養摂取

練習 4.6) 5つの栄養素と10種類の食材を使って栄養摂取問題を作る

- 5つの栄養素を適当に選び、一日の必要量や推奨量を各サイトで調査せよ
＜参考 HP 例＞
 - 文部科学省：食品成分データベース <https://fooddb.mext.go.jp/index.pl>
 - 文部科学省：日本食品標準成分表 https://www.mext.go.jp/a_menu/syokuhinseibun/mext_00001.ht
 - 厚生労働省：日本人の食事摂取基準 https://www.mhlw.go.jp/stf/seisakunitsuite/bunya/kenkou_
 - 農林水産省：ちょうどよいバランスの食生活 <https://www.maff.go.jp/j/syokuiku/wakaisedai/atta>
- 10種類の食材を適当に選び、単位量あたりの5つの栄養素含有量を各サイトで調査せよ
- 上記結果に基づいて、テキスト表 4.5 と同様の表を作り、栄養摂取問題を完成させよ
- テキストと同様の変数を用いて、この問題の解を求める連立一次方程式をつくる
 - 変数ベクトル x の次元はいくつか？
 - 式 (4.11) に相当する式を示せ
 - 係数行列 A と右辺ベクトル b をそれぞれ示せ
 - 連立一次不等式 $Ax \geq b$ について、非正のサープラス変数ベクトル s ($s \leq 0$) を導入して連立一次方程式 $Ax = b$ の形に変換し、ガウスの消去法で解 x を求めよ

4.7 輸送計画

練習 4.7) 4箇所の資材置き場 (A,B,C,D) から6つの生産工場 (1,2,...,6) へ資材を輸送する

- 各資材置き場の提供可能量と、各生産工場の必要資材量をそれぞれ適切に設定せよ。ただし、提供可能な総量と必要資材の総量を一致させること
- 資材置き場集合 V_s と生産工場集合 V_d とし、点集合 $V = V_s \cup V_d$ をつくる。2つの集合 V_s, V_d の任意の2点間に枝がある。このとき $|V|, |E|$ の値をそれぞれ示せ
- この問題を、テキスト図 4.5 と同じ要領で2部グラフで表現せよ
- テキストと同様の変数を用いて、この問題の解を求める連立一次方程式をつくる
 - 変数ベクトル x の次元はいくつか？
 - 式 (4.13) に相当する式を示せ
 - 式 (4.14) に相当する式を示せ
 - 接続行列 A のサイズ $m \times n$ を答えよ
 - 接続行列 A と右辺ベクトル b をそれぞれ示せ
 - 連立一次方程式 $Ax = b$ について、ガウスの消去法で解 x を求めよ

5 数列

5.1 等差数列と等比数列

練習 5.1.1) 初項 a_1 =[あなたの学籍番号の下1桁], 公差 d =[あなたの学籍番号の下2桁] として等差数列をつくる

1. 公差 d と, 最初の5項 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 の値を示せ
2. この等差数列の一般項 a_n を式で示せ

練習 5.1.2) 初項 b_1 =[あなたの学籍番号8桁のうち, 2桁目にある数], 公比 r =[あなたの学籍番号の下1桁] として等比数列をつくる

1. 公比 r と, 最初の5項 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 の値を示せ
2. この等比数列の一般項 b_n を式で示せ

5.2 等差数列と等比数列の和

練習 5.2.1) 次を実施せよ

1. 練習 5.1.1 で作った等差数列について, 初項 a_1 ~ 末項 a_n の和 S_n の式を示せ
2. 練習 5.1.2 で作った等比数列について, 初項 b_1 ~ 末項 b_n の和 S_n の式を示せ

練習 5.2.2) 次を実施せよ

1. あなたの学籍番号下5桁の最初の3つの数字で初項 a_1 を, 残りの2つの数字で公差 d をつくる. 例えば, 下5桁が「12345」なら $a_1 = 123, d = 45$ となる
 - (a) この等差数列の一般項 a_n を式で示せ
 - (b) n =[今年の西暦4桁] としてこの等差数列の和 S_n を式で示せ
2. あなたの学籍番号下5桁の最初の4つの数字で初項 b_1 を, 残りの1つの数字で公比 r をつくる. 例えば, 下5桁が「12345」なら $b_1 = 1234, r = 5$ となる
 - (a) この等比数列の一般項 b_n を式で示せ
 - (b) n =[今年の西暦4桁] としてこの等比数列の和 S_n を式で示せ

5.3 お金の時間価値

練習 5.3) 次を実施せよ (いずれも, 利息にかかる税金は考慮しなくて良い)

1. 金利 1% で毎月末 2 万円ずつ 5 年間にわたり積立貯金をする. 満期には元利併せて幾らになっているか? この値を求める式を示せ
2. 金利 1% で毎月末 2 万円ずつ積立貯金をする. 目標額を 100 万円とするとき, 何年何ヶ月後に達成するか? この値を求める式を示せ
3. 150 万円を金利 5% で借り入れる. 毎月末に 3 万円ずつ返済するとき, 返済が完了するのは何年何ヶ月後か? この値を求める式を示せ
4. 150 万円を金利 5% で借り入れる. 4 年間で完遂するためには, 毎月末, いくらずつ返済する必要があるか? ただし, 返済額は常に同額とする. この値を求める式を示せ

5.4 ゲーム理論, 繰り返し囚人のジレンマ

練習 5.4) 次を実施せよ

1. 表 5.1 を見て, 囚人のジレンマ型になるゲームの各プレイヤーの 4 つの利得の関係性を見つけよ
2. 囚人のジレンマ型になるゲームの実例を探して, 表 5.1 の形で表現せよ

解答例

練習 3.1)

1.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -15 & 10 & -5 \\ 4 & -14 & 0 & -8 \\ -2 & 8 & 9 & 11 \\ 3 & -8 & 7 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 4 & -14 & 0 & -8 \\ -2 & 8 & 9 & 11 \\ 3 & -8 & 7 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -8 & -4 \\ -2 & 8 & 9 & 11 \\ 3 & -8 & 7 & -4 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -8 & -4 \\ 0 & 2 & 13 & 9 \\ 3 & -8 & 7 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -8 & -4 \\ 0 & 2 & 13 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 13 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 13 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 14 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

故に、唯一解 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である.

2.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 11 \\ -4 & 1 & -5 & -10 \\ 2 & 2 & 0 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & 11 \\ -4 & 1 & -5 & -10 \\ 2 & 2 & 0 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ -4 & 1 & -5 & -10 \\ 2 & 2 & 0 & 10 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 2 & 2 & 0 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 4 & -4 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 4 & -4 & 8 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 4 & -4 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

故に, $x_3 = t$ として, 解は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-t \\ 2+t \\ t \end{pmatrix}$ である. t は任意

3.

$$\begin{pmatrix} 5 & 15 & -10 & | & 20 \\ -2 & -6 & 4 & | & -8 \\ -1 & -3 & 2 & | & -4 \\ 3 & 9 & -6 & | & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & 4 \\ -2 & -6 & 4 & | & -8 \\ -1 & -3 & 2 & | & -4 \\ 3 & 9 & -6 & | & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -1 & -3 & 2 & | & -4 \\ 3 & 9 & -6 & | & 12 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 3 & 9 & -6 & | & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

故に, $x_2 = s, x_3 = t$ として, 解は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3s+2t \\ s \\ t \end{pmatrix}$ である. s, t は任意

4.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & | & 6 \\ 1 & -2 & 7 & | & -8 \\ -2 & 3 & -12 & | & 16 \\ 3 & 1 & 7 & | & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & -2 & 7 & | & -8 \\ -2 & 3 & -12 & | & 16 \\ 3 & 1 & 7 & | & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -3 & 6 & | & -10 \\ -2 & 3 & -12 & | & 16 \\ 3 & 1 & 7 & | & -2 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -3 & 6 & | & -10 \\ 0 & 5 & -10 & | & 20 \\ 3 & 1 & 7 & | & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -3 & 6 & | & -10 \\ 0 & 5 & -10 & | & 20 \\ 0 & -2 & 4 & | & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -2 & | & \frac{10}{3} \\ 0 & 5 & -10 & | & 20 \\ 0 & -2 & 4 & | & -8 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -2 & | & \frac{10}{3} \\ 0 & 5 & -10 & | & 20 \\ 0 & -2 & 4 & | & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -2 & | & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & | & \frac{10}{3} \\ 0 & -2 & 4 & | & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -2 & | & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & | & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & | & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -2 & | & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -2 & | & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

故に, 解なし (最後の3行目の方程式 $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$ を満たす解 $\mathbf{x}$ は存在しない).

練習 3.2)

1.

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 2 & -10 & 2 & 8 \\ -4 & 23 & 5 & -10 \\ -2 & 12 & 6 & -8 \\ 3 & -17 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ -4 & 23 & 5 & -10 \\ -2 & 12 & 6 & -8 \\ 3 & -17 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 9 & 6 \\ -2 & 12 & 6 & -8 \\ 3 & -17 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
& \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 3 & -17 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \end{pmatrix} \\
& \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \\
& \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

よって、階数は4. なお、更に基本変形を続けると以下の通り.

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 16 & 14 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 46 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 46 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 3 & 12 & -6 & 9 \\ 1 & 8 & 6 & -1 \\ 2 & 6 & -8 & 8 \\ -1 & -1 & 8 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 8 & 6 & -1 \\ 2 & 6 & -8 & 8 \\ -1 & -1 & 8 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & -4 \\ 2 & 6 & -8 & 8 \\ -1 & -1 & 8 & -6 \end{pmatrix} \\
& \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 8 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \\
& \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

よって、階数は2. なお、更に基本変形を続けると以下の通り.

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -10 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

3.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & -6 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & -3 & 7 & 16 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -11 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & -3 & 7 & 16 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -11 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ 3 & -3 & 7 & 16 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -11 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & 3 & 7 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & -2 & -3 & -11 \\ 0 & 3 & 7 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -11 \\ 0 & 3 & 7 & 4 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -15 \\ 0 & 3 & 7 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -15 \\ 0 & 0 & -2 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 10 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

よって、階数は3. なお、更に基本変形を続けると以下の通り.

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

練習 5.1.1) 学籍番号 $c3r11345$ とする

1. $d = 45, a_1 = 5, a_2 = 50, a_3 = 95, a_4 = 140, a_5 = 185$
2. $a_n = 5 + 45(n - 1)$

練習 5.1.2) 学籍番号 $c3r11345$ とする

1. $r = 5, b_1 = 3, b_2 = 15, b_3 = 75, b_4 = 375, b_5 = 1875$

$$2. b_n = 3 \cdot 5^{n-1}$$

練習 5.2.1)

$$1. S_n = \frac{(2 \cdot 5 + 45(n-1))n}{2}$$

$$2. S_n = \frac{3(1-5^n)}{1-5}$$

練習 5.2.2) 学籍番号 c3r11345 とする

$$1. a_1 = 113, d = 45$$

$$(a) a_n = 113 + 45(n-1)$$

$$(b) n = 2024 \text{ とすると, } S_n = \frac{(2 \cdot 113 + 45(2024-1)) \cdot 2024}{2}$$

$$2. b_1 = 1134, r = 5$$

$$(a) b_n = 1134 \cdot 5^{n-1}$$

$$(b) n = 2024 \text{ とすると, } S_n = \frac{1134(1-5^{2024})}{1-5}$$

練習 5.3)

1. 将来価値 $FV = PV \times (1+r)^n$, 5 年=60ヶ月, 金利 1% (年利) は月利 $\frac{1}{12}\%$ より,

$$1 \text{ ヶ月後に預ける 2 万円の 5 年後の元利合計 : } FV_1 = 20000 \times \left(1 + \frac{1}{1200}\right)^{60-1}$$

$$2 \text{ ヶ月後に預ける 2 万円の 5 年後の元利合計 : } FV_2 = 20000 \times \left(1 + \frac{1}{1200}\right)^{60-2}$$

$$3 \text{ ヶ月後に預ける 2 万円の 5 年後の元利合計 : } FV_3 = 20000 \times \left(1 + \frac{1}{1200}\right)^{60-3}$$

...

$$60 \text{ ヶ月後に預ける 2 万円の 5 年後の元利合計 : } FV_{60} = 20000 \times \left(1 + \frac{1}{1200}\right)^{60-60}$$

これを最後から逆順に見ると, 初項 $a_1 = 2$ 万, 公比 $r = \frac{1201}{1200}$, 項数 $n = 60$ の等比数列なので, 元利総額 (60ヶ月後の将来価値 FV 合計) はその和となる

$$S_n = \sum_{i=1}^{60} 20000 \cdot \left(\frac{1201}{1200}\right)^{i-1} = \frac{20000(1 - (\frac{1201}{1200})^{60})}{1 - \frac{1201}{1200}} = \frac{20000(1 - (\frac{1201}{1200})^{60})}{-\frac{1}{1200}}$$

2. まず計算の目安として, $100 \text{ 万円} \div 2 \text{ 万円} = 50$ より, 筆筒預金なら 50ヶ月 (=4 年 2ヶ月) にかかるため, 利息を考えると答えはこれ以下となる. 問題は上と同じなので, n ヶ月後の

元利合計は、同じ等比数列の和 S_n で表せ、これが 100 万円以上となる期間 (n ヶ月) を求めれば良い。よって、

$$\frac{20000(1 - (\frac{1201}{1200})^n)}{-\frac{1}{1200}} \geq 1000000$$

を満たす n を求めれば良い。

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & 1 - \left(\frac{1201}{1200}\right)^n \leq -\frac{1000000}{20000 \cdot 1200} \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\frac{1201}{1200}\right)^n \geq 1 + \frac{1}{2 \cdot 12} = \frac{25}{24} \\ \Leftrightarrow \quad & n(\log 1201 - \log 1200) \geq \log 25 - \log 24 \\ \Leftrightarrow \quad & n \geq \frac{\log 25 - \log 24}{\log 1201 - \log 1200} \approx 49.0068 \dots \end{aligned}$$

よって、約 49 ヶ月 (筆筒預金より約 1 ヶ月短いので、1 ヶ月分の積立額 2 万円が利息分でまかなわれることになる)

3. ...

4. ...