経営論集
Vol.2, No.x, April 2015, pp.xx-xx
ISSN xxxx-xxxx

■論文■

最適化技術のクラス編成問題への適用

堀田　敬介

概要

定員のあるクラスに学生を配属させる標準的なクラス編成問題を考える。各学生はクラスに対する希望をもっており、最大限彼らの希望に沿う配属決定を得ることが目的である。この問題に対し、様々なアプローチやアルゴリズムが提案され、考察されている。メカニズム・デザインの分野では、受入保留方式やトップ・トレーディング・サイクル方式が良い方法とされ、それぞれの手法から得られる解がパレート最適性・安定性・耐戦略性などの好ましい性質をもつかどうかが研究されている。これに対し、最適化モデルによるアプローチも多く研究され実際の問題に適用されている。こちらは主に、学生の希望をどのように満足度として表現すれば望みの解を得られるか、という観点で研究されている。本研究では、経営学部で実施される予定のクラス編成問題などの大学における学生のクラス編成問題に対しては、受入保留方式ではなく成績補正を施した最適化モデルを用いる方がより望ましいことを示す。また、本研究で用いる最適化モデルが導く解が、安定性・耐戦略性を持つかどうかについても明らかにする。

キーワード：　クラス編成問題、 最適化、ボストン方式、受入保留方式、トップ・トレーディング・サイクル方式、ゲール・シャプレーのアルゴリズム、メカニズム・デザイン、パレート最適性、安定性、耐戦略性

（投稿日 2015 年 4 月 30 日）
（受理日 2015 年 5 月 25 日）

文教大学経営学部
〒253-8550 神奈川県茅ヶ崎市行谷 1100
Tel 0467-53-2111(代表) Fax 0467-54-3734
http://www.bunkyo.ac.jp/faculty/business/

1 はじめに

定員のあるクラスに学生を配属させるクラス編成問題を考える。各学生は配属先のクラスの希望をもっており、最大限希望にそうように決定を行うことを目的とする。これは典型的なクラス編成問題であり、様々な手法を使って何らかの答えを導くことが出来る。また、実際に解くべき問題を対象として様々なアプローチによる提案や研究がある [1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 12, 15]。

例えば、ボストン方式（The Boston Public Schools system, BPS）*やその改良型である受入保留方式 (Deferred Acceptance system, DA)、トップ・トレーディング・サイクル方式 (Top Trading Cycles system, TTC) による配属決定や（cf. [13]）、グラフのマッチングにもとづき定義される安定結婚問題を解くゲール・シャプレーのアルゴリズム [1] を応用するなどの手法がある（cf. [7, 14, 15, 11]）†。これら各手法が導く答えはどのような性質を持っているのかについて、ゲーム理論やグラフ理論の視点による知見が得られている（cf. [13, 7]）。

例えば、解がもつべき好ましい性質として、3 つの概念（パレート最適性、安定性、耐戦略性）‡が提唱され分析されており、各手法で得られる解はそれぞれ

性質	パレート最適性	安定性	耐戦略性
BPS	×	×	×
DA	△	○	△
TTC	○	×	○

であることがわかっている（cf. [13]）し、実証実験などの結果も踏まえると、参加者にとって理解しづらい TTC より DA が推奨されるようである。表中の○は、その手法で得られる解がその性質を満たす、△は部分的に満たす、×は満たさないことを意味する §。ここで、耐戦略性とは戦略的操作可能でないということで、戦略的操作可能とは、学生が嘘をつくことによって正直に希望を申告したときより、より有利な結果を得ることが可能な場合があることをいう。つまり、解が耐戦略性をもたない手法では、参加者が嘘をつくインセンティブがあることになる。また、安定性と耐戦略性を同時に満たすメカニズムは存在しないことが分かっている（cf. [14]）

3 つのどの方式も、入力として全学生の全クラスに対する選好順位、全クラスの全学生に対する選好順位を必要とする¶。しかし、現実のクラス編成を考える場合、学生は全クラスの選好順位を持っているわけではない。仮に尋ねたとしても、学生本人も自信を持って選好出来るのは

*米国ボストン市における学校選択制で使われていた方法なのでこの名がある。この手法には問題が多いため、ボストン市が大学に改良提案を依頼し、その求めに応じて研究者が研究した結果生まれたのが DA と TTC で、現在は改良型の DA が採用されているようである。ちなみに、文教大学情報学部のゼミ選択ではこのボストン方式がいまだに使われている

†DA とゲール・シャプレーのアルゴリズムは同じものである。経済学・ゲーム理論では受入保留方式 (DA)、グラフ理論・安定結婚問題ではゲール・シャプレーのアルゴリズムとよばれることが多いようだ

‡当然満たされるべき性質として個人合理性（cf. [13]）もあるが、ここでは割愛する

§DA のパレート最適性が△となっているのは、安定性をもつ解に限ればパレート最適が保証されるが、不安定な解にパレート支配される場合がある、という意味（cf. [13]）であり、DA の耐戦略性が△となっているのは、学生側（プロポーズをする側）の申告には耐戦略性があるが、クラス側（受ける側）の選好にはないことによる (cf. [13])。ただし、クラス側の選好が意思の介在しない（同順位のない）全順序で与えられる場合（タイのない成績順など）、すなわち嘘の申告をする機会が無い場合には問題とならない

¶必ずしも全員をマッチさせなくてもよい場合や、希望外の代替案についてはサイコロを降って適当に順番を決めてデータを補うことを許す場合はこの限りではない

せいぜい第 3 希望までで、第 4 希望以降は無差別だったり、選好不可であろう。実際の所、BPS, DA, TTC において、各学生が希望するクラス以下のクラスに割り当てられる段階になった場合には、「受け入れ不可」として取り扱い、「その学生はどのクラスにも配属しない」という結果を返すことになるが、クラス編成問題では配属未決定は許されない。よってその場合は、希望以下のクラスをランダムに順番付けし、それを仮の選好として配属させるという手段を使う。従って、全員が第 3 希望程度までを持っている学生達を短期間に配属決定するには、これらの方法を用いるよりも、最適化モデルによる方が現実的である。また、クラス側が学生に対する希望を持っているわけではないし、そもそも学生が選ぶべきクラスに教員の思惑が介在するような優劣を学生に対して積極的につけることはあまり好ましいとはいえない。

最も単純な最適化モデルでは、学生の希望のみをもとにし、希望に対して満足度（効用）値を定め、その総和最大などの目的関数のもとで組合せを考えることになる（cf. [2]）。よって、この単純な組合せだけを考えた場合、それぞれの学生がどのように希望を出したかの組合せの結果で決まり、学生の配属は運によって左右される場合がある。そして、学生数が多いと、各々がどういう希望を持っているかの情報を学生相互に全て知っているなどということはあまり考えられないため、各クラスの人気・不人気の正確な情報を事前に得ているわけではない‖。例えば、第 1〜3 希望まで全く同じ希望を持つ 2 人の学生がいて、第 1 希望のクラスが人気だった場合、片方は第 1 希望でもう一方は第 2 希望になることが起こりうるが、学生の希望だけにもとづいて配属の組合せを決める場合は、どちらが第 1 希望に配属されるかは運任せである**。

学生側としては、完全に運で決まるより、それまでの蓄積、即ち成績を評価してもらい、成績上位のものに優先権があった方が公平だと感じるだろうし、第 1 希望に配属されなかった理由として運よりも成績を理由にされる方が納得はしやすいだろう。よって希望に成績を加味してデータを整えるのが現実的である。ただし、成績によって優劣をつけるというのは、先に述べた「クラス側が学生に（共通の）優劣を付けている」とみなせることに注意されたい。本研究では、共通の優劣として全科目の GPA を用いた場合のみを対象とするが、クラス毎に異なる優劣をつけることに対応させることも可能である。その場合は、クラスの内容に近い科目を複数あげてもらい、それのみの GPA を用いればよい††。

複数の希望を申請させる場合、例えば第 1〜3 希望を申請させる場合、その全てに成績を加味するのでは無く、第 1 希望にのみ成績補正をすると意図通り成績上位の学生が優遇されやすくなる [9]。本研究ではこれに加えて、重み付き成績補正も提案する。こちらの方法でも同様に、学生の希望による組合せの条件にあえば成績上位者が優遇される傾向があることを示す。

‖ネット・スマホが大学生に充分普及している昨今では、最初に全員に第 1 希望を応募させ、申告の修正期間を設け、その状況（各クラスの希望者数）をリアルタイムに表示すれば、他学生の動向を常に見ながら自分の戦略を練る機会を与えることは出来るだろう。ただしその場合は、〆切直前に申告をこまめに変更する学生が多数出て混乱のもととなったりサーバー負荷の問題が発生しかねないので、修正は 1 回のみのような修正回数の上限を設ける、一度修正してから一定時間は次の修正ができない、などの制約が必要となるだろう

**厳密には、計算機上で動くアルゴリズムが選ぶ順番でたまたま先に処理される方が選ばれたり、設計者のデータの作り方やアルゴリズムの設計の仕方、コンパイラの処理の仕方等に依存するので、設計者や言語プログラマが無意識に行ったデータ入力・アルゴリズム設計・コンパイラ設計等によって確定的に決まっていると言える

††経済学やゲーム理論の実証実験では、クラス側が学生に対する選好を持っていなかったり、同順位が存在する場合、全てのクラスで共通の単一くじをひく共通同順位解消か、クラス毎に独立に複数くじをひく独立同順位解消のどちらかが用いられるようであるが、どちらがより好ましいかについては研究途上のようであるし、これらを用いることによる問題点も指摘されている（cf. [13]）。成績（GPA）を選好に用いる際は、同順位をどうするか慎重に検討する必要がある

ボストン方式、受入保留方式、TTC と最適化モデルの違いは、上記の片側のみ希望をもつか両側が希望をもつかの他に、選好順序のデータとして順序尺度を使うか間隔尺度を使うかがある。もともとの学生の希望は順序尺度であり、順序だけに意味があるが、最適化モデルの場合は、希望を数値化するため、間隔尺度に変換していることになる。よって変換の仕方に恣意性が入り、結果がそれに左右される（cf. [2]）。本研究では、全学生を区別せず、希望毎に同じ値を用いる方法を採用する（cf. [2]）。

本論文の構成は以下の通りである。次節で、データの生成の仕方とクラス編成問題の標準的な最適化モデルを提示し、結果を示す。続けて、成績補正によってどの程度配属結果に影響を及ぼすかを明示する。さらに、DA の結果と比較し、最適化モデルの優位性についても論じる。さいごに、本論をまとめる。

2　最適化モデルによるクラス編成問題の解

2.1　最適化モデルとデータの生成

クラス編成問題に対する、標準的な最適化モデルを用いる。学生数 $n = 204$、クラス数 $m = 9$ とし、学生 i がクラス j に配属されるとき $x_{ij} = 1$、そうでないとき $x_{ij} = 0$ とする $\{0, 1\}$-変数を考える。クラス定員を $b = 25$、学生 i のクラス j に配属した場合の満足度を c_{ij} とすると、最も基本的なモデルは

$$\max. \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \tag{2.1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \ \leq \ b_j \quad (j = 1, \cdots, m) \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \ = \ 1 \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{2.3}$$

$$x_{ij} \ \in \ \{0, 1\} \quad (i = 1, \cdots, n,\ j = 1, \cdots, m) \tag{2.4}$$

となる。(2.4) にあるとおり、変数が $\{0, 1\}$-整数であることに注意すると、制約 (2.2) は、各クラスの所属学生数を定員以内におさえることを要求し、制約 (2.3) は、各学生が丁度一つのゼミに所属することを要求する。これらの制約を守りながら、全学生の希望の総和を最大化することを目的 (2.1) とするモデルである。

全く同じ制約 (2.2)～(2.4) のもとで、目的関数を、全学生を個別に最大化する

$$\max. \quad \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \quad (\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}) \tag{2.5}$$

におきかえた多目的最適化モデルを考えた場合、前記モデルは、この多目的最適化モデルの各目的関数の重みを 1 にして加重平均をとり一目的にしたものに一致する。このとき、(2.1) を目的として解いた問題の最適解は、(2.5) を目的とする多目的最適化モデルのパレート最適解となることが知られている（cf. [6]）。

先行研究 [8, 9] は、3 年次ゼミ配属を想定し、学生満足度の総和を最大化する、満足度の設定法を変える、および、満足度に成績調整を加えて比較することをおこなっている。対象のゼミは本論の対象クラス数よりも多く、それぞれ 45 クラス、17 クラスであり、各クラスの定員は本論で扱う定員より相対的に少ない。

200 人超の学生が 17 の研究室を選ぶ場合と、本研究の対象となる 9 クラス（科目）を選ぶ場合では、モデルの上では同一だが、実際問題として考えた場合、事情が異なる。学部の全専門教員による 17 の研究室の選択では、それぞれの分野で内容が似ている、乃至、近い研究室が存在するため、学生によっては第 1 希望を 2 つもち、その 2 つの研究室ならばどちらに配属されても構わない、という希望の仕方があり得る。従って、第 1 希望 2 つをどちらも同じ最高満足度（例えば 100）に設定することを許容するモデルがよい。しかし、9 クラスの場合は全クラスの内容が全て異なると考えて良いため、どちらでも良いという希望の出し方はありえず、設定上もそれを許さない方がよい。よってここでは、学生の希望として 2 つのクラスが無差別だということは許さない。

シミュレーション用のデータは 10 セットを以下のように生成した。

- 204 人の学生全員が 9 クラスから 3 クラスを選び、第 1〜3 希望とする。
- 第 1 希望の満足度（効用）を 100、第 2 希望を 60、第 3 希望を 30 とし、第 4〜9 希望は志望外として全て -999 とする。この、順序尺度から間隔尺度への変換設定は先行研究の考察・試行錯誤の結果による（cf. [2]）。[第 1 希望と第 2 希望の差] = 40 ＞ 30 = [第 2 希望と第 3 希望の差] であることに注意されたい。
- 9 クラスへの希望度には偏りがあると想定し、人気 3 クラス、普通 3 クラス、不人気 3 クラスと仮定する。不人気を基準として、普通をその 2 倍、人気を 3 倍の希望数があるよう、データを乱数で 10 セット生成した。生成されたデータの平均値は表 2.1 にまとめた。
- 定員は 25 人とする。この設定は、経験的に総定員は学生数の 1.1 倍とすれば充分という先行研究の考察・試行錯誤の結果による（cf. [2, 3]）

表 2.1: 各クラス希望人数（10 データセットの平均）

クラス	\ 希望	1	2	3	計
人	1	33.9	30.8	31.6	96.3
気	2	29.0	30.4	28.2	87.5
	3	33.5	29.7	23.8	87.0
普	4	20.5	20.2	23.2	63.8
通	5	22.0	22.5	22.5	67.0
	6	20.5	22.9	21.8	65.3
不	7	9.0	10.7	13.5	33.2
人	8	9.5	10.8	14.4	34.7
気	9	11.4	11.7	11.5	34.6

乱数の生成にはExcelの乱数発生器を使い、最適化モデルの計算にはpython2.7 と gurobi5.6.3 を利用した。計算機は32bit CPU Intel(R) Core(TM) i7 [2.93GHz]、4GBメモリのマシンを用いた。求解時間は1秒未満である。

2.2 最適化モデルによる定員毎の配属結果

結果は、表2.2 の通りとなった。この表は、10個のデータセットについて、学生の満足度平均値と、第1〜3希望に配属された学生数およびその合計について示してある。また下半分は、9クラス（人気1〜3、普通4〜6、不人気7〜9）への配属学生数を示す。

表 2.2: 第1〜3希望配属学生数（10データセットとその平均）【定員25】

データセット	d1	d2	d3	d4	d5	d6	d7	d8	d9	d10	平均
満足度平均	94.3	92.5	95.0	93.3	90.7	93.7	93.7	93.8	93.5	93.5	93.4
第1希望	175	171	182	170	165	175	172	177	174	173	173.4
第2希望	29	26	17	34	28	25	32	21	26	28	26.6
第3希望	0	7	5	0	11	4	0	6	4	3	4.0
計	204	204	204	204	204	204	204	204	204	204	
1	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25.0
2	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25.0
3	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25.0
4	25	25	25	21	25	25	22	25	25	25	24.3
5	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25.0
6	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25.0
7	11	15	16	24	18	19	17	15	19	15	16.9
8	21	21	20	13	17	15	17	16	15	22	17.7
9	22	18	18	21	19	20	23	23	20	17	20.1
計	204	204	204	204	204	204	204	204	204	204	

表2.2 より、8割強の学生が第1希望に配属され、1割強の学生が第2希望に、若干名が第3希望に配属され、第4希望以下に配属された学生は0であることがわかる。9クラスの人気に偏りがあり、人気と不人気クラスには3倍の差のあるデータを用いたが、従来の研究による経験則（総定員は人数の1.1倍程度いれば、おおむね第1希望に配属される）の通り、満足のいく結果が得られた。

参考のため、定員が1名少ない場合と1名多い場合についても結果を示す（表2.3, 2.4）。10のデータセットは全く同じものを用い、定員数だけが異なる。

定員が24の時は、当然のことながら、第3希望に配属される学生が若干多めとなる。定員が26の時は、逆にほぼ全学生が第2希望までに配属されるが、不人気クラス7〜9への配属学生数が他の半分近くまで減るため、クラス間の教員の負担に対する公平性は薄れるかもしれない。

表 2.3: 第 1〜3 希望配属学生数（10 データセットとその平均）【定員 24】

データセット	d1	d2	d3	d4	d5	d6	d7	d8	d9	d10	平均
満足度平均	93.2	91.0	93.5	92.4	89.4	92.3	92.8	92.3	92.1	92.1	92.1
第 1 希望	171	167	177	166	161	170	169	170	169	168	168.8
第 2 希望	31	25	19	37	28	27	33	27	28	30	28.5
第 3 希望	2	12	8	1	15	7	2	7	7	6	6.7
計	204	204	204	204	204	204	204	204	204	204	
1	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24.0
2	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24.0
3	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24.0
4	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24.0
5	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24.0
6	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24.0
7	13	20	19	24	19	19	19	19	23	18	19.3
8	24	22	20	14	19	23	17	17	17	23	19.6
9	23	18	21	22	22	18	24	24	20	19	21.1
計	204	204	204	204	204	204	204	204	204	204	

表 2.4: 第 1〜3 希望配属学生数（10 データセットとその平均）【定員 26】

データセット	d1	d2	d3	d4	d5	d6	d7	d8	d9	d10	平均
満足度平均	95.1	94.0	96.3	94.1	92.1	95.1	94.3	95.1	94.9	94.9	94.6
第 1 希望	179	175	185	174	168	179	175	180	178	178	177.1
第 2 希望	25	27	19	30	30	25	29	23	26	26	26.0
第 3 希望	0	2	0	0	6	0	0	1	0	0	0.9
計	204	204	204	204	204	204	204	204	204	204	
1	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26.0
2	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26.0
3	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26.0
4	24	26	26	23	26	26	19	26	26	26	24.8
5	23	26	26	26	26	26	26	26	26	26	25.7
6	26	26	26	24	26	26	26	26	26	26	25.8
7	10	16	15	22	15	19	16	12	20	13	15.8
8	24	18	19	13	17	13	16	14	10	19	16.3
9	19	14	14	18	16	16	23	22	18	16	17.6
計	204	204	204	204	204	204	204	204	204	204	

以上の結果を総合的に勘案すると、この学生数とクラス数のもとでは、定員は 25 人が妥当と思われる。

2.3 成績補正を行った場合の配属結果

次に、第 1 希望に GPA による成績補正を施した場合をみる。GPA は、平均 2、分散 1 の正規乱数（$N(2,1)$）を 10 セット生成し、各データセットの学生成績とする。このデータは現実の GPA に近い設定としてある。2015 年 4 月時点における 2〜4 年生の GPA 平均と標準偏差は、2 年生（1.98, 0.68)、3 年生 (1.88, 0.67)、4 年生 (1.87, 0.68）である。図 2.1 は、GPA を 0.2 刻みで集計した度数分布を描いたものである。

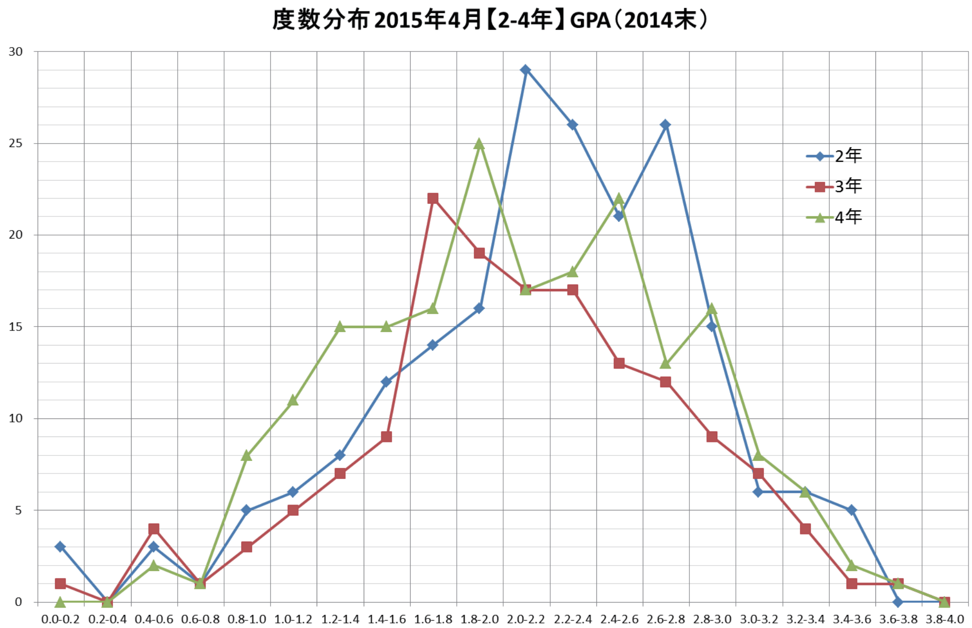

図 2.1: GPA　0.2 刻みの度数分布

GPA による成績の補正は 2 通りのやり方を用いる。第 1 希望だけに補正を行う方法と、第 1〜3 希望全てに重み付け補正を行う方法である。

まず 1 つ目について、第 1 希望の満足度 100 点にのみ GPA を単純に加算することを考える。例えば、GPA が 2.67 の学生なら、彼の第 1 希望の満足度は 102.67 となる。よって、補正前の第 1 希望は全学生が共通の 100 点満点だったのが、補正により 100〜104 の値をとるようになる。成績調整を第 1 希望にのみ行うと、希望が同じならば成績が良い学生が優先されやすくなることがわかっている [9]。単純に加算した場合は、この場合のみ成績補正が意図したとおりに働くからである。例えば、全く同じ希望をもつ 2 人の学生 A, B がいて、それぞれの GPA が 3 と 2 だったとしよう。そして、どちらか一方だけが第 1 希望のクラスに配属できる状況だとしよう。単純に全部に GPA 補正を施してしまうと、それぞれの効用は

学生	第 1 希望	第 2 希望	第 3 希望
A	103	63	33
B	102	62	32

となる。最適化モデルの目的関数 (2.1) は総和最大なので、

$$(A \to \text{第 1 希望}, B \to \text{第 2 希望}) 103 + 62 \;=\; 102 + 63 (B \to \text{第 1 希望}, A \to \text{第 2 希望})$$

となり、どちらを第 1 希望に配属させても同じであるため、成績補正が機能しない。それに比べ、第 1 希望だけに成績補正をすると、それぞれの効用は

学生	第 1 希望	第 2 希望	第 3 希望
A	103	60	30
B	102	60	30

となり、

$$(A \to \text{第 1 希望}, B \to \text{第 2 希望}) 103 + 60 \;>\; 102 + 60 (B \to \text{第 1 希望}, A \to \text{第 2 希望})$$

であって、成績のよい学生 A が第 1 希望に配属される方向に働き、意図したとおりの結果が得られやすいからである。

2 つ目の方法として、単純に加算するのでは無く、希望毎に重みを変えて加算する方法も検討する。ここでは、第 1〜3 希望への補正加算値をそれぞれ、$2 \times GPA,\ 1.5 \times GPA,\ 1 \times GPA$ とする。こうすると、例えば先ほどの例では、補正後の値が

学生	第 1 希望	第 2 希望	第 3 希望
A	106.0	64.5	33.0
B	104.0	63.0	32.0

となり、

$$(A \to \text{第 1 希望}, B \to \text{第 2 希望}) 106.0 + 63.0 \;>\; 104.0 + 64.5 (B \to \text{第 1 希望}, A \to \text{第 2 希望})$$

であって、成績のよい学生 A が第 1 希望に配属される方向に働き、意図したとおりの結果が得られやすい。

2 通りの成績補正法による最適化モデルの配属結果は、それぞれ表 2.5, 2.6 の通りとなった。これらの表は、204 人の学生のうち、補正前と比較して配属先が変更となった学生のみを抜き出して、GPA の上位順に、10 のデータセット全てについて示したものである。

表中の「順」が GPA 順位（1 位〜204 位）、「元→補」が成績補正前の配属先から補正後の配属先（第 1〜3 希望）を意味し、上がった学生と下がった学生を上下の矢印（↑ ↓）で示してある。例えば、表 2.5 の最初の学生について「4 | 9(2) ↑ 1(1) 」と書かれているのは、GPA 順位が 4 位の学生が、補正前の配属先「9(2)」はクラス 9 で、そこがこの学生にとって第 2 希望であったのが、GPA 補正後の配属先「1(1)」は、クラス 1 で第 1 希望であることを意味し、配属クラスの希望が成績補正によってあがった（↑）ことを意味する。

成績補正後と補正前では、クラス毎の配属数は若干入れ替わるが、第 1〜3 希望の人数はほぼ変わらない。配属先が入れ替わった学生の数はおおむね 10〜16 人で、全体の約 5%〜8% である。

表 2.5: 第 1 希望のみ GPA 補正による学生の希望配属先の違い

順	元→補	順	元→補	順	元→補	順	元→補	順	元→補
4	9(2) ↑ 1(1)	9	6(2) ↑ 1(1)	11	5(2) ↑ 1(1)	5	9(2) ↑ 3(1)	1	7(3) ↑ 1(1)
23	5(2) ↑ 1(1)	11	6(2) ↑ 5(1)	25	9(3) ↑ 1(1)	12	7(2) ↑ 1(1)	6	4(2) ↑ 3(1)
40	9(2) ↑ 3(1)	16	7(3) ↑ 5(1)	40	6(2) ↑ 3(1)	22	7(2) ↑ 1(1)	7	6(2) ↑ 3(1)
52	9(2) ↑ 3(1)	50	9(3) ↑ 6(2)	95	1(1) ↓ 8(3)	31	7(2) ↑ 3(1)	21	7(2) ↑ 2(1)
57	5(2) ↑ 6(1)	59	5(1) ↓ 6(2)	106	9(3) ↑ 3(1)	47	8(2) ↑ 3(1)	29	5(2) ↑ 3(1)
62	9(2) ↑ 3(1)	86	9(3) ↑ 1(1)	127	5(2) ↑ 1(1)	53	8(2) ↑ 5(1)	46	4(2) ↑ 1(1)
77	5(2) ↑ 2(1)	111	9(2) ↑ 4(1)	142	3(1) ↓ 9(3)	92	6(2) ↑ 2(1)	48	7(3) ↑ 1(1)
79	4(2) ↑ 2(1)	147	2(2) ↑ 3(1)	148	1(1) ↓ 5(2)	113	2(1) ↓ 7(2)	63	3(1) ↓ 6(2)
95	3(1) ↓ 8(2)	149	8(3) ↑ 5(1)	149	6(2) ↑ 1(1)	117	3(1) ↓ 7(2)	86	2(1) ↓ 9(2)
151	2(1) ↓ 5(2)	154	4(1) ↓ 7(2)	189	1(1) ↓ 6(2)	120	1(1) ↓ 4(2)	125	1(1) ↓ 6(2)
153	1(1) ↓ 4(2)	159	1(1) ↓ 7(3)	198	1(1) ↓ 6(2)	156	3(1) ↓ 4(2)	133	3(1) ↓ 5(2)
154	3(1) ↓ 5(2)	160	1(1) ↓ 2(2)	201	3(1) ↓ 5(2)	157	5(1) ↓ 4(2)	144	1(1) ↓ 9(3)
155	2(1) ↓ 8(2)	182	5(1) ↓ 8(3)			158	3(1) ↓ 4(2)	157	6(2) ↓ 8(3)
165	3(1) ↓ 9(2)	189	5(1) ↓ 7(3)			187	6(2) ↑ 3(1)	168	3(1) ↓ 4(2)
183	1(1) ↓ 5(2)	196	3(1) ↓ 8(3)			196	3(1) ↓ 6(2)	196	1(1) ↓ 4(2)
197	6(1) ↓ 8(2)					203	1(1) ↓ 6(2)		
順	元→補	順	元→補	順	元→補	順	元→補	順	元→補
7	7(3) ↑ 2(1)	4	7(2) ↑ 2(1)	4	8(3) ↑ 3(1)	13	8(3) ↑ 2(1)	1	6(2) ↑ 1(1)
15	4(2) ↑ 2(1)	6	8(2) ↑ 3(1)	12	6(2) ↑ 3(1)	14	8(3) ↑ 3(1)	13	9(2) ↑ 2(1)
16	7(2) ↑ 3(1)	22	5(2) ↑ 3(1)	19	7(2) ↑ 1(1)	50	9(2) ↑ 1(1)	50	8(2) ↑ 5(1)
27	7(2) ↑ 5(1)	72	9(2) ↑ 1(1)	34	6(2) ↑ 3(1)	62	8(2) ↑ 4(1)	58	9(2) ↑ 4(1)
42	9(3) ↑ 2(1)	77	9(2) ↑ 1(1)	46	9(2) ↑ 1(1)	66	1(1) ↓ 7(2)	87	9(2) ↑ 2(1)
45	7(2) ↑ 5(1)	88	9(2) ↑ 1(1)	64	5(2) ↑ 2(1)	71	8(2) ↑ 4(1)	92	5(1) ↓ 8(2)
62	5(1) ↓ 7(2)	113	1(1) ↓ 9(2)	86	3(1) ↓ 5(2)	72	5(2) ↑ 3(1)	95	4(1) ↓ 8(2)
65	2(1) ↓ 8(3)	127	2(1) ↓ 9(2)	123	1(1) ↓ 9(2)	84	9(2) ↑ 4(1)	132	1(1) ↓ 6(2)
86	9(3) ↑ 1(1)	130	1(1) ↓ 9(2)	128	4(2) ↑ 2(1)	112	4(1) ↓ 8(2)	159	2(1) ↓ 7(2)
118	4(2) ↑ 1(1)	132	1(1) ↓ 9(2)	141	3(1) ↓ 6(2)	113	4(1) ↓ 7(2)	182	2(1) ↓ 7(2)
139	1(1) ↓ 4(2)	143	1(1) ↓ 9(2)	150	2(1) ↓ 9(3)	125	5(2) ↑ 2(1)		
150	2(1) ↓ 4(2)	158	6(2) ↑ 1(1)	151	3(1) ↓ 4(2)	128	2(1) ↓ 5(2)		
169	3(1) ↓ 7(2)	172	3(1) ↓ 5(2)	171	1(1) ↓ 9(2)	144	4(1) ↓ 9(2)		
175	2(1) ↓ 8(3)	202	3(1) ↓ 6(2)	197	2(1) ↓ 6(2)	167	3(1) ↓ 7(3)		
195	1(1) ↓ 8(3)					186	3(1) ↓ 5(2)		
202	5(1) ↓ 8(2)					197	2(1) ↓ 9(3)		

補正方法 1（表 2.5）と方法 2（表 2.6）を比較すると、10 作成したデータセットの内、3 つ（データセット d3, d6, d10）について配属が若干異なるが、他は全く同じ結果となった。まず、いずれの成績補正法によっても、成績上位の学生が相対的に成績下位の学生より上位の希望クラスに配属されるよう、組合せが変更されていることがみてとれる。さらに、方法 2 では、第 2・3 希望に対しても補正しているため、そちらでも相対的に成績上位の学生がより上位の希望クラスに配属される。ただし、こちらは第 1 希望ほどたくさん入れ替わりが興るわけではない

表 2.6: 第 1〜3 希望の重み付け GPA 補正による学生の希望配属先の違い

順	元→補	順	元→補	順	元→補	順	元→補	順	元→補
4	9(2) ↑ 1(1)	9	6(2) ↑ 1(1)	11	5(2) ↑ 1(1)	5	9(2) ↑ 3(1)	1	7(3) ↑ 1(1)
23	5(2) ↑ 1(1)	11	6(2) ↑ 5(1)	25	9(3) ↑ 1(1)	12	7(2) ↑ 1(1)	6	4(2) ↑ 3(1)
40	9(2) ↑ 3(1)	16	7(3) ↑ 5(1)	40	6(2) ↑ 3(1)	22	7(2) ↑ 1(1)	7	6(2) ↑ 3(1)
52	9(2) ↑ 3(1)	50	9(3) ↑ 6(2)	68	9(3) ↑ 1(1)	31	7(2) ↑ 3(1)	21	7(2) ↑ 2(1)
57	5(2) ↑ 6(1)	59	5(1) ↓ 6(2)	95	1(1) ↓ 8(3)	47	8(2) ↑ 3(1)	29	5(2) ↑ 3(1)
62	9(2) ↑ 3(1)	86	9(3) ↑ 1(1)	106	9(3) ↑ 3(1)	53	8(2) ↑ 5(1)	46	4(2) ↑ 1(1)
77	5(2) ↑ 2(1)	111	9(2) ↑ 4(1)	139	3(1) ↓ 9(3)	92	6(2) ↑ 2(1)	48	7(3) ↑ 1(1)
79	4(2) ↑ 2(1)	147	2(2) ↑ 3(1)	142	3(1) ↓ 9(3)	113	2(1) ↓ 7(2)	63	3(1) ↓ 6(2)
95	3(1) ↓ 8(2)	149	8(3) ↑ 5(1)	148	1(1) ↓ 5(2)	117	3(1) ↓ 7(2)	86	2(1) ↓ 9(2)
151	2(1) ↓ 5(2)	154	4(1) ↓ 7(2)	149	6(2) ↑ 1(1)	120	1(1) ↓ 4(2)	125	1(1) ↓ 6(2)
153	1(1) ↓ 4(2)	159	1(1) ↓ 7(3)	189	1(1) ↓ 6(2)	156	3(1) ↓ 4(2)	133	3(1) ↓ 5(2)
154	3(1) ↓ 5(2)	160	1(1) ↓ 2(2)	198	1(1) ↓ 6(2)	157	5(1) ↓ 4(2)	144	1(1) ↓ 9(3)
155	2(1) ↓ 8(2)	182	5(1) ↓ 8(3)			158	3(1) ↓ 4(2)	157	6(2) ↓ 8(3)
165	3(1) ↓ 9(2)	189	5(1) ↓ 7(3)			187	6(2) ↑ 3(1)	168	3(1) ↓ 4(2)
183	1(1) ↓ 5(2)	196	3(1) ↓ 8(3)			196	3(1) ↓ 6(2)	196	1(1) ↓ 4(2)
197	6(1) ↓ 8(2)					203	1(1) ↓ 6(2)		
順	元→補	順	元→補	順	元→補	順	元→補	順	元→補
7	7(3) ↑ 2(1)	4	7(2) ↑ 2(1)	4	8(3) ↑ 3(1)	13	8(3) ↑ 2(1)	1	6(2) ↑ 1(1)
15	4(2) ↑ 2(1)	6	8(2) ↑ 3(1)	12	6(2) ↑ 3(1)	14	8(3) ↑ 3(1)	13	9(2) ↑ 2(1)
16	7(2) ↑ 3(1)	22	5(2) ↑ 3(1)	19	7(2) ↑ 1(1)	50	9(2) ↑ 1(1)	50	8(2) ↑ 5(1)
19	2(1) ↓ 4(2)	72	9(2) ↑ 1(1)	34	6(2) ↑ 3(1)	62	8(2) ↑ 4(1)	58	9(2) ↑ 4(1)
27	7(2) ↑ 5(1)	77	9(2) ↑ 1(1)	46	9(2) ↑ 1(1)	66	1(1) ↓ 7(2)	87	9(2) ↑ 2(1)
42	9(3) ↑ 2(1)	88	9(2) ↑ 1(1)	64	5(2) ↑ 2(1)	71	8(2) ↑ 4(1)	92	5(1) ↓ 8(2)
45	7(2) ↑ 5(1)	113	1(1) ↓ 9(2)	86	3(1) ↓ 5(2)	72	5(2) ↑ 3(1)	95	4(1) ↓ 8(2)
62	5(1) ↓ 7(2)	127	2(1) ↓ 9(2)	123	1(1) ↓ 9(2)	84	9(2) ↑ 4(1)	117	1(1) ↓ 6(2)
86	9(3) ↑ 1(1)	130	1(1) ↓ 9(2)	128	4(2) ↑ 2(1)	112	4(1) ↓ 8(2)	132	1(1) ↓ 6(2)
118	4(2) ↑ 1(1)	132	1(1) ↓ 9(2)	141	3(1) ↓ 6(2)	113	4(1) ↓ 7(2)	156	7(3) ↑ 1(1)
145	1(1) ↓ 9(3)	143	1(1) ↓ 9(2)	150	2(1) ↓ 9(3)	125	5(2) ↑ 2(1)	159	2(1) ↓ 7(2)
150	2(1) ↓ 4(2)	158	6(2) ↑ 1(1)	151	3(1) ↓ 4(2)	128	2(1) ↓ 5(2)	182	2(1) ↓ 7(2)
169	3(1) ↓ 7(2)	172	3(1) ↓ 5(2)	171	1(1) ↓ 9(2)	144	4(1) ↓ 9(2)	199	3(1) ↓ 9(3)
175	2(1) ↓ 8(3)	202	3(1) ↓ 6(2)	197	2(1) ↓ 6(2)	167	3(1) ↓ 7(3)	203	6(2) ↑ 3(1)
195	1(1) ↓ 8(3)					186	3(1) ↓ 5(2)		
202	5(1) ↓ 8(2)					197	2(1) ↓ 9(3)		

こともわかった。

よって、現実の問題を解く際に、補正 1・2 どちらを用いても大きな違いはなく、公平性や成績優遇の程度をどう考えるかによって、どちらを採用するかを検討すべきであろう。あくまで成績を重視するのであれば、補正 2 を用いるべきであり、第 1 希望という学生の最大希望に対してより重きを置くのであれば、第 1 希望のみに成績補正を施す補正 1 を採用するとよい。

また、成績補正をしない、という標準の最適化モデルは、完全に運に左右される点で多かれ少なかれ不公平感を学生にもたらす。それに対し成績補正モデルは、学生に成績を加味して欲しいという欲求があり、かつ、その方が抽選対象となる人気クラスの学生間の相対的成績上位学生には公平（自分のこれまでの努力・成果が報われる、見て貰えたことによる満足感）にうつり、相対的に中位〜下位の学生は仕方が無いという点で不公平感が和らぐ効果が期待できる。従って、成績補正をしないという標準モデルは用いるべきではないと思う。

GPA による成績補正を行わない場合のデータと行った場合（補正 1・2）の結果について、第 1〜第 3 希望のどこに配属されたかを図示したものが図 2.2〜2.4 である。データは 10 セット全てを同じ図内に描画してあるので、図中には 2040 個の点があり、各点が各学生に対応する（204 人× 10 データセット）。横軸が GPA で、左から右に向かって 4〜0 を示す。すなわち、左に描画されている点ほど GPA 値が高い成績の良い学生であることを意味する。縦軸の 1,2,3 が、各学生の第 1、第 2、第 3 希望に対応し、最適化モデルによって配属されたクラスがおのおのの学生の何番目の希望クラスだったかを示す。

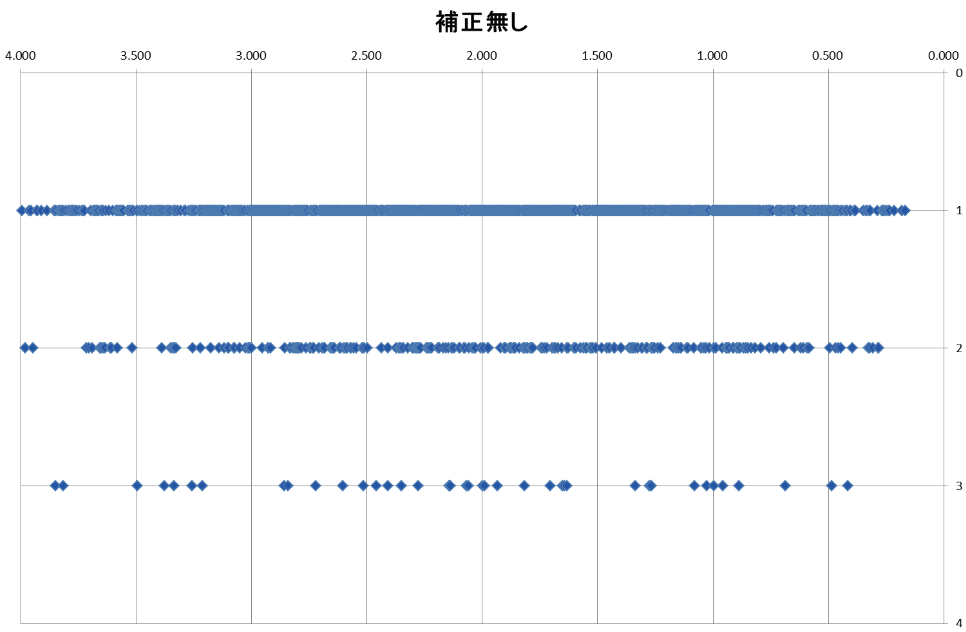

図 2.2: 補正無しデータによる配属結果

表 2.2 で見たとおり、定員 25 人（総定員が総学生数の約 1.1 倍）の場合、最適化モデルによって、平均して全体の約 85%の学生が第 1 希望に配属されており、約 13%の学生が第 2 希望、残りが第 3 希望に配属されるが、成績補正をした場合はいずれも、しない場合より、成績上位者がより高い希望のクラスに配属されていることがわかる（図 2.2 と 図 2.3,2.4 の比較）。また、図 2.3 と 図 2.4 の比較からは、今回作成したデータセットについては、第 1 希望だけに成績補正をするより、第 1〜3 希望すべてに重み付け補正をした場合の方が、若干ではあるが、成績優秀者がより高い希望のクラスに配属されていることがみてとれ、表 2.5, 2.6 の比較結果と同様の結果が図で視覚的に描画されていることがわかる。

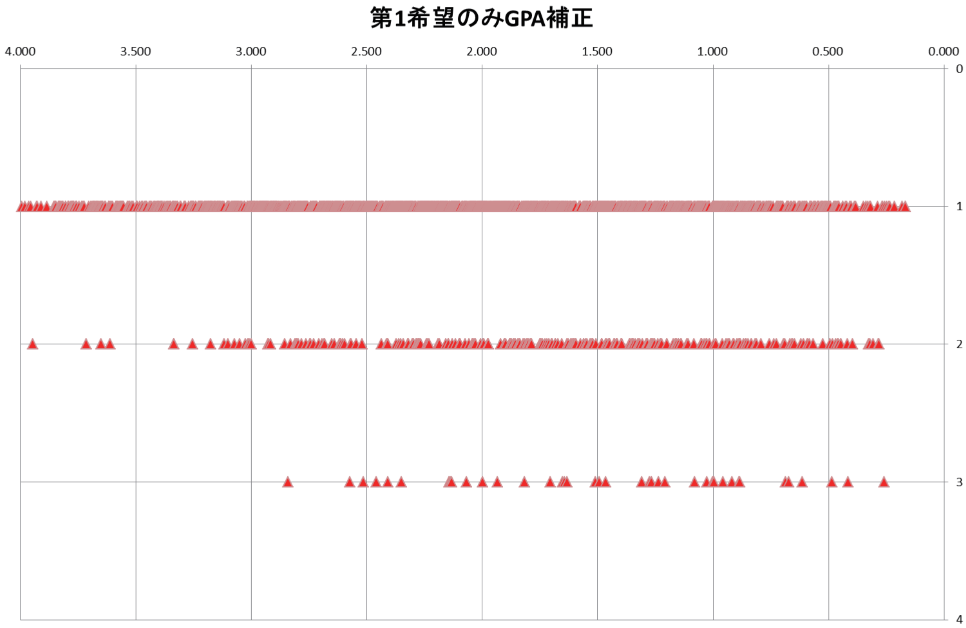

図 2.3: 第 1 希望のみ GPA 成績補正データによる配属結果

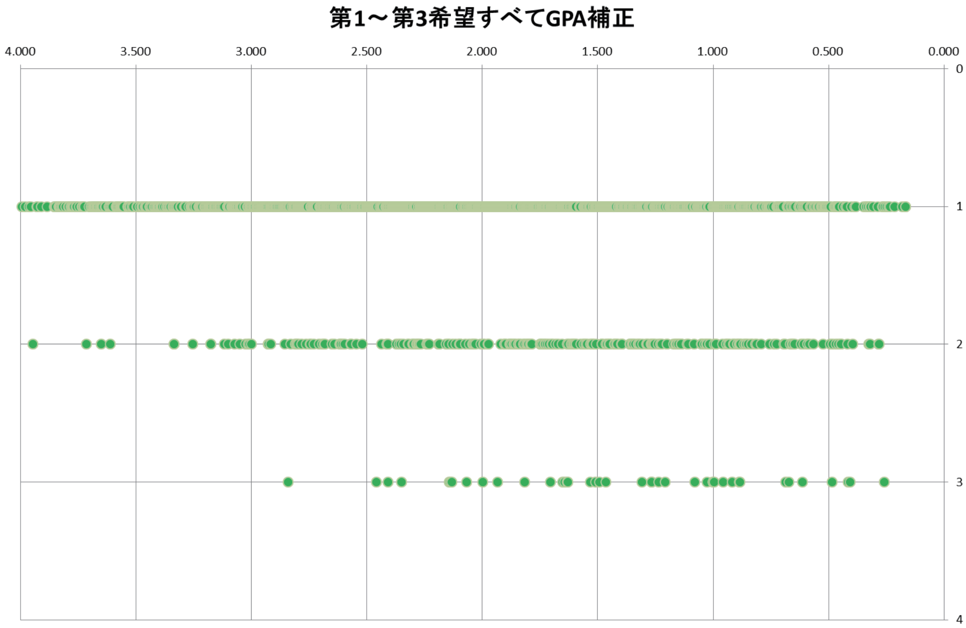

図 2.4: 第 1～3 希望すべてへの重み付け GPA 成績補正データによる配属結果

2.4 成績補正時の最適化モデルの解の性質、DA 解との比較

はじめにで述べたとおり、GPA による成績補正はクラス側からの選好に該当する。このとき、最適化モデルによる解は、パレート最適性は満たすが、安定性と耐戦略性は持たない。

性質	パレート最適性	安定性	耐戦略性
最適化モデル	◯	×	×

例えば、二人の学生 A, B がいて、GPA とクラス $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ への選好が次の通りだったとする。

学生	GPA	第 1 希望	第 2 希望	第 3 希望
A	3.0	δ	β	α
		106.0	64.5	33.0
B	2.0	β	γ	α
		104.0	63.0	32.0

最適化モデルで最適解 (A, α), (B, β) が得られたとする。このとき (A, β) はブロッキング・ペアであるが、これにもとづき A, B の配属先 α, β を交換し、他は全く同じ解を考えると、

最適解		別解
$(A, \alpha), (B, \beta)$		$(A, \beta), (B, \alpha)$
$33.0 + 104.0 = \underline{137.0}$	$>$	$\underline{96.5} = 64.5 + 32.0$

であり、総和最大の目的関数のもとでは、別解が最適解として出力されることはない。すなわち、最適化モデルが出す最適解は安定性をもたない。

またこのとき、学生 A が第 3 希望 α に配属されるなら、第 2 希望 β に配属される方がましと思い、次のような嘘の申告（第 1 希望と第 2 希望を入れ替える）をしたとしよう。

学生	GPA	第 1 希望	第 2 希望	第 3 希望
A	3.0	$\boldsymbol{\beta}$(嘘)	$\boldsymbol{\delta}$(嘘)	α
		106.0	64.5	33.0
B	2.0	β	γ	α
		104.0	63.0	32.0

すると、

もとの最適解		A が嘘をついた時の最適解
$(A, \alpha), (B, \beta)$		$(A, \beta), (B, \alpha)$
$33.0 + 104.0 = \underline{137.0}$	$<$	$\underline{138.0} = \mathbf{106.0} + 32.0$

となり、学生 A は嘘をつくことによって得をする。すなわち、最適化モデルが出す最適解に耐戦略性はない。

これは順序尺度（第 1,2,3 希望）から間隔尺度（100 点,60 点,30 点など）への変換の仕方によらない。先の例と同じ状況で、それぞれの評価値（満足度）を次の通りとしよう。

学生	GPA	第 1 希望	第 2 希望	第 3 希望
A	a_G	δ	β	α
		a_1	a_2	a_3
B	b_G	β	γ	α
		b_1	b_2	b_3

学生A,Bの評価値$a_1, \cdots, a_3, b_1, \cdots, b_3$はGPA補正後のものとすると、その大小関係は$a_1 > b_1 > a_2 > b_2 > a_3 > b_3$となる。このことに注意すると、

最適解		別解
$(A,\alpha),(B,\beta)$		$(A,\beta),(B,\alpha)$
$a_3 + b_1$	$>$	$a_2 + b_3$

であり、総和最大の目的関数のもとでは、別解が最適解として出力されることはない。成績補正をしない最適化モデルを考えた場合、評価値の大小関係は$a_1 = b_1 > a_2 = b_2 > a_3 = b_3$となることに注意すれば、同様の結論が得られる。すなわち、最適化モデルが出す最適解は成績補正のあるなしに関わらず、かつ、順序尺度から間隔尺度への変換の仕方によらず、安定性をもたない[‡‡]。

同様に、Aが嘘をついた状況を考えると、

学生	GPA	第1希望	第2希望	第3希望
A	a_G	$\boldsymbol{\beta}$(嘘)	$\boldsymbol{\delta}$(嘘)	α
		$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	a_3
B	b_G	β	γ	α
		b_1	b_2	b_3

となり、$\bar{a}_1 > b_1 > \bar{a}_2 > b_2 > a_3 > b_3$および成績補正の仕方から$\bar{a}_1 - b_1 > a_3 - b_3$が成り立つので、

もとの最適解		Aが嘘をついた時の最適解
$(A,\alpha),(B,\beta)$		$(A,\beta),(B,\alpha)$
$a_3 + b_1$	$<$	$\bar{a}_1 + b_3$

となって、やはり学生Aは嘘をついた方が得をするため、耐戦略性をもたない。即ち、本研究における成績補正1・2を施した最適化モデルは耐戦略性をもたない。標準的な最適化モデルの場合は、$\bar{a}_1 = b_1 > \bar{a}_2 = b_2 > a_3 = b_3$から、両方の解の目的関数が等価となるため、得をするかどうかは、この例の解の場合、どちらの解がアルゴリズムに選ばれるかに依存する。

安定性も耐戦略性も持たないことが分かっていながら、それでもDAではなく、最適化モデルを用いる意義はあるのか、という当然の問に対する答えはyesである。DAでは満たさないパレート最適性を最適化モデルがもつというだけではなく、最適化モデルによる配属は、DAにはなしえない良い結果をもたらす。それは、これまでに他大学で行われてきた結果や本研究のシミュレーション結果にあるとおり、総定員を学生の1.1倍程度用意すれば、殆どの学生は第2希望までにおさまり、全ての学生が（よほどの偏りが無い限り）第3希望以内に入る、という点である。

[‡‡]この結論は、順序尺度から間隔尺度へ変換する際に、第1〜3希望の評価値（満足度）を全員固定にした最適化モデルの場合であることに注意。変換時に満足度を学生に申告させたり、第1希望を複数指定して良いなどの、本文で言及した大小関係が成り立たない最適化モデルにおいては、この限りでは無い

DA での配属結果は安定性は保障されるが、第 4 希望以降のクラスに配属される学生が出てくるという、学生にとっては到底受け入れ難い結果が出てくる。実際に同じデータセットで、クラス側の選好を全クラス共通の GPA 順（全順序）で実施した場合を計算してみると、結果は表 2.7, 2.8 の通りとなる。

表 2.7: DA による配属結果 1：学生が配属されたクラスの希望順位

学生希望	d1	d2	d3	d4	d5	d6	d7	d8	d9	d10	平均
第 1 希望	171	164	177	165	151	171	166	166	166	166	166.3
第 2 希望	18	15	7	20	29	14	16	26	18	13	17.6
第 3 希望	6	14	9	9	7	8	13	3	9	7	8.5
第 4 希望	5	5	4	5	11	7	5	6	6	7	6.1
第 5 希望	4	4	5	3	4	3	3	2	3	8	3.9
第 6 希望	0	2	0	2	1	1	1	1	2	2	1.2
第 7 希望	0	0	2	0	1	0	0	0	0	1	0.4
第 8 希望	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0
第 9 希望	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0
計	204	204	204	204	204	204	204	204	204	204	
第 4〜9 希望計	9	11	11	10	17	11	9	9	11	18	11.6

表 2.8: DA による配属結果 2：各クラスの配属学生数（定員 25 人）

クラス	d1	d2	d3	d4	d5	d6	d7	d8	d9	d10	平均
1	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25.0
2	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25.0
3	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25.0
4	25	25	25	25	25	25	21	25	25	25	24.6
5	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25.0
6	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25.0
7	12	15	12	25	17	19	18	16	17	19	17.0
8	24	22	21	9	17	19	16	16	18	18	18.0
9	18	17	21	20	20	16	24	22	19	17	19.4
計	204	204	204	204	204	204	204	204	204	204	

表 2.7 は、10 個のデータセットについて、各学生が配属されたクラスが、その学生にとって第何希望だったのかの一覧表である。横軸がデータセット、縦軸の 1〜9 が第 1 希望〜第 9 希望を示し、最後の 2 行はそれぞれ、学生数合計と第 4〜第 9 希望に配属された学生数合計を示す。例えば、データセット d1 は、第 1 希望に配属された学生が 171 名、第 2 希望が 18 名、第 3 希望が 6 名、第 4 希望 5 名、第 5 希望 4 名で第 6〜9 希望へ配属された学生は 0 名ということであり、第 4〜5 希望に配属されてしまった学生が合計で 9 名もいる。データによっては、配属先が第 7 希望にまで及んでいる点に注意されたい（データセット d3、d5、d10）。平均すると 11.6 人が第 4〜7 希望にまわされることになる。学生としては、この結果は到底受け入れ難いであろう。これに対し、最適化による配属では全学生 204 名が第 3 希望までにおさまるのは既に見たとおり

である（表 2.2）。

表 2.8 は、横軸がデータセット、縦軸がクラス 1〜9 を意味し、数値はそれぞれのクラスに配属された学生数を示す。人気 3 クラス（1,2,3）、普通 3 クラス（4,5,6）の 6 クラスの定員は、データセット d7 のクラス 4 を除いて充足されている。最適化モデルの結果（表 2.2）では同 6 クラスの定員は、データセット d4,d7 のクラス 4 を除いて充足されている。

学生の選好において全順序が容易に得られないことを前提に、順位がつけられるクラスだけを選好する、すなわち例えば、希望上位（第 1〜3 希望は必須）と希望下位（このクラスは絶対行きたくないなどがあるなら自由に指定）を申告させ、得られた半順序から DA を用いる方法も提案されている [4]。希望下位を選ばせる点が DA としては特徴的で面白いが、第 4 希望以降に配属される学生出る点は変わらない。この方法に比較すると、最適化モデルは第 4 希望以下は全て希望下位と指定していることに相当する点に注意されたい。

3 おわりに

本研究では、定員がそこそこ多い、学生数に対して比較的少ない数のクラスへのクラス編成について、各学生の希望がどの程度かなうかについて、現実に即したデータを生成し、最適化モデルによるシミュレーションを行った。総定員数については、総学生数の 1.1 倍程度がよい、という先行研究の経験則がうまくいくことが確認された。また、本研究の設定のもとでも先行研究 [9] と同様、成績補正により組合せの運だけで決まる配属先が、成績上位者に相対的に優位に働くことも確認できた。

成績補正については、相対的に成績上位の学生が、絶対に、下位の学生より希望の高いクラスに配属される保証があるわけではないことには注意が必要である。定員内で、全学生の希望の組合せを最大限満たすように最適化モデルが組合せを決定するからである。例えば、二人の学生 A, B がいて、GPA とクラス $\alpha, \beta, \delta, \gamma, \epsilon$ への選好が次の通りだったとする。

学生	GPA	第 1 希望	第 2 希望	第 3 希望
A	3.0	α	β	γ
		106.0	64.5	33.0
B	2.0	α	δ	ϵ
		104.0	63.0	32.0

2 人は第 1 希望が同じクラス α で、第 2、3 希望は全て異なる。定員 25 人に対し、A,B より成績の良い学生が 24 人いて皆クラス α を第 1 希望とし、A,B のどちらかは（成績評価値順により）第 1 希望には入れないとする。また、学生 A の第 2 希望クラス β へは、学生 A は充分入ることができるが、学生 B の第 2 希望クラス δ には、B より成績の良い学生や第 1 希望の学生が定員以上いて B は δ には入れないとする。この状況で考えられる解は $(A, \alpha), (B, \epsilon)$ か $(A, \beta), (B, \alpha)$ の 2 つであるが、

解 1		解 2
$(A, \alpha), (B, \epsilon)$		$(A, \beta), (B, \alpha)$
$106.0 + 32.0 = \underline{138.0}$	$<$	$\underline{168.5} = 64.5 + 104.0$

より、総和最大の目的のもとでは解 2 が選ばれる。即ち、第 1 希望が同じ 2 人の学生 A,B で、相対的に成績優秀な A が第 1 希望に入れず、相対的に成績の悪い B が第 1 希望に入ることとなる。ただ、このような運の悪い希望の組合せとなればそういう結果となるということであって、そうでなければ順当に成績上位の学生が優位であるし、第 1〜3 希望まで全く同じ希望を持つ学生が 2 人いた場合は、成績上位の学生が「必ず」優先される。注意しなければならないのは、最適化モデルが悪いからこうなるのではなく、「ある学生にとって運が悪い希望の組合せとなる問題例が与えられた」からこうなるということである。

メカニズム・デザインの分野では、DA が良い性質を多く持つ手法として推奨され、米国の学校選択制や、米国・カナダ・日本における研修医制度におけるマッチング [17, 16, 18] などで実際に使われている。これらは、規模が大きい問題（申請側が数万人、受入れ側が数十〜数百など）であり、学校選択制についてはここで取り上げなかった各種の特殊な制約（主に学校側の学生に対する優先順位の付け方について）があるため上手くいくのであろうし、上手くいくとは言っても希望した学校全てに断られて「受け入れ不可」という生徒は出るようである。

大学内のクラス編成などの小規模の問題（申請側が数百、受入れ側が十数など）では、本来受け入れ不可とされるクラスに配属される学生が出てしまう DA より、確実に第 3 希望までに所属させる最適化モデルを用いる方が良い。さらに、標準的な最適化モデル（配属先が偶然や運によって決まる）ではなく、学生が公平性に対する満足感・納得感を感じられるであろう成績を考慮する最適化モデルを用いる方が良い。

耐戦略性や安定性は大事な概念ではあるが、神様の目線（全学生の申請状況と成績順およびそれらによって得られる安定解）をもたなければ個々の学生が「どのように嘘をつけば自分が得をするかを把握するのは困難」なため、局所的に把握でき有利にできることが事前にわかる場合を除き、耐戦略性を持たないことに神経をとがらせることはないと思われる。安定性についても、クラス編成問題に限って言えば、クラス側が学生へよびかけを行ったり、学生からのラブコールに答える、というような不正は考え難いため、ブロッキングペアがあったからと言って、それがその通り実現することは考え難く、こちらもそれほど神経質になることはない。それよりも、全学生が第 3 希望までに配属される、ということの方が余程大事である。

ただし、異なるインスタンスに対しては細かな調整が必要で、対象の学生やクラスがどのような状況なのかによって、最適化モデルを適用する際には慎重に行い、採用後も結果を検討して改良を模索し続けることが必要である。本研究の成果は、現実の問題に適用予定であるが、結果の考察・公平性の確保などに注意しながら用いられねばならない。

なお、最適化モデルを用いる際に、順序尺度から間隔尺度への変換が伴うが、その変換を上手くすることによって、安定性か耐戦略性のどちらかをもつ最適解を得られる最適化モデルを構築する方法があるのかどうかは未解決である（本文で言及したとおり、最適化モデルに限らず、両方の性質をもつモデルはないことは証明されている)。

謝辞

本研究の実施にあたり，教育支援課栗田氏より GPA に関する情報を整理し提供していただきました．ここに謝意を表します．なお，情報取得の際には学生個人が特定されない形でなされ

ています.

参考文献

[1] D. Gale and L.S. Shapley, “College admissions and the stability of marriage,” *American Mathematical Monthly*, Vol.69 (1962) 9-15.

[2] 今野浩 『実践 数理決定法』 日科技連 (1997).

[3] 今野浩, 朱: 最適クラス編成問題－東京工業大学におけるケーススタディー, オペレーションズ・リサーチ 36 (1991) 85-89.

[4] 片岡 達, 茨木 俊秀: 研究室配属のための一方式の提案とその数理的考察, TORSJ Vol.51 (2008) 71-93.

[5] 川村和誉, 久保幹雄: 研究室割り当てシステムの開発. 日本 OR 学会 2005 年春季研究発表会アブストラクト集, (2005), 98—99.

[6] 坂和正敏 『離散システムの最適化』森北出版 (2000).

[7] 根本俊男: 安定結婚問題, 『応用数理計画ハンドブック』 14.2 節 (2002) 779-830.

[8] 堀田敬介: 学生満足度の観点によるゼミ配属法の定量的比較, 情報研究 35 (2006) 367-378.

[9] 堀田敬介: 成績を考慮したゼミ配属法の比較と提案, 情報研究 44 (2011) 59-73.

[10] 水島拓也: 複数ユニット割当問題における虚偽申告の防止, 京都大学 特別研究報告書 (2013).

[11] 宮崎修一: 安定マッチング問題に対する近似アルゴリズム, RAMP シンポジウム論文集 25 (2013) 30-45.

[12] 八木英一郎: ２つの指標によるクラス編成問題, 東海大学紀要政治経済学部 (2010) 229-238.

[13] 安田洋祐 編著 『学校選択制のデザイン』 NTT 出版 (2010).

[14] 安田洋祐: マッチング・マーケットデザインの理論と実践, RAMP シンポジウム論文集 25 (2013) 1-16.

[15] 横尾真: 戦略的操作不可能な下限制約付きマッチング, RAMP シンポジウム論文集 25 (2013) 17-29.

[16] Canadian Resident Matching Service, http://www.carms.ca/.

[17] National Resident Matching Program, http://www.nrmp.org/.

[18] 医師臨床研修マッチング協議会, http://www.jrmp.jp/.

The use of an optimization technique to solve student sectioning problems

Keisuke Hotta
Faculty of Business Administration, Bunkyo University
khotta@shonan.bunkyo.ac.jp
Recieved: 30 April 2015 / Accepted: 25 May 2015

Abstract

The focus of this study is to examine typical student sectioning problems. All students have their preferences to each section. The goal is to make an assignment decision to comply with their wishes as much as possible. To solve this problem, various approaches and algorithms have been proposed and discussed. In the field of mechanism design, both the deferred acceptance system and the top trading cycles system are considered to be a good method. It is studied well whether a solution provided by each method has desirable properties such as Pareto optimality, stability and strategy-proofness. In contrast, approaches using an optimization model are also studied. Studies of the model mainly focus on how to express student preferences in order to get a desirable solution. This study shows that the optimization approach is superior to the deferred acceptance to deal with some problems of student sectioning at a university. In addition, this research will clarify whether the solution by the optimization model has the desirable properties such as stability and strategy-proofness.

Keyword: student sectioning problem, optimization, Boston public schools system, deferred acceptance system, top trading cycles system, Gale-Shapley algorithm, mechanism design, Pareto optimality, stability, strategy-proofness

Faculty of Business Administration, Bunkyo University
1100 Namegaya, Chigasaki, Kanagawa 253-8550, JAPAN
Tel +81-467-53-2111, Fax +81-467-54-3734
http://www.bunkyo.ac.jp/faculty/business