

選挙区画定問題の解法

堀 田 敬 介

概要

選挙区制の選挙を実施するためには、選挙区を画定しなければならない。憲法や法律などその国の指針にもとづき、適切な選挙区を構成することは、一般に組合せ最適化問題となる。日本では、選挙区間の一票の較差が問題となることが多く、この指標にもとづいた評価をするためには、近似解ではなく限界値を与える最適解を求めることが必要となる。ところが、事例によっては、この問題の最適解の求解は非常に困難を伴う。本論文は、根本・堀田 [38, 39] によって確立された最適解の求解法について、特に最小比最適解をどのように簡便に求めることができるのか、およびその計算複雑度解析について詳細をまとめたものである。

キーワード： 議席配分問題，区割画定問題，一票の最大較差，最小比最適化，計算量，0-1 混合整数計画法，グラフ分割，連結成分分解

(投稿日 2019 年 1 月 31 日)

(受理日 2019 年 2 月 12 日)

文教大学経営学部

〒 253-8550 神奈川県茅ヶ崎市行谷 1100

Tel 0467-53-2111(代表) Fax 0467-54-3734

<http://www.bunkyo.ac.jp/faculty/business/>

1 選挙区を画定するまで

選挙区を画定する作業は、定数配分問題（議席配分問題）と区割画定問題のどちらか、あるいは両方を解く問題となる。定数配分問題とは、与えられた総定数（総議席数）をあらかじめ定められた複数の対象に、その対象の属性に応じて割り当てる問題である。例えば、衆議院議員比例代表制の場合、176 議席を 11 比例ブロックに、各ブロックの人口¹ に比例して割り当てる。各対象に割り当てる数値はその性質上整数にしなければならないが、比例値は通常整数にはならないので、何らかの方法で数値を整数に丸める必要が生じ、ここにこの問題の根本的な難しさが潜む。一方、区割画定問題とは、あらかじめ定められた小地域を複数組み合わせ、条件に応じた議席を持つ選挙区を構成する問題である。例えば、衆議院小選挙区制において、各都道府県に割り当てられた議席数にもとづき、都道府県内の市区町村を所与の小地域として、人口がほぼ等しくなるように、選挙区を決定する。

なお、衆議院議員小選挙区制のように、まず定数配分問題（289 議席を 47 都道府県に人口に比例して割り当てる）を解き、次に、都道府県毎に区割画定問題を解く、2つの問題を段階的に解く選挙制度や、都道府県議会大選挙区制や合区を考慮する参議院議員選挙区制のように、市区町村や都道府県で選挙区を構成することと、その選挙区の配分議席数を同時に決定する必要がある場合もある。代表的な例を表 1.1 に載せる²。

¹ 「有権者」を使う場合もある。また、同じ人口でも外国人を排除し「自国民に限る」場合もある（cf. [61]）。「外国人」「自国民」の定義はそれぞれの制度による

² 日本の衆議院は小選挙区比例代表並立制であり総定数は 465 議席、ドイツ連邦議会は小選挙区比例代表併用制であり総定数は 598 議席、イギリス庶民院は 2020 年以降 600 議席となる予定、また 4 地域とはイングランド・ウェイルズ・スコットランド・北アイルランドのこと

表 1.1: 定数配分問題と区割画定問題の例

定数配分問題の例

選挙	対象議会 選挙制度	総定数	配分対象	属性条件
国政	参議院 選挙区制	73 議席	47 都道府県	人口比例
国政	衆議院 比例代表制	176 議席	11 比例ブロック	人口比例
国政	衆議院 小選挙区制	289 議席	47 都道府県	人口比例
国政	ドイツ連邦議会 小選挙区制	299 議席	3 市+13 州	人口比例
国政	アメリカ下院 小選挙区制	435 議席	50 州	人口比例
国政	イギリス庶民院 小選挙区制	650 議席	4 地域	有権者比例
地方	指定都市議会 大選挙区制	各指定都市議席	区	人口比例

区割画定問題の例

選挙	対象議会 選挙制度	対象地域	構成小地域	属性条件
国政	衆議院 小選挙区制	各都道府県	市区町村	人口比例
国政	ドイツ連邦議会 小選挙区制	各州	市町村	人口比例
国政	アメリカ下院 小選挙区制	各州	-	人口比例
国政	イギリス庶民院 小選挙区制	各 4 地域	自治体境界	有権者比例

定数配分と区割画定を同時に考慮する必要がある問題の例

選挙	対象議会 選挙制度	対象地域	構成小地域	属性条件
地方	各都道府県議会 大選挙区制	各都道府県	市町村	人口比例
国政	参議院 選挙区制 (合区考慮)	日本	都道府県	人口比例

それぞれの問題において、議席の割り当て方法や区割の構成の仕方は複数の答えが考えられるので、何らかの評価値をもってその解の善し悪しを決定する必要がある。日本では、日本国憲法第 14 条の法の下での平等の精神にもとづき、各選挙区ペアの一票の較差を最重要の評価値として用いる (cf. [61])。

定数配分問題に対しては、政治学、法学、OR や公共政策等、様々な観点から取り組まれ、過去 200 年以上にわたり、様々な手法の提案や、各手法の性質など、多くの知見が得られている (cf. [1],[77])。一方、区割画定問題に関しての数理的な知見も 2003 年以降、多く得られている (cf. [54, 55, 38, 39, 40, 42, 43, 18, 19, 21, 23, 27])。それ以前まで、区割画定問題に対する数理的な取り組みが少ない原因は大きく 2 つ考えられる。1 つは、アルゴリズムの分野では、自身の作成した近似解法やヒューリスティック等の性能評価の一例としてとりあげた側面が大きいので、現行区割よりよい実行可能解を 1 つ見つけた、というだけで終わらせているということと、法律や政治的条件等が十分考慮されておらず、データの取り方が不正確で不十分であることである。最適解を求めねばならない政治的意義をきちんと示したのは坂口・和田 [54, 55] である。もう 1 つは、最もシンプルな条件でも $\mathcal{NP}$ -困難なモデルとして定式化されるため、厳密解法で最適解を導出するのがインスタンスによっては極めて困難な点である (cf. [54, 55])。様々な工夫を用いて、衆議院小選挙区制 (当時 300 選挙区) の厳密解を全てはじめて示したのは根本・堀田 [38, 39] である。

区割画定問題に対する古典的なモデルは (飛び地を許さないことを条件とした) 集合分割問題として定式化することである [30]。ただし、この問題は $\mathcal{NP}$ -困難であり、現実のデータをそ

のまま適用して最適解を導出するのは困難であった。既存研究には、最小 m 全域森問題 [74, 75] やグラフ頂点分割問題 [63] としてのモデル化がある。いずれも分枝限定法で最適解導出を試みているが、高々5選挙区までが限界であり、かつ選挙区の中心市区郡を事前に指定するなど最適性の保証がない。ニューラルネットワークを利用した取り組み [53] も近似解法である。

アメリカにおいては、アルゴリズムやコンピュータを利用、あるいは利用を想定した区割画定問題への取り組みが1960年代より行われている [6, 7, 8, 12, 13, 26, 32, 36, 37, 65, 73, 76]。60年代、70年代の研究については、その概説とともに、区割画定において重要とみなされる人口統計的規準、形状的規準および政治的規準や、研究結果のまとめと課題、問題点について言及されている [72] が、ほとんどの解法は近似解法であり、数少ない厳密解法では40~50程度の市区郡から5~7選挙区をつくる小規模の問題しか解けていない [7]。アメリカにおいて重要な形状の基準であるコンパクト性をうまく利用した研究がある [2, 33] が、区割線をある程度自由に設定可能という独特の制度を利用している。カナダでは、複数の規準の重み付け和を関数としてタブサーチで解くというアイデア [3] があるが、近似解である。その他、ニュージーランド [9] など各国で取り組まれているが、問題設定が異なるために同じモデルとして捉えることはできない。また、いずれも例として1~数州における区割を解いてみたという程度であり、その国の全ての州の区割に取り組んだという研究はない。ドイツ連邦議会小選挙区制の解を求めた例があるが [11]、細かい市町村は、地域のつながり等を考慮してあらかじめ中程度のサイズにした後、ヒューリスティックで組み合わせ的に求めている。また、目的関数を様々な関数で評価可能と述べるのみで、政治的な意義については考慮されていない。

いずれにしろ、政治的規準や目的が各国において異なるので、研究結果をそのまま日本の区割作成に適用できない。また、他国と異なり、日本では一票の最大較差が2倍を超えていることをどう解消するか、というのが最大の懸案事項であるため、全てについて厳密解を求めることが求められる。

根本・堀田 [38, 39] が、解くのが困難だった区割画定問題に対し、考えられる数理モデルから2つの有効な定式化を提案し、様々な工夫を用いて全小選挙区区割を導出して以降、その結果や最適化モデルを駆使した様々な分析が行われ、多くの知見が得られた。人口動態の変化や行政界の変更、総定数変化が一票の較差に及ぼす影響 [40, 42, 43]、市区郡の分割法の影響 [14]、議席配分の最適化と既存議席配分法との定量的比較 [15, 16, 20, 22]、第 k 最適解からの実行可能解の列挙法とその解の特徴化による選挙区画定作業支援 [16, 19]、フロンティア法による列挙の高速化とZDDを用いた膨大な解のコンパクト保持 [27]、衆議院・参議院の合区の評価 [17, 18, 23]、大選挙区（複数人選出選挙制度）への拡張 [21] などである。

本論文は、根本・堀田による最適化モデル [38, 39] で実問題を解く際の工夫、特に、最適性の保証、すなわち最小比最適解をどのように求めるのかとその反復回数についてまとめたものである。本論文の構成は以下のようになっている。まず、第2節で議席配分に対する最適化モデルとその結果について述べる。次に、第3節で区割画定に対する最適化モデルと、最適解導出の工夫、最適性、反復回数、第 k 最適解（列挙）、選挙区割の類似性測定法とその結果について述べる。最後に、まとめと今後の課題について述べる。

2 定数配分問題の解法

所与の整数値を，定められたいくつかの部分にその属性に比例して分割する定数配分問題を考える．ただし，分割された数値も整数にするという条件が付く．国政選挙（衆議院小選挙区制）では，所与の総議席数（整数値）を 47 の都道府県にその属性（人口）に比例して配分する問題となるし，国政選挙（衆議院比例代表制）では，所与の総議席数（整数値）を 11 の地域にその属性（人口）に比例して配分する問題となり，国政選挙（参議院比例代表）では，所与の総議席数（整数値）を各党にその属性（獲得票数）に比例して配分する問題となる．属性の比例値が整数になることは稀なため，整数に丸める操作によって多くの配分法が考案されている．

2.1 既存の定数配分法

よく知られ，各国の選挙制度でも用いられている剰余法と除数法について，それぞれの手法の性質を纏めたものが表 2.1 である³．表中の○はその性質を満たすことを意味し，×は満たさないことを示す．

表 2.1: 定数配分法の性質による比較 (cf. [1])

方式 名称	剰余法 LRM	除数法				
		SD	HMD	GMD	AMD	LD
割当分特性	○	×	×	×	×	×
総定数単調性	×	○	○	○	○	○
人口単調性	×	○	○	○	○	○
標準性	○	×	×	×	○	×
整合性	×	×	×	×	○	×
配分議席 1 以上	×	○	○	○	×	×

割当分特性を満たすとは，対象 i の配分 m_i が，比例値の切り捨て値 $\lfloor mp_i/P \rfloor$ か切り上げ値 $\lceil mp_i/P \rceil$ のどちらかになるということである．ここで， p_i は対象 i の人口で， $\sum_i p_i = P$ である．総定数単調性を満たすとは，アラバマパラドクスが起こらないことを意味する．人口単調性を満たすとは，人口パラドクスが起こらないことを意味する．標準性や整合性などについては [1, 77] を参照されたい．配分議席 1 以上とは，必ずすべての対象に 1 議席以上配分されることを意味する．

剰余法は割当分特性は満たすが，アラバマパラドクス・人口パラドクスなどが起こりうる．除数法は，剰余法で問題とされるパラドクスは回避できるが，割当分特性は成り立たない．5つの

³各手法の名前と別名は以下の通り．

LRM = Largest Remainders Method, 最大剰余法, Hamilton 法, Vinton 法

SD = Smallest Divisor method, 最小除数法, Adams 法

HMD = Harmonic Mean Divisor method, 調和平均法, Dean 法

GMD = Geometric Mean Divisor method, 幾何平均法, Hill 法, Huntington 法

AMD = Arithmetic Mean Divisor method, 算術平均法, Webster 法, Sainte-Laguë 法

LD = Largest Divisor method, 最大除数法, Jefferson 法, d'Hondt 法

除数法のうち、SD と LD の 2 つは両極端な手法で、配分対象の人口が偏っている場合、SD は相対的に人口の少ない対象により有利に議席配分される傾向があり、LD は逆に人口の多い対象へ相対的に多く議席配分される傾向がある。平均的な除数法（HMD, GMD, AMD）は比較的どちらにも平均的な議席割当を行い、実際、定量的には割当分特性を満たさないことはほとんどない（cf. [20] 表 2.2 など）。LRM, AMD, LD は、極端に人口が少ない対象の配分議席が 0 になりうる。各手法は一長一短で、決定的により方法は知られていないが、定性的には AMD がよい [1, 66] などの主張がある。定量的にも考慮すると、HMD か GMD のどちらかを用いるのが良いように思う [22]。

2.2 議席配分最適化モデル [16, 20]

所与の総議席数 m を、配分対象 $i \in \{1, \dots, n\}$ へ、一票の最大較差が最小となるように割り当てるのが、議席配分最適化モデルである [16, 20]。

対象 i の人口を p_i 、対象 i の配分議席候補を m_{ij_i} ($j_i = \{1, 2, \dots\}$) とする。変数 z_{ij_i} を、各対象 i の配分議席候補 m_{ij_i} を採用するか否かの 0-1 変数とすると、議席配分モデルは以下の通りに定式化される。

定式化 [16]:

$$\min. \quad u/l \tag{2.1}$$

$$\text{s.t.} \quad l \leq \sum_{j_i} \frac{p_i}{m_{ij_i}} z_{ij_i} \leq u \quad (\forall i) \tag{2.2}$$

$$\sum_{j_i} z_{ij_i} = 1 \quad (\forall i) \tag{2.3}$$

$$\sum_i \sum_{j_i} m_{ij_i} z_{ij_i} = m \tag{2.4}$$

$$\sum_{j_i} m_{ij_i} z_{ij_i} \leq \sum_{j'_i} m_{ij'_i} z_{ij'_i} \quad (\forall i, i' \text{ s.t. } p_i \leq p_{i'}) \tag{2.5}$$

$$z_{ij_i} \in \{0, 1\} \quad (\forall i, j_i) \tag{2.6}$$

式 (2.2) は、一選挙区あたりの平均人口 p_i/m_{ij_i} が上下限 (u, l) 内におさまることを要求している。各対象 i について、式 (2.3) で配分議席候補 m_{ij_i} のうち 1 つだけを採用し、式 (2.4) でその合計が総議席数 m に等しくなるようにする。式 (2.5) は、 p_i に対する配分議席数の単調性を保証するための制約である。

議席配分最適化モデルは、各 i の配分議席候補 m_{ij_i} を、割当分特性を満たすように決める場合と、満たさなくてよい場合のどちらでも求解できる。割当分特性を満たす場合は、(0 議席が候補になる場合を除き) 全ての対象で候補となる議席数は 2 つ ($j_i = 1, 2$) となる。比例値 $p_i \frac{P}{m}$ の切り捨て値、切り上げ値のどちらかを採用するからである。

割当分特性を満たさなくてよい場合、 $l \geq \bar{l}, u \leq \bar{u}$ となる選挙区の人口下限 $\bar{l}$ 、上限 $\bar{u}$ を追加し、都道府県毎にその範囲内に入る全ての配分議席候補を考慮する。 $\bar{l}, \bar{u}$ は、総人口 $P (= \sum_i^n p_i)$ と議席総数 m による一選挙区あたり平均人口 P/m に対して、例えば $\pm\alpha\%$ として定まる。従っ

て、対象 i の配分議席候補 m_{ij_i} の集合は

$$\left\{ m_{ij_i} \mid \bar{l} \leq \frac{p_i}{m_{ij_i}} \leq \bar{u} \right\} \quad (2.7)$$

となる． $\bar{u}, \bar{l}$ の範囲を狭く取りすぎると、候補集合が空集合となる対象が出てくるので注意が必要である．

このモデルでは、最大較差を与える最大人口と最小人口が定まり、残りの議席数には自由度がある．従って、最大・最小が定まった後にその範囲内の配分を唯一に定める必要がある．このとき、それぞれの較差は最小値からの比で評価されるので、目的関数を $\min .u$ に変更し、最大と最小に関連する変数を固定した上で解き、2 番目に大きな人口を決定する．以下同様に、3 番目、4 番目と繰り返し解くことで、内側の配分を決定していく．

このモデルを用い、2010 年国勢調査 [速報値] 人口と総議席数 $m = 300$ 、2015 年国勢調査 [速報値] 人口と総議席数 $m = 289$ について、割当分特性を満たす場合と満たさない場合の都道府県への議席配分を行った結果、一票の最大較差は表 2.2 の通りとなる⁴．

表 2.2: 議席配分最適化モデルにより示される一票の最大較差下限値 [16, 20]

人口	2010		2015	
総議席数	300		289	
最大人口	470,631	465,765	573,648	573,648
最小人口	294,209	294,209	347,094	347,094
最大較差	1.600	1.583	1.653	1.653
割当分特性 満たさない数	制約 0	制約とせず 5	制約 0	制約とせず 3

日本の国政選挙（衆議院・小選挙区制）では、総議席数を 47 都道府県に議席配分し、その後、各自治体毎に区割画定を行う 2 段階の選挙区画定作業となるが、その 1 段階目の議席配分では、2000 年～2015 年の人口・行政界では、大体 1.6 倍程度の最大較差となる．これは 2 段階目の区割画定で定まる最終的な一票の最大較差の下限値を与える．

3 区割画定と最適化モデル

小選挙区（1 人選出選挙区）の画定問題を考える．この問題は、点 $i \in V$ にコスト p_i が与えられたグラフ $G = (V, E)$ と定数 $m \in [2, |V| - 1] \subseteq \mathbb{Z}$ が与えられたときに、 m 個の連結成分に分

⁴割当分特性を条件としない議席配分最適化モデルを、日本の国政選挙（衆議院・小選挙区制）に用いた場合、満たさない都道府県は、2010 年人口では兵庫・愛知・大阪・神奈川・東京の 5 箇所、2015 年人口では愛知・大阪・東京の 3 箇所 ([20], 表 2.1) で、いずれも人口の大きな都道府県への割当議席数を減らして較差を小さくする結果が得られる．現状では、これらの地域に比べて人口が相対的に極端に少ない県への配分議席を増やすことで較差が縮小する傾向があるためである．

割する⁵。このとき、各連結成分のコストの和の最大と最小の比を最小化することを目的とする最適化問題を考える。例えば、点集合 V を市区町村、コストをその人口とし、市区町村が境界を線で共有するとき枝を張って市区町村隣接グラフ G をつくる⁶。すると、この最適化問題は、小選挙区制度における一票の最大較差を最小化する選挙区割画定問題となる。

4 市区町村 ($|V| = 4$) と人口が図 3.1 左の通りに与えられているとき、その市区町村隣接グラフは右の通りとなる。

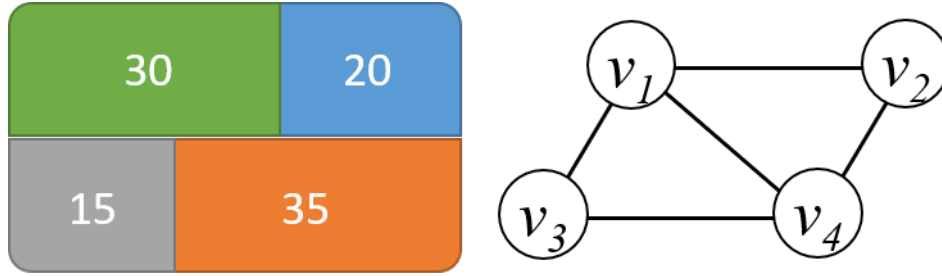


図 3.1: 4 市区町村と人口、およびその隣接グラフ表現

日本の国政選挙（衆議院小選挙区制）の例では、総定数を都道府県に人口に比例して配分し、都道府県毎に配分された議席数 m の選挙区を市区町村を対象として構成する。このとき、集合 m 分割型とグラフ m 分割型の 2 つのモデルで全都道府県の最適区割導出が可能である [38, 39, 15, 20]。

日本の場合、最も重要な目的は、一票の較差を縮小し、公平な選挙区をつくることである。飛び地を作らずに、市区町村を構成要素として選挙区を画定する。このとき、どの市区町村を同一の選挙区にするかについては、歴史的沿革や地域のつながり⁷を考慮する必要があるが、一票の較差が最高裁の訴訟事項に毎回上がるほど懸念材料となっている日本においては、政治的な意義として、最もシンプルな条件のもとで限界値がどこであることを示すことが大変重要である。従って、モデル上の制約は必要最低限として最適値（限界値）を導出する。国政選挙（衆議院小選挙区制）における一票の最大較差の経緯を表 3 に示す [39, 42, 15, 20]。

⁵大選挙区制や小+大選挙区制の場合は、 $k(\leq m)$ 個の連結成分に分割し、各連結成分に m の割当も考える。つまり、 $m_1, \dots, m_k$ ($m = \sum_{j=1}^k m_j$) も同時に決めることになる。またこのとき、目的関数が連結成分 j を構成する点 i のコスト p_i の和を m_j で割った値（平均値）の最大と最小の比を最小化する最適化問題となる [21]。ただし、 k は何らかの（政治的意義のある）規則のもとで制限されることによる下限を設定する。なぜなら、 $k \in [1, m]$ で最適化すると、必ず $k = 1$ の自明な最適解（全地域 1 選挙区）が得られるだけだからである。

⁶日本の市区町村の行政界には飛び地が複数存在するが、大きな飛び地は別の市区町村として扱い、詳細な地図を用いないと確認できないような細かな飛び地は同一の市区町村として扱う。陸地でなく海・湖・沼などの上に境界線がある場合は、船・飛行機などの定期航路や、橋が存在する場合のみ隣接と考える。構成法より、陸上の隣接グラフは平面グラフとなるが、海上等では K_3^3 （3 点 $\times$ 2 の完全 2 部グラフ）の航路が現れる可能性もあり、その限りではない。また、市区町村が点を共有する場合は隣接とは見なさない。隣接グラフの面は殆どの場合三角形であるが、4 市区町村が 1 点を共有する場合や境界が定まっていない場所等が一部見られ、四角形の面が現れる場合がある。

⁷都道府県毎の地域の組合（例：防災災害組合、学校組合、衛生施設組合、清掃管理組合、交通災害共済組合、etc）や広域連合（中部ふるさと広域連合、後期高齢者医療連合、etc）で同じ構成団体となっている市町村や、小学校区、商圈など（cf. 総務省：衆議院議員選挙区画定審議会 議事録など参照）

表 3.1: 全国最適区割による一票の最大較差の推移 [39, 42, 15, 20]

人口	2000	2005	2010	2015
行政界	2001.3	2006.3	2011.3	2016.3
総議席数	300	300	300	289
最大人口	536,000	566,460	561,211	578,245
最小人口	271,132	263,089	289,495	294,656
最大較差	1.977	2.153	1.939	1.962

3.1 集合分割型モデルとグラフ分割型モデル

集合分割型モデルは、例えば都道府県の選挙区を作る場合、市区町村を構成要素とし、所与の議員定数 m について、条件を満たす分割の中で、目的関数最良のものを求める [38, 39]. このモデルの長所は、定式化が比較的わかりやすく表現が容易な点と、 $\mathcal{NP}$ -困難のクラスに属す問題であるが、実際には中規模サイズ程度なら最適解を発見しやすい点である [29]. 一方、短所は、選挙区候補数が対象都道府県の市区町村数の人口分布とその接続状況に依存しており、場合によって膨大な数になる点である.

グラフ分割型モデルは、グラフ上にフローを流すことで制約を満たすことを目指す. 区割画定問題に対してグラフを利用したアプローチとしては、過去に最小 m 全域森問題からの試みがあるが、大きなサイズでの厳密解の導出は困難であることが報告されており、そもそも森の各連結要素の根となる点を事前に指定しなければならないため厳密性の保証がない. ここでのモデルはその欠点を克服し、厳密性の保証がある [38, 39]. 例えば、都道府県の選挙区を作る場合、市区町村集合の選挙区数分の拡大有向グラフを構成し、選挙区に対応したフローをそれぞれ流す.

図 3.1 の 4 市区町村の例について、今、定数 2 ($m = 2$) の小選挙区制を考えた場合の拡大有向グラフを図 3.2 に示す. この拡大有向グラフは、4 頂点 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ の隣接グラフを議席数 ($m = 2$) 個分つくり、議席数分の頂点 (s^1, s^2) からの有向枝と、市区町村分の点に対応した tail 点 $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ への各有向枝からなる (図 3.2).

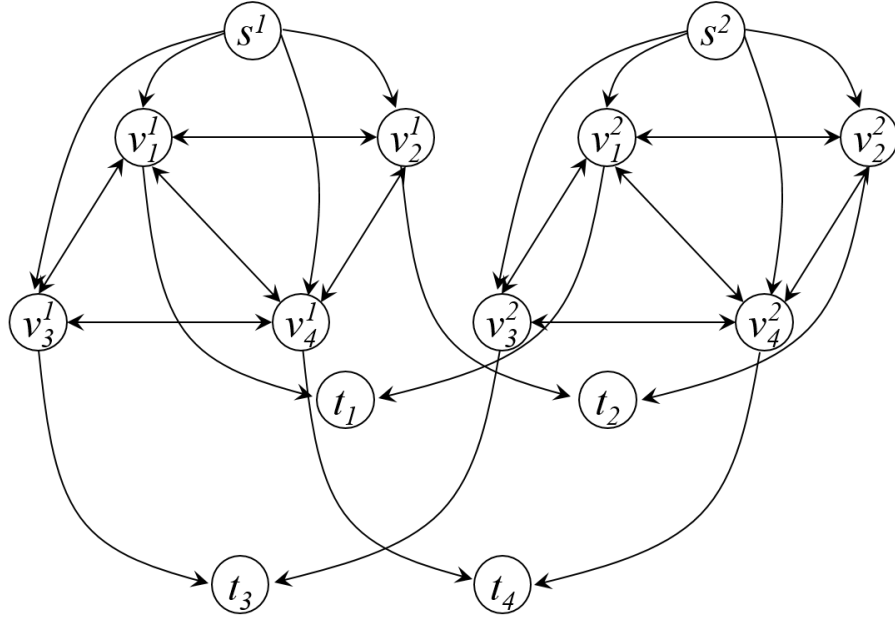


図 3.2: グラフ分割型モデルで用いる図 3.1 の拡大有向グラフ

この定式化の長所は、過去のグラフ利用のモデルでは必要だった事前指定の中心市区郡が不要のため厳密性が保証される点にある。また、フローの流量保存則により飛び地を持つ選挙区は実行可能解とはならない。短所は、0-1 変数の数が $2mn$ 個と多い点であり、素朴に分枝限定法で解こうとすると多くの計算時間を要するため、実際の求解には工夫を要する。

いずれも詳細は、[38, 39] を参照されたい。どちらのモデルも組合せ最適化問題として表現しているが、飛び地とならない選挙区を構成するのに、入力段階で強制するか、制約条件として強制するかの点で異なる。

3.2 解法の工夫と効果

集合分割型モデルで用いる選挙区候補集合を準備するには、市区町村隣接グラフ（例：図 3.1）上で連結な部分グラフを列挙すればよく、再帰呼出し型解法で実行可能である (cf. [29] 第 14 章)。しかし、市区町村数の少ない都道府県でも列挙すべき数は膨大になる。そこですぐに思いつく工夫は、人口を制限することである。実際の画定作業でも、1 選挙区の平均人口を基準として上下限 u_b, l_b を設定することが多い⁸。ただし、人口の制限だけでは列挙数の膨大さを克服できない事例も多い。そこで、根本・堀田は人口上下限を u_b, l_b に制限した第 1 妥当選挙区に加えて、第 2 妥当選挙区概念を導入し、これを克服した [38, 39]。

⁸衆議院・小選挙区制（平均 $\pm 33.33\%$ [59]）、アメリカ下院・小選挙区制（平均 $\pm 5\%$ [4]）、ドイツ連邦議会・小選挙区制（平均 $\pm 15\%$ [11, 46, 64]）、イギリス庶民院・小選挙区制（平均 $\pm 5\%$ [46]）、フランス国民議会・小選挙区制（平均 $\pm 20\%$ [46]）、オーストラリア連邦下院・小選挙区制（平均 $\pm 10\%$ [46]）など。ただし、同じ小選挙区制でも、比例代表並立、比例代表併用、単純投票、2 回投票など詳細はかなり異なる。また、日・米・独・仏は人口だが、英・豪は有権者をもとに作成する

第2妥当選挙区とは、市区町村隣接グラフから当該選挙区を除いてできる連結成分全てが、人口上下限制約 u_b, l_b を満たすものをいう。第2妥当選挙区の効果については、付録の表 A.1 や、[14] 表 2.4, [16] 表 3, [21] 表 7などを参照されたい。

図 3.1 の4市区町村の例では、総人口 $P = 100 (= 20 + 30 + 35 + 15)$ であり、定数 $m = 2$ の小選挙区制なので、1選挙区あたり平均人口は $P/m = 50$ となる。よって、選挙区上下限は $\pm 33.33\%$ 規則のもとでは、 $u_b = 66, l_b = 34$ となる⁹。従って、この例における集合分割型モデルの全部分集合、全選挙区候補集合、第1妥当選挙区集合、第2妥当選挙区集合は図 3.3 の通りとなる。

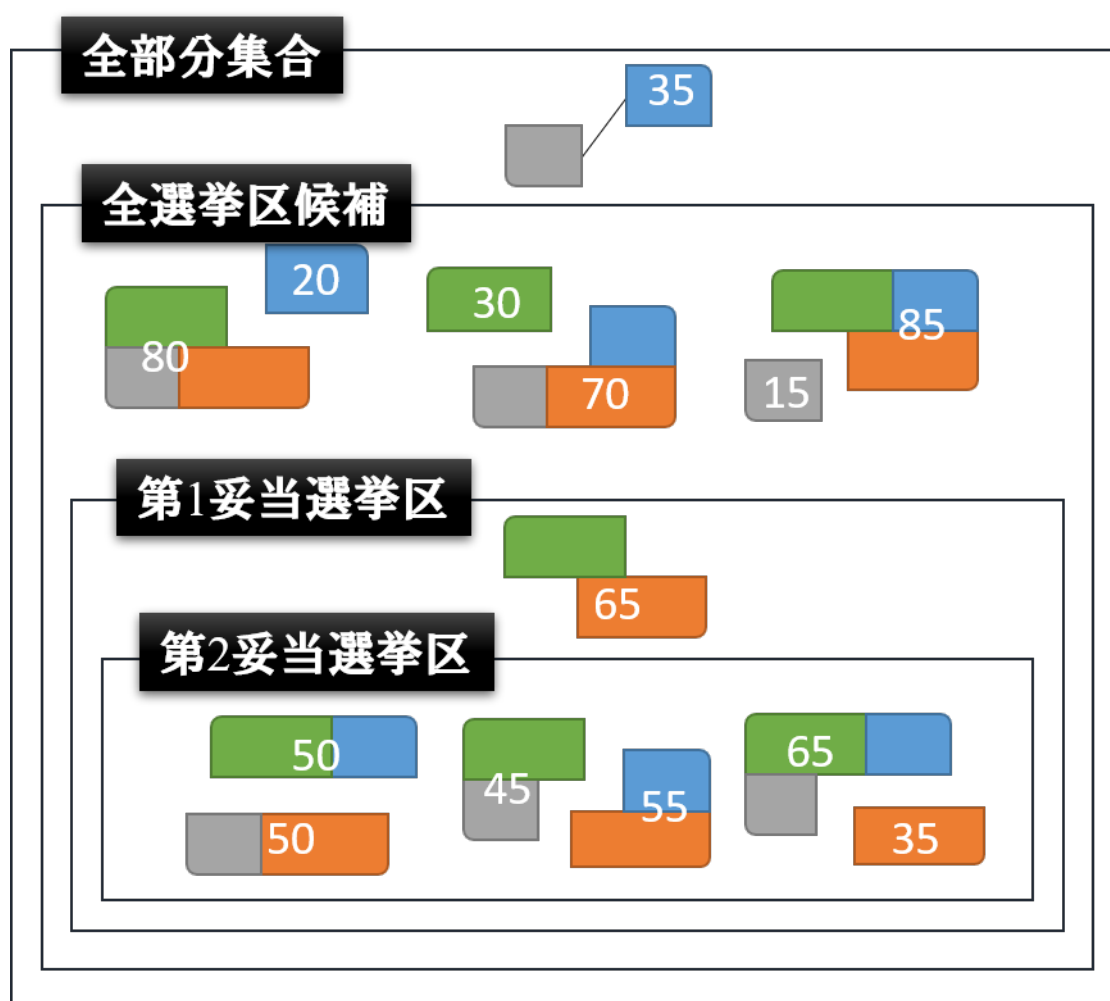


図 3.3: 4市区町村の例（図 3.1）における第2妥当選挙区集合

全部分集合の数は、対象市区町村数 n に対して自明に $2^n - 2$ で与えられる¹⁰ ので、この例では $2^4 - 2 = 14$ となる。この第2妥当選挙区集合を制約として、集合分割型モデルは解かれる。

グラフ分割型では、モデルの対称性を崩して求解を容易にするために、0-1 変数の固定を行う [38, 39]。対象となる 0-1 変数は y_{ij} (mn 個) と z_{ij} (mn 個) の2種類である。まず、一般性を失うことなく、任意の1対象（市区町村など）を第1選挙区に指定でき、それにともなう変数固定が

⁹ 上限 u_b は切り捨て値、下限 l_b は切り上げ値を用いることに注意されたい

¹⁰ -2 は、全集合と空集合を除くことに該当

可能である．次に，第2妥当選挙区の情報を用いて，この対象と同一選挙区にならない対象を第2選挙区に指定でき，それにとまなう変数が固定できる．以下同様に，第2妥当選挙区の情報を用いて，同じ選挙区にならない対象を可能な限り指定して変数固定をしていくと，モデルの対称性が崩れ，非常に解きやすくなる．どの対象を固定していくかについては，全対象から深さ優先探索を用いて計算し，第2妥当選挙区の情報も利用して，最も固定数が増える固定の仕方を採用する．

図 3.4 は図 3.2 の拡大有向グラフにおける 0-1 変数の固定例である．点 1 から深さ優先探索を行って人口和を求め，同時に第2妥当選挙区の情報（図 3.3）を利用すると，点 2, 3 とは同一選挙区になる可能性があり，点 4 は同一選挙区とはならないことが分かる．次に点 4 から同様に深さ優先探索を行うと，点 2, 3 とは同一選挙区になる可能性があることがわかる．従って，点 1 を第1選挙区に指定して，関連する 0-1 変数を $y_{11} = z_{11} = 1$, $y_{21} = y_{31} = y_{41} = 0$, $y_{12} = z_{12} = 0$ と固定できる．同様に，点 4 を第2選挙区に指定して， $y_{42} = z_{42} = 1$, $y_{22} = y_{32} = 0$, $z_{41} = 0$ と固定できる．故にこの例では，2種類の 0-1 変数 (y_{ij}, z_{ij} 各々 $4 \times 2 = 8$ 個) 16 個のうち，12 個が固定でき，残り 4 個 $z_{21}, z_{22}, z_{31}, z_{32}$ を求めれば良いことになる．

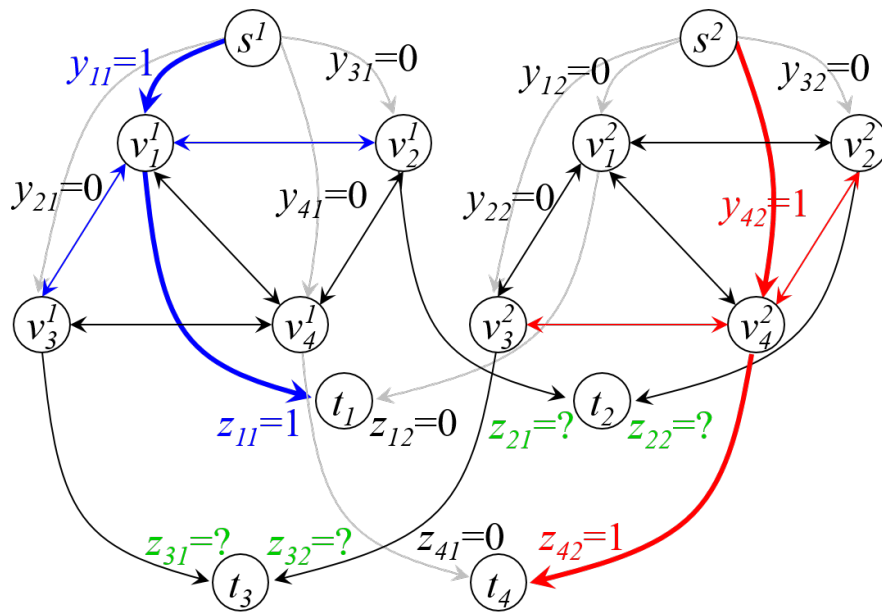


図 3.4: グラフ分割型モデルにおける 0-1 変数の固定例

この処理によって，実際の例ではどの程度固定されるかの一例を表 A.2 に示す．この表では，国政選挙（衆議院・小選挙区制）について，2005 年国勢調査人口，2006 年行政界のデータにもとづき，47 都道府県の各々最大固定数を計算したものである．ただし，人口過大都市郡¹¹ は事前に 1 選挙区割当を行っているので，点数 $|V|$ と議席数 m がその分減っていることに注意されたい．

¹¹1994 年小選挙区制開始から 2010 年までは，市区町村ではなく市区郡が構成単位であった．人口過大と事前割当については [38, 39, 14] などを参照のこと

3.3 最小比最適解の求め方

区割画定問題では一票の較差，つまり比の最小を目的としている．比最小の分数計画問題は，一般にパラメータを導入し，パラメトリック最適化問題として解く必要がある (cf.[29] 第14章)．パラメータの追跡は単純には2分探索法を使えばよいが，Newton法を用いる方法も提案されている [51]．しかし，パラメータを固定した子問題でも厳密解導出に時間を費やす本問題ではこの汎用的な方法の実装では厳密解導出が困難である．実は本問題の性質から，最小差を達成する区割が最小比も達成しているかを判定する条件を導くことができ，最小比の保証がない時に限って探索範囲を限定した最小差の問題を解き直すアプローチが可能である．そこで，根本・堀田は，目的関数を最小差で解くことで最小比最適解を求めることを可能にした [38, 39]．議席配分最適化モデル [16, 20] や複数議員選出選挙に対応したモデル [18, 21, 23] でも同様である．本節ではその具体的手法を説明する．

選挙区の上下限を制限する変数 $u, l \in \mathbb{R}$ を用い，求めたい最小比目的関数は u/l である．これを，同じ制約のもとで，目的関数を最小差 $u - l$ に変えた最適化問題を最低2回解くことで求める．所与の隣接グラフの点 $i \in V = \{1, \dots, n\}$ の人口を p_i ，総人口 $P = \sum_i^n p_i$ ，配分議員定数を m とする．実数変数 u, l を $l \in [l_b, \lfloor P/m \rfloor], u \in [\lceil P/m \rceil, u_b]$ と限定した問題を $\text{Min-dif}[l_b, u_b]$ とし，その最適解を u_d^*, l_d^* とする．

このとき，以下のアルゴリズムで最小比最適解を求める．

step0. l_b, u_b を設定¹² し， $[l_b, u_b]$ で第2妥当選挙区の列挙と0-1変数固定（グラフ分割型）を行う

step1. $\text{Min-dif}[l_b, u_b]$ を解き，最小差最適解 u_d^*, l_d^* を得る

step2. u_d^*, l_d^* の最小差最適性を判定¹³

最適なら $l_b := l_d^* + 1, u_b := \lfloor Pu_d^* / (u_d^* + (m-1)l_d^*) \rfloor$ として step3 へ

そうでなければ γ_l, γ_u を適当に定め， $l_b := l_b - \gamma_l, u_b := u_b + \gamma_u$ として step1 へ

step3. カット不等式 $u \leq r^* l$ を制約に追加して $\text{Min-dif}[l_b, u_b]$ を解き，最小差最適解 $\tilde{u}, \tilde{l}$ を得る．ただし， $r^* := u_d^* / l_d^*$

3.1. 実行不可能ならば終了（現在得られている u_d^*, l_d^* が最小比最適解）

3.2. $u_d^* / l_d^* < \tilde{u} / \tilde{l}$ のとき，

3.2.1 $P / (r^* + m - 1) \leq (P - (\tilde{u} - \tilde{l})) / m$ ならば $l_b := \lceil (\tilde{u} - \tilde{l}) / (r^* - 1) \rceil$ として step3 へ

3.2.2 $P / (r^* + m - 1) > (P - (\tilde{u} - \tilde{l})) / m$ ならば終了（ u_d^*, l_d^* が最小比最適解）

3.3. $u_d^* / l_d^* \geq \tilde{u} / \tilde{l}$ のとき，

$(u_d^*, l_d^*) := (\tilde{u}, \tilde{l}), l_b := l_d^* + 1, u_b := \lfloor Pu_d^* / (u_d^* + (m-1)l_d^*) \rfloor$ として step3 へ

¹² $1 \leq l_b \leq \lfloor \frac{P}{m} \rfloor \leq \lceil \frac{P}{m} \rceil \leq u_b \leq P - m + 1$

¹³ l_b, u_b の設定の仕方（十分な幅を持たせず，狭く設定した場合）によっては，最小差最適解が別に存在する可能性があることに注意されたい

$\text{Min-dif}[l_b, u_b]$ は2つの定式化のいずれかで MIP ソルバーを用いて解く．step2 では最小差最適性の判定，step3では最小比最適性の判定を行っている．step2 における最適性判定とは， $\text{Min-dif}[l_b, u_b]$ の最小差最適解 u_d^*, l_d^* が $\text{Min-dif}[1, P - m + 1]$ の最小差最適解であることの確認である（Proposition 3.1 参照）．step3.2 は最小比が更新された場合，step3.3 は最小比が更新されない場合である．

なお， $\text{Min-dif}[l_b, u_b]$ の目的関数は， $u - l$ ではなく， $u - l - \alpha l$ ($\alpha > 0$ は $1/2$ 未満の十分小さな数) を用いる¹⁴．これは，最小差最適解が複数ある場合に，その中で l が最大のものを求めるためである．

上限 u の自明な範囲は $[\lceil P/m \rceil, P - m + 1]$ だが，下限 $l \in [1, \lfloor P/m \rfloor]$ を定義域とした関数 u と見なすと， l に対する u のとりうる範囲は $\left[\left\lceil \frac{P-l}{m-1} \right\rceil, \lfloor P - (m-1)l \rfloor \right]$ で与えられ，図 3.5 の斜線領域となる．

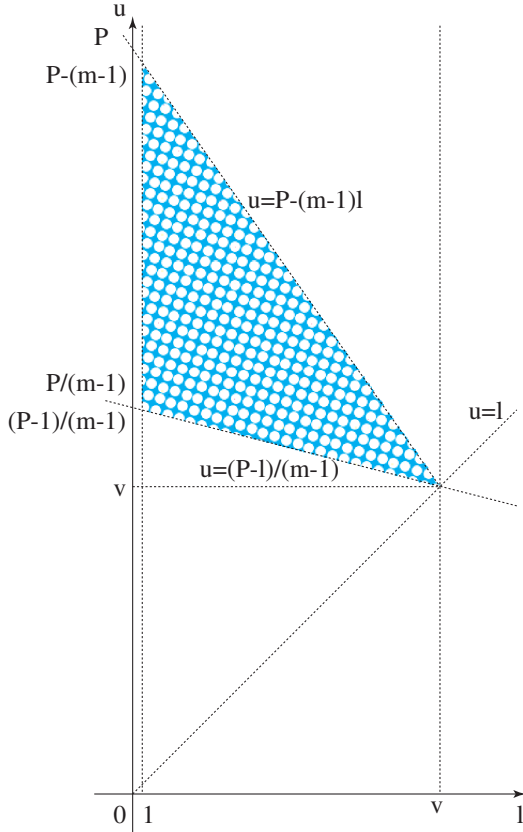


図 3.5: 下限 l に対する上限 u の実行可能領域

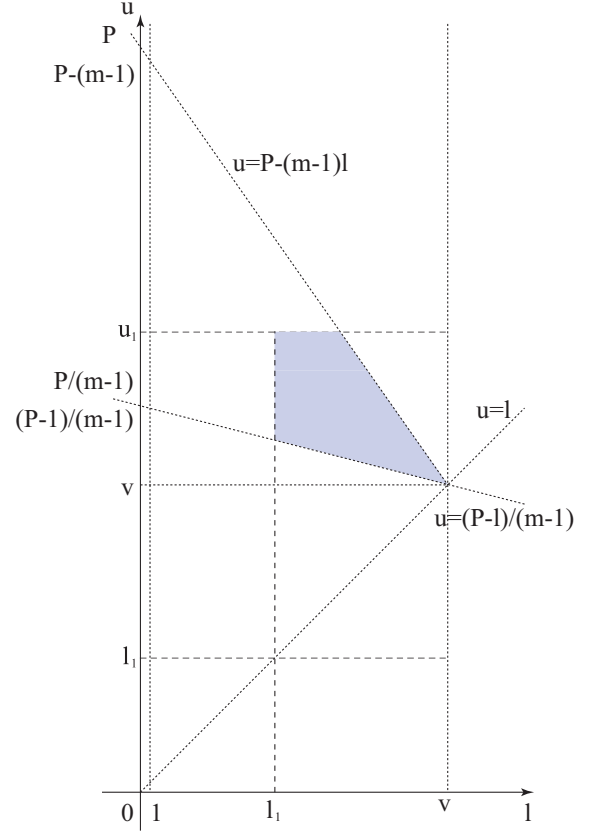


図 3.6: $\text{Min-dif}[l_b, u_b]$ の解探索範囲

アルゴリズムの step2 における最小差最適判定は Proposition 3.1 により行う．

Proposition 3.1. $\text{Min-dif}[l_b, u_b]$ の最小差最適解 u_d^*, l_d^* が $\text{Min-dif}[1, P - m + 1]$ の最小差最適解で

¹⁴ $\alpha := \frac{1}{2(\frac{P}{m} + 1)} \left(< \frac{1}{2} \right)$

あるための十分条件は,

$$\begin{cases} u_b \geq \frac{P}{m} + \frac{m-1}{m}d^*, \\ l_b \leq \frac{P}{m} - \frac{m-1}{m}d^* \end{cases} \quad (3.1)$$

である. ただし, $d^* = u_d^* - l_d^*$ である.

Proof: 2 直線 $u = P - (m-1)l$, $u = l + d^*$ の交点は,

$$(u, l) = \left(\frac{P - d^*}{m}, \frac{P + (m-1)d^*}{m} \right) = \left(\frac{P}{m} - \frac{1}{m}d^*, \frac{P}{m} + \frac{m-1}{m}d^* \right)$$

より,

$$u_b \geq \frac{P}{m} + \frac{m-1}{m}d^*$$

であればよい. 同様に, 2 直線 $u = (P - l)/(m-1)$, $u = l + d^*$ の交点は,

$$(u, l) = \left(\frac{P - (m-1)d^*}{m}, \frac{P + d^*}{m} \right) = \left(\frac{P}{m} - \frac{m-1}{m}d^*, \frac{P}{m} + \frac{1}{m}d^* \right)$$

より,

$$l_b \leq \frac{P}{m} - \frac{m-1}{m}d^*$$

であればよい. ■

u_b, l_b, u_d^*, l_d^* が条件 (3.1) を満たさない場合は, 図 3.7 の赤色の 2 つの三角形領域が未探索域となる. 従って, 式 (3.1) の第 1 式を満たさない場合は,

$$u \in \left(u_b, \frac{P}{m} + \frac{m-1}{m}d^* \right], \quad l \in \left(u_b - d^*, \frac{P - u_b}{m-1} \right] \quad (3.2)$$

の範囲を, 第 2 式を満たさない場合は,

$$u \in \left(\frac{P - l_d^*}{m-1}, l_b + d^* \right], \quad l \in \left(\frac{P}{m} - \frac{m-1}{m}d^*, l_b \right] \quad (3.3)$$

の範囲を探索すれば充分である. 故に, アルゴリズムの step2 において,

$$\begin{cases} \gamma_u := \frac{P}{m} + \frac{m-1}{m}d^* - u_b, \\ \gamma_l := \frac{P}{m} - \frac{m-1}{m}d^* - l_b \end{cases} \quad (3.4)$$

とすればよい.

アルゴリズムの step3 において, 最小差最適解 l_d^*, u_d^* は必ずしも最小比最適解とはならない. 例えば, $(l_d^*, u_d^*) = (200000, 400000)$, $(\tilde{l}, \tilde{u}) = (210000, 415000)$ のとき,

$$u_d^* - l_d^* = 200000 \leq 205000 = \tilde{u} - \tilde{l}$$

であるが,

$$u_d^*/l_d^* = 2.0 \geq 1.976 \approx \tilde{u}/\tilde{l}$$

である. ただし, 初等計算により l_d^*, u_d^* より比がより小さい解が存在するならば, その下限は l_d^* より大きいことがいえる. すなわち, 次の Lemma 3.2 が成り立つ.

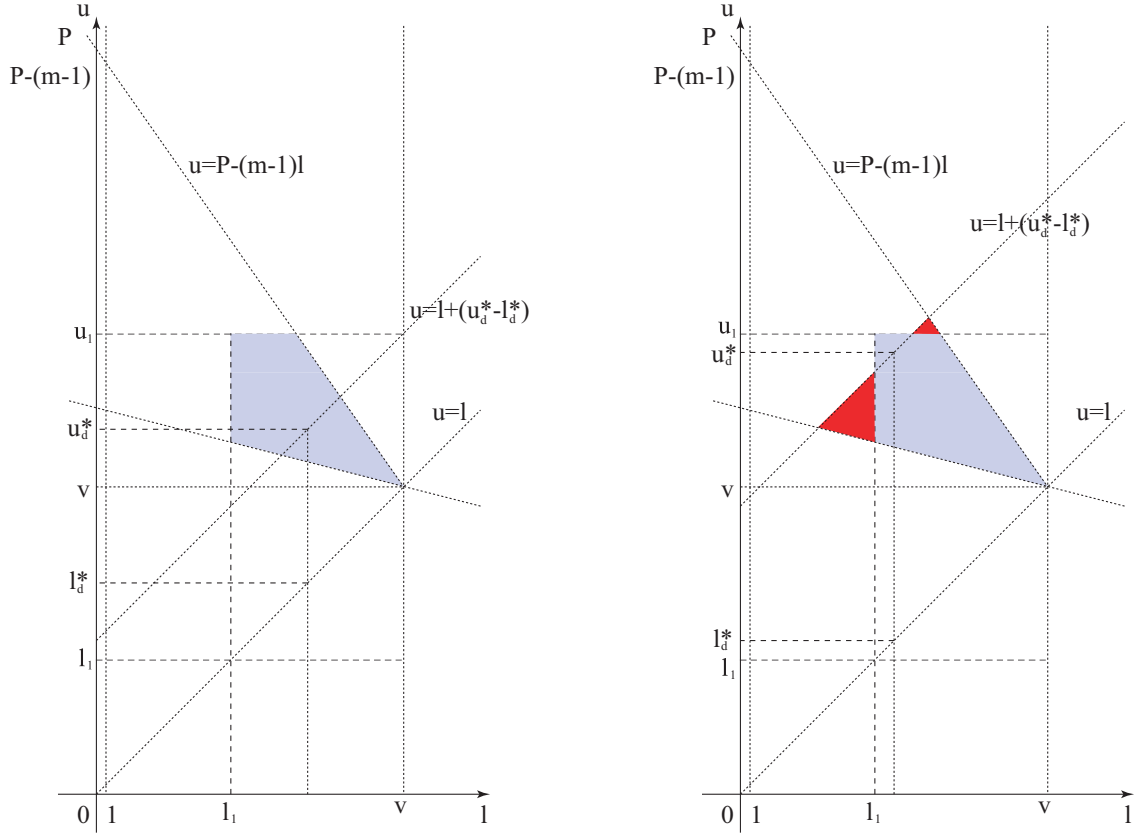


図 3.7: Min-dif[l_b, u_b] の最適解 u_d^*, l_d^* が Min-dif[1, $P-m+1$] の最適解の時 (左) とそうでない時 (右)

Lemma 3.2. u_d^*, l_d^* と $\tilde{u}, \tilde{l}$ が

$$(0 \leq) \quad u_d^* - l_d^* \leq \tilde{u} - \tilde{l} \quad \text{かつ} \quad \frac{u_d^*}{l_d^*} > \frac{\tilde{u}}{\tilde{l}} \quad (\geq 1)$$

を満たすならば

$$\tilde{l} > l_d^* \tag{3.5}$$

が成り立つ (従って $\tilde{u} > u_d^*$ である) . ■

Lemma 3.2 より, アルゴリズムの step3 において, $(l_d^*, u_d^*) \neq (l^{**}, u^{**})$ となる最小比最適解 (l^{**}, u^{**}) が存在するならば, u^{**} の存在範囲は図 3.8 の黄色三角形領域となる. すなわち, $d^* := u_d^* - l_d^*$, $r^* := u_d^*/l_d^*$ としたとき, u^{**} がとりうる範囲は,

$$\begin{cases} u^{**} \leq r^* l \\ u^{**} \leq P - (m-1)l, \\ u^{**} \geq l + d^* \end{cases} \tag{3.6}$$

で囲まれる三角形領域であり,

$$\begin{cases} u^{**} \in [l^{**} + d^*, \lfloor r_d^* l^{**} \rfloor] & \text{for } l^{**} \in \left[l_d^* + 1, \left\lfloor \frac{P}{r^* + m - 1} \right\rfloor \right], \\ u^{**} \in [l^{**} + d^*, P - (m-1)l^{**}] & \text{for } l^{**} \in \left[\left\lceil \frac{P}{r^* + m - 1} \right\rceil, \left\lfloor \frac{P - d^*}{m} \right\rfloor \right] \end{cases} \tag{3.7}$$

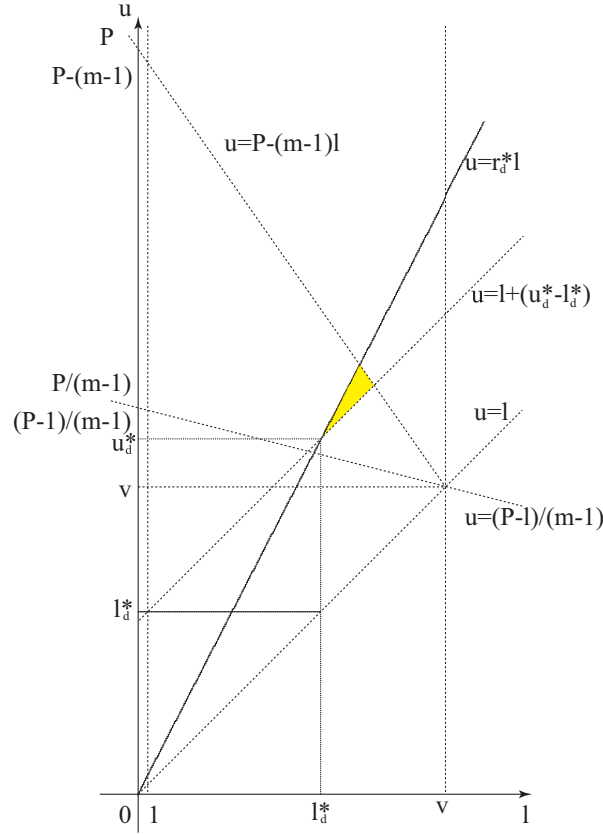


図 3.8: 最小差最適解 (l_d^*, u_d^*) よりよい比の実行可能解 u^* が存在する範囲

である．この領域が空ならば (l_d^*, u_d^*) が最小比最適解である．等式

$$u_d^* = P - (m - 1)l_d^* \quad (3.8)$$

が成立すれば，この領域は必ず空となる． $m = 2$ のとき等式 (3.8) は必ず成立するが， $m \geq 3$ の場合は成立するのはまれである．なお，式 (3.7) における各 l^* に対する u^* の範囲それぞれに第 2 妥当選挙区が存在しない場合も，この領域は空となる．

アルゴリズムの step3 において，step3.1 は線形不等式系 (3.6) による領域が空のときであり，このとき得られている u_d^*, l_d^* が最小差最適解となることが上記よりわかる．領域が非空で，最小比が更新された場合 (step3.3 $u_d^*/l_d^* \geq \tilde{u}/\tilde{l}$) は，この領域がより狭くなる．領域が非空で，最小比が更新されない場合 (step3.2 $u_d^*/l_d^* < \tilde{u}/\tilde{l}$) は，直線 $u = l + (\tilde{u} - \tilde{l})$ が，2 直線 $u = r^* l$ と $u = P - (m - 1)l$ の交点の下を通る (step3.2.1) か上を通る (step3.2.2) かで場合わけされる．上を通る場合は探索領域が空となるので，現在得られている u_d^*, l_d^* が最小比最適解となり，下を通る場合はその限りではないので探索領域を更新してアルゴリズムは反復する．

step3 で追加されるカット不等式は，step3.3 を経て 2 回目以降に追加される場合は，制約の本数が増えるのではなく，元の制約が強化されることに注意されたい．step0 の l_b, u_b の初期設定値は，33.33%ルール [59] より， $l_b := \lceil \frac{2}{3} \frac{P}{m} \rceil$, $u_b := \lfloor \frac{4}{3} \frac{P}{m} \rfloor$ とする¹⁵．

¹⁵ 単独の市区町村 i の人口 p_i が u_b より大きいときは実行不能となるので，市区町村を事前に分割して解くこと

3.4 アルゴリズムの計算量

このアルゴリズムの step1,2 の反復回数は γ_u, γ_l の設定法より高々2回であり, step3 の反復回数は, 自明には高々 $\left\lfloor \frac{P-d^*}{m} \right\rfloor - l_d^* + 1$ 回である. 従って, このアルゴリズムは有限回の反復で終了する.

step3 の反復回数をより詳細に求める. step3 で解く Min-dif[l_b, u_b] の u, l に関する実行可能領域は,

$$\begin{cases} l^* + 1 \leq l \leq \lfloor \frac{P}{m} \rfloor, \\ l^* + 2 \leq u \leq \min\{r^*l, P - (m-1)l\} \end{cases} \quad (3.9)$$

である. step3 において, $\tilde{d} := \tilde{u} - \tilde{l}$, $\tilde{r} := \tilde{u}/\tilde{l}$ とおくと,

$$\tilde{d} \geq d^* + 1, \quad \tilde{l} > l_d^*, \quad \tilde{u} > u_d^* \quad (3.10)$$

である. $\Delta := \tilde{l} - l_d^* (\geq 1)$ とすると,

$$\tilde{u} - u_d^* \geq \Delta + 1 (\geq 2) \quad (3.11)$$

である. なぜなら,

$$\begin{aligned} \tilde{u} - u_d^* &= (\tilde{l} + \tilde{d}) - (l_d^* + d^*) = (l_d^* + \Delta + \tilde{d}) - (l_d^* + d^*) \\ &\geq (l_d^* + \Delta + d^* + 1) - (l_d^* + d^*) = \Delta + 1 \end{aligned}$$

だからである.

step3 の中で繰り返しが起こるのは, step3.2.1 $r^* < \tilde{r}$ かつ $\frac{r^*P}{r^* + m - 1} \geq \frac{P + (m-1)\tilde{d}}{m}$ と, step3.3 $r^* \geq \tilde{r}$ の2つの場合である. step3.2.1 は $d^* = u_d^* - l_d^*$ より幅の広い最小差最適解 $\tilde{u}, \tilde{l}$ が見つかったが, 最小比は更新されない場合であり, step3.3 は同じ状況で最小比が更新される場合である. それぞれ, 図 3.9, 3.10 の状況となる.

このとき, 次の u の探索領域は3つの交点①, ②, ③か交点 I, II, III で囲まれた三角形であり, 図中の各交点の座標は

$$\text{交点①, I} \quad (l, u) = \left(\frac{P}{r^* + m - 1}, \frac{r^*P}{r^* + m - 1} \right) \quad (3.12)$$

$$\text{交点②, II} \quad (l, u) = \left(\frac{P - \tilde{d}}{m}, \frac{P + (m-1)\tilde{d}}{m} \right) \quad (3.13)$$

$$\text{交点③, III} \quad (l, u) = \left(\frac{\tilde{d}}{r^* - 1}, \frac{r^*\tilde{d}}{r^* - 1} \right) \quad (3.14)$$

$$\text{交点②', ii} \quad (l, u) = \left(\frac{P - d^*}{m}, \frac{P + (m-1)d^*}{m} \right) \quad (3.15)$$

になる [38, 39]. そうでない場合でも, 隣接関係によっては実行不能となる. 国政選挙 (衆議院小選挙区制) の場合は, 千葉県が, 松戸近辺の隣接関係により, 実行不能となることが多い [38, 42, 43, 15, 20] また, 第2 妥当選挙区の列挙数が多く, step1 の Min-dif[l_b, u_b] の求解が困難な場合, l_b, u_b の設定値を 33.33% より狭くする

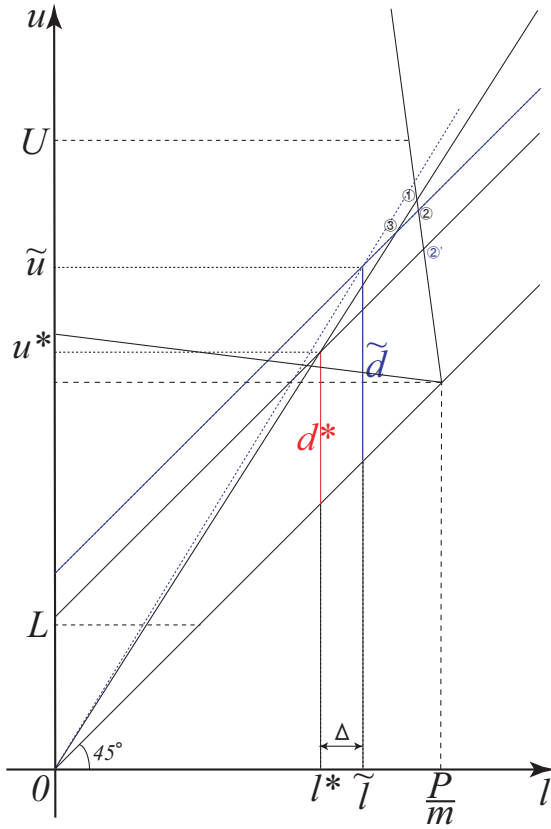


図 3.9: step3.2.1 の状況

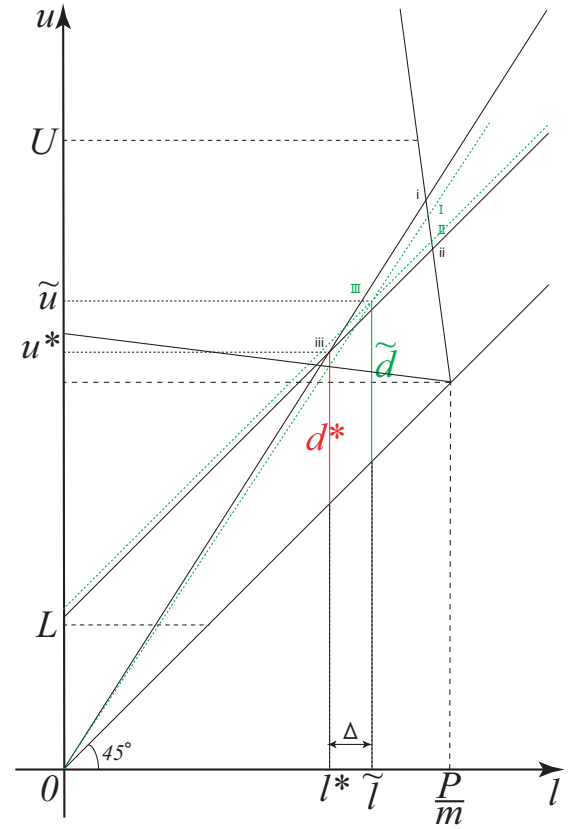


図 3.10: step3.3 の状況

となる．

$$\begin{cases} u_d^* = r^* l_d^* = l_d^* + d^* & \leftrightarrow r^* - 1 = \frac{d^*}{l_d^*} \\ \tilde{u} = \tilde{r} \tilde{l} = \tilde{l} + \tilde{d} & \leftrightarrow \tilde{r} - 1 = \frac{\tilde{d}}{\tilde{l}} \end{cases}$$

であるから $r^* \geq \tilde{r}$ のとき，

$$\begin{aligned} r^* - 1 \geq \tilde{r} - 1 & \leftrightarrow \frac{d^*}{l_d^*} \geq \frac{\tilde{d}}{\tilde{l}} = \frac{\tilde{d}}{l_d^* + \Delta} \\ & \leftrightarrow \frac{d^*}{l_d^*} (l_d^* + \Delta) = d^* + \frac{d^*}{l_d^*} \Delta \geq \tilde{d} \geq d^* + 1 \\ & \Rightarrow \Delta \geq \frac{l_d^*}{d^*} = \frac{1}{r^* - 1} \end{aligned}$$

Δ は整数なので，

$$\Delta \geq \left\lceil \frac{1}{r^* - 1} \right\rceil \quad (3.16)$$

である． $r^* < \tilde{r}$ のときは，図 3.9 の交点③の l 座標が次の探索領域の l の下限なので，

$$\frac{\tilde{d}}{r^* - 1} - l^* = \frac{\tilde{d} - (r^* l^* - l^*)}{r^* - 1} = \frac{\tilde{d} - (u^* - l^*)}{r^* - 1} \quad (\because u^* = r^* l^*)$$

$$= \frac{\tilde{d} - d^*}{r^* - 1} \geq \frac{1}{r^* - 1} \quad (\because \tilde{d} \geq d^* + 1)$$

となる．故に，次の探索領域までに少なくとも

$$\left\lceil \frac{1}{r^* - 1} \right\rceil \quad (3.17)$$

の幅がある．つまり，step3.2.1, 3.3 とともに，次の l の探索領域までの幅の下限が $\left\lceil \frac{1}{r^* - 1} \right\rceil$ である．また，step3.2.1, 3.3 それぞれ l の上限が交点②' $\rightarrow$ ② (図 3.9)，ii $\rightarrow$ II (図 3.10) に更新されるので，式 (3.13), (3.15) より，

$$\frac{P - d^*}{m} - \frac{P - \tilde{d}}{m} = \frac{\tilde{d} - d^*}{m} \quad (3.18)$$

ずつ小さくなる．

故に，アルゴリズムの step3 は，

$$\text{高々} \left\lceil \left(\left\lfloor \frac{P - d^*}{m} \right\rfloor - l_d^* \right) / \left\lceil \frac{1}{r^* - 1} + \frac{\tilde{d} - d^*}{m} \right\rceil \right\rceil + 1 \text{ 回} \quad (3.19)$$

の反復で終了する¹⁶．式 (3.18) の $\tilde{d} - d^* \geq 1$ である．また，式 (3.16), (3.17) における r^* は単調非増加なので，実際の幅の減少速度は反復のたびに加速されることに注意されたい．step1 の実施は高々2回なので，アルゴリズム全体として MIP を解く回数の上限は式 (3.19) の値+2回である．

国政選挙（衆議院小選挙区制，2015 年国勢調査速報人口，2016 年行政界，構成要素：市区町村）を例として，step1 の最適解 u_d^*, l_d^* から得られる step3 の反復回数上限について，表 A.3 にまとめた．1 選挙区の鳥取県と実行不能となる千葉県・富山県の 3 県を除いてある．鹿児島県は 1 市，東京都は 5 区を人口過大選挙区として事前割当してある．表中の項目 [X] は式 (3.19) の分子，[Y] は，式 (3.17)， $\lceil [X/Y] + 1 \rceil$ は，式 (3.19) の値をそれぞれ示す．ただし，式 (3.19) の分母は，式 (3.17) を用いて計算しているので注意されたい．また，表は $\lceil [X/Y] + 1 \rceil$ の値で昇順に並べてある．

9 県は 1 回，5 県が 6 回以下となる．実際の事例での反復回数は少なく，たとえばこの事例においては，44 都道府県のうち 43 都道府県が step3.1 の実行不能で終了となり，唯一神奈川県のみが step3.2.1 で解が 1 回更新されただけで終了する．2000 年～2010 年の事例においても同様に，40 都道府県以上は，step3.1 の実行不能で終了となり，数県のみが step3.2.1 の更新に進む．従って，パラメトリックに分数計画を解くよりこちらの方がはるかに効率が良い．

4 その他の話題

議席配分問題と区割画定問題について，それ以外の知見も多く得られているので，簡単に触れておく．

¹⁶最後の項 +1 は，最初の 1 回分である．アルゴリズムが繰り返されるにつれて r^* は等しいか小さくなり，かつ $\left\lfloor \frac{P - d^*}{m} \right\rfloor - l_d^*$ の幅も更新されて狭くなっていき， Δ は等しいか大きくなるので，実際の反復回数はもっと少ない．

4.1 較差最小配分モデル

国政選挙（衆議院・小選挙区制）における小選挙区（一人選出選挙区）の作成は，総議席数 m に等しい小選挙区をいきなり作るのではなく，与えられた幾つかの地域（47 都道府県）へ条件（人口比例）にもとづき議席配分を行い，その後，各地域毎に区割りを画定する．従って，議席配分で較差が生じ，区割画定でその較差が拡大することになる．議席配分と区割画定を同時に考慮して較差を縮小させる方法が較差最小配分モデルである [38, 39]．

4.2 第 k 最適解の導出

区割画定問題において，較差が小さい順に解を列挙したいとき，最適解を導いた後，制約にカットを加えて順次第 k 最適解を列挙することができる [16]．また，この列挙では混合整数計画問題を欲しい解の個数分解くことになるので，効率的ではない．較差の順に高速に解を列挙することが求められる．これを実現するために，川原ら [27] により，フロンティア法ベースのアルゴリズムを用い，膨大な数に上る列挙解を ZDD でコンパクトに保持しながら求める手法が確立されている．

4.3 最大・最小以外の選挙区の構成と選挙区の特徴化による選定

区割画定を行う最適化モデルでは，最大・最小人口の選挙区以外の選挙区には複数解がありうる¹⁷．政治的意義として，限界較差を示すという点では，これは問題にならないが，区割画定作業を支援するためや実際の区割として利用したい，という場合は，どの解を用いたら良いかについて，何らかの指標があるとよい．第 k 最適解の導出 [16] や，高速列挙 [27] による複数解を見つけた後の評価法が与えられている [19]．

5 まとめ

本論文では，根本・堀田 [38, 39] によって確立された，選挙区画定問題の解法について，特に最小比最適解を，パラメータを用いた分数計画法を使わずに，どのように求めているのかについて詳細をまとめたものである．また，このときの計算量（反復回数）を示した．通常，分数計画問題の解法は，パラメータを適当に設定し，その値を二分探索や Newton 法などで追跡するのが基本である．しかし， $\mathcal{NP}$ -困難な混合整数計画問題を複数回解かねばならず，現実の事例でこの手法を用いるのは現実的ではない．選挙区画定問題においては，その構造の特殊性から，最小差最適解を複数回解けばよいことを利用して最小比最適解を求められる．この手法の利点はパラメータを用いない，ということと，同じ複数回解くといっても，現実の事例では，ほとんどの場合 2 回解けば十分である（最適性が担保される）ことから，非常に有効な方法となる．

¹⁷最大・最小人口を与える選挙区も複数解が存在する場合もあることに注意されたい

参考文献

- [1] M. L. Balinski and H. P. Young: *Fair Representation 2nd ed.*, Brookings (2001).
- [2] C. Barnhart, E.L. Johnson, G.L. Nemhauser, M.W.P. Savelsbergh and P.H. Vance: Branch-and-Price: Column Generation for Solving Huge Integer Programs, *Operations Research* **46**-3 (1998) 316–329.
- [3] B. Bozkaya, E. Erkut and G. Laporte: A tabu search heuristic and adaptive memory procedure for political districting, *European Journal of Operational Research* **144** (2003) 12–26.
- [4] K.D. Burnett: Congressional Apportionment, 2010 Census Briefs, *U.S. Census Bureau* (2011).
- [5] P.G. Cortona, C. Manzi, A. Pennisi, F. Ricca and B. Simeone: *Evaluation and Optimization of Electoral Systems*, SIAM (1999).
- [6] B. Fleischmann and J.N. Paraschis: Solving a Large Scale Districting Problem: A Case Report, *Computers and Operations Research* **15**-6 (1988) 521–533.
- [7] R.S. Garfinkel and G.L. Nemhauser: Optimal Political Districting by Implicit Enumeration Techniques, *Management Science* **16**-8 (1970) B495–508.
- [8] B.C. Gearhart and J.M. Liittschwager: Legislative Districting by Computer, *Behavioral Science* **14** (1961) 404–417.
- [9] J.A. George and B.W. Lamar and C.A. Wallace: Determining New Zealand Electoral Districts Using a Network-Based Model, *Operational Research Society of New Zealand, Proceedings* **29** (1993) 276–283.
- [10] G.R. Grimmett: European apportionment via the Cambridge Compromise, *Mathematical Social Sciences* **63** (2012) 68–73.
- [11] S. Goderbauer: Political Districting for Elections to the German Bundestag: An Optimization-Based Multi-stage Heuristic Respecting Administrative Boundaries, *Operations Research Proceedings* (2014) 181–187.
- [12] C.C. Harris: A Scientific Method of Districting, *Behavioral Science* **9** (1964) 219–225.
- [13] S.W. Hess, J.B. Weaver, H.J. Siegfeldt, J.N. Whelan and P.A. Zitlau: Nonpartisan Political Redistricting by Computer, *Operations Research* **13** (1965) 998–1008.
- [14] 堀田敬介: 市区郡分割を考慮した選挙区画定問題の最適化モデル, *情報研究* **43** (2010) 41–60.
- [15] 堀田敬介: 衆議院議員小選挙区制最適区割 2011, *情報研究* **47** (2012) 43–83.

- [16] 堀田敬介: 選挙区割の最適化と列挙索引化, オペレーションズ・リサーチ **57**-11 (2012) 623–628.
- [17] 堀田敬介: 合県モデルと区割人口頑健性による選挙制度の評価と提言, RIMS 研究集会報告集 **1879** (2014) 79–90.
- [18] 堀田敬介: 合区および総定数変化に対する議席配分最適化, 選挙研究 **31**-2 (2015) 123–141.
- [19] 堀田敬介: 区割画定作業支援のための選挙区割の特徴化, Transactions of the Operations Research Society of Japan **59** (2016) 60–85.
- [20] 堀田敬介: 衆議院議員小選挙区制最適区割 2016, 経営論集 **3**-1 (2017) 1–114.
- [21] 堀田敬介: 複数人選出選挙制度の較差是正のための最適化と限界値分析, Transactions of the Operations Research Society of Japan **60** (2017) 74–99.
- [22] 堀田敬介: 指定都市議会議員選挙の投票価値の平等, 経営論集 **5**-X (2019) 1–20.
- [23] 堀田敬介, 根本俊男, 和田淳一郎: 参議院最適合区について, 公共選択学会 大会 報告論文 (2017/11/18).
- [24] 岩崎美紀子: 選挙と議会の比較政治学, 岩波現代全書 (2016).
- [25] 岩崎正洋 編: 選挙と民主主義, 吉田書店 (2013).
- [26] H.F. Kaiser: An Objective Method for Establishing Legislative Districts, *Midwest Journal of Political Science* **10** (1966) 200–213.
- [27] J. Kawahara, T. Horiyama, K. Hotta and S. Minato: Generating all patterns of graph partitions within a disparity bound, *In Proceedings of the 11th International Conference and Workshops on Algorithms and Computation(WALCOM2017)*, **10167** (2017) 119–131.
- [28] 河村和徳: 現代日本の地方選挙と住民意識, 慶応義塾大学出版会 (2008).
- [29] 久保幹雄, 田村明久, 松井知己編: 応用数理計画ハンドブック, 朝倉書店 (2002).
- [30] 今野浩, 鈴木久敏編: 整数計画法と組合せ最適化, 日科技連 (1982).
- [31] L. Lauwers and T. Van Puyenbroeck: Minimally disproportional representation: generalized entropy and Stolarsky mean-divisor methods of apportionment, *Discussions Paper* (2008).
- [32] P.G. Marlin: Application of the Transportation Model to a Large-Scale “Districting” Problem, *Computers and Operations Research* **8** (1981) 83–96.
- [33] A. Mehrotra, E. Johnson and G. L. Nemhauser: An optimization based heuristic for political districting, *Management Science* **44**-8 (1998) 1100–1114.

- [34] 三輪和宏, 河島太朗: 参議院の一票の格差・定数是正問題. 国立国会図書館 調査と情報 -ISSUE BRIEF- **610** (2008).
- [35] 森脇俊雅: 小選挙区制と区割り 一制度と実態の国際比較一, 芦書房 (1998).
- [36] S.S. Nagel: Simplified Bipartisan Computer Redistricting, *Stanford Law Review* **17** (1965) 863–899.
- [37] S.S. Nagal: Computers and the Law and Politics of Redistricting, *Polity* **5** (1972) 77–93.
- [38] 根本俊男, 堀田敬介: 区割画定問題のモデル化と最適区割の導出, オペレーションズ・リサーチ **48-4** (2003) 300–306.
- [39] 根本俊男, 堀田敬介: 選挙区最適区割問題のモデリングと厳密解導出, 第15回 RAMP シンポジウム論文集 (2003) 104–117.
- [40] 根本俊男, 堀田敬介: 衆議院小選挙区制における一票の重みの格差の限界とその考察, 選挙研究 **20** (2005) 136–147.
- [41] 根本俊男, 堀田敬介: 公平な小選挙区制のための数理モデル, システム/制御/情報 **49-3** (2005) 78–83.
- [42] 根本俊男, 堀田敬介: 一票の重みの格差から見た小選挙区数, 選挙研究 **21** (2006) 169–181.
- [43] 根本俊男, 堀田敬介: 平成大合併を経た衆議院小選挙区制区割環境の変化と一票の重みの格差, Transactions of the Operations Research Society of Japan **53** (2010) 90–113.
- [44] 西平重喜: 各国の選挙 一変遷と実状一, 木鐸社 (2003) .
- [45] 小川 泰: かたちの万華鏡 〈2〉 民主主義の幾何学, 数学セミナー **40-5** (2001) 2–3.
- [46] 大林啓吾, 白水隆 編著: 世界の選挙制度, 三省堂 (2018) .
- [47] 大山達雄: 選挙区議員定数問題の数理, オペレーションズ・リサーチ **32-5** (1987) 269–280.
- [48] 大山達雄: 選挙区事例からみた議員定数配分方法の比較分析, オペレーションズ・リサーチ **32-8** (1987) 551–561.
- [49] T. Oyama: On a Parametric Divisor Method for the Apportionment Problem, *Journal of the Operations Research Society of Japan* **34-2** (1991) 187–221.
- [50] T. Oyama and T. Ichimori: On the Unbiasedness of the Parametric Divisor Method for the Apportionment Problem, *Journal of the Operations Research Society of Japan* **38-3** (1995) 301–321.
- [51] T. Radzik: Newton’s method for fractional combinatorial optimization, *Proceedings., 33rd Annual Symposium on Foundations of Computer Science* (1992) 659–669.

- [52] 最高裁判所: 平成 25 (行ツ) 第 209,210,211 号 選挙無効請求事件 平成 25 年 11 月 20 日 大
法廷判決. (2013).
- [53] 斎藤孝之, 武藤佳恭: 小選挙区区割り問題, *Bit* **28-7** (1996) 88–91.
- [54] 坂口利裕, 和田淳一郎: 選挙区割りの最適化について, 三田学会雑誌 **93-1** (2000) 109–137.
- [55] 坂口利裕, 和田淳一郎: 選挙区割り問題, *オペレーションズ・リサーチ* **48-1** (2003) 30–35.
- [56] 佐藤令: 衆議院及び参議院における一票の格差, 国立国会図書館 調査と情報 -ISSUE BRIEF-
714 (2011).
- [57] 佐藤令: 諸外国の選挙制度, 国立国会図書館 調査と情報 -ISSUE BRIEF- **721** (2011).
- [58] 佐藤令: 諸外国における選挙区割りの見直し, 国立国会図書館 調査と情報 -ISSUE BRIEF-
782 (2013).
- [59] 衆議院議員選挙区画定審議会: 区割りの改定案の作成方針 (2001).
- [60] 衆議院議員選挙区画定審議会: 緊急是正法に基づく区割りの改定案の作成方針 (2012).
- [61] 衆議院議員選挙区画定審議会: 区割り改定案の作成方針 (2016).
- [62] 高橋秀雄: ミニマックス全域森問題に関する研究, 防衛大学修士論文 (1995).
- [63] 鳥井修: グラフ上の頂点分割問題, 東京大学修士論文 (1995).
- [64] 梅津實, 森脇俊雅, 坪郷實, 後房雄, 大西裕, 山田真裕: 新版 比較・選挙政治 —21 世紀初頭
における先進 6 カ国の選挙—, ミネルヴァ書房 (2004).
- [65] W. Vickrey: On the Prevention of Gerrymandering, *Political Science Quarterly* **76** (1961)
105–110.
- [66] 和田淳一郎: 議席配分の方法としてのサン＝ラグ方式, 公共選択の研究 **18** (1991) 92–102.
- [67] 和田淳一郎: 一票の平等について, 公共選択の研究 **26** (1995) 58–67.
- [68] J. Wada: Evaluating the unfairness of representation with the Nash social welfare function,
Journal of Theoretical Politics **22-4** (2010) 445–467.
- [69] 和田淳一郎: 一票の平等, 公共選択の研究 **57** (2011) 64–71.
- [70] 和田淳一郎: 定数配分と区割り -経済学の視点から-, 選挙研究 **28-2** (2012) 26–39.
- [71] J. Wada: A divisor apportionment method based on the Kolm-Atkinson social welfare
function and generalized entropy, *Mathematical Social Sciences* **63** (2012) 243–247.
- [72] J. C. Williams, Jr.: Political Redistricting: A Review, *Papers in Regional Science* **74-1**
(1995) 13–40.

- [73] J.B. Weaver and S.W. Hess: A Procedure for Nonpartisan Districting: Development of Computer Techniques, *The Yale Law Journal* **72** (1963) 288–308.
- [74] T. Yamada, H. Takahashi and S. Kataoka: A branch-and-bound algorithm for the mini-max spanning forest problem, *European Journal of Operational Research* **101** (1997) 93–103.
- [75] T. Yamada and H. Takahashi: The mini-max spanning forest problem with an application to electoral districting, *NDA discussion paper* (1997).
- [76] H.P. Young: Measuring the Compactness of Legislative Districts, *Legislative Studies Quarterly* **XIII** (1988) 105–115.
- [77] 大和 毅彦: 議員定数配分方式について-定数削減, 人口変動と整合性の観点から-, オペレーションズ・リサーチ **48-1** (2003) 23–29.

A 付録

表 A.1: 第 2 妥当選挙区数 (衆議院小選挙区, 2015 速報人口・2016 行政界, $\pm 33.3\%$)

id	都道府県	人口	m	平均	V	E	全選挙区	第 1 妥当	第 2 妥当
1	北海道	5,383,579	12	448,632	68	161	666,053,663	665,118,441	34,806,417
20	長野県	2,099,759	5	419,952	42	99	8,340,377	8,328,438	945,668
40	福岡県	5,102,871	11	463,897	56	123	957,540	952,071	269,790
21	岐阜県	2,032,533	5	406,507	36	80	3,347,226	3,339,986	268,199
7	福島県	1,913,606	5	382,721	31	73	1,676,265	1,667,108	252,093
15	新潟県	2,305,098	5	461,020	38	81	1,097,937	1,094,206	128,434
3	岩手県	1,279,814	3	426,605	27	60	2,080,542	2,063,014	47,800
11	埼玉県	7,261,271	16	453,829	63	158	71,519	70,351	34,823
6	山形県	1,122,957	3	374,319	23	51	370,834	355,549	25,307
8	茨城県	2,917,857	7	416,837	41	87	85,603	84,548	24,511
12	千葉県	6,224,027	14	444,573	53	117	290,453	287,948	23,873
28	兵庫県	5,536,989	12	461,416	46	100	243,856	239,134	18,498
23	愛知県	7,484,094	17	440,241	62	157	9,495	9,144	7,576
46	鹿児島県	1,648,752	4	412,188	31	58	658,416	655,958	6,126
27	大阪府	8,838,908	20	441,945	69	161	6,538	6,207	5,506
34	広島県	2,844,963	6	474,161	28	57	23,101	22,634	4,867
22	静岡県	3,701,181	8	462,648	38	80	12,273	11,661	4,719
19	山梨県	835,165	2	417,583	19	43	94,937	92,600	4,606
29	奈良県	1,365,008	3	455,003	19	42	31,230	29,710	4,590
33	岡山県	1,922,181	5	384,436	28	60	205,407	196,633	4,165
2	青森県	1,308,649	3	436,216	25	48	110,219	108,028	2,606
26	京都府	2,610,140	6	435,023	33	71	6,819	6,320	1,644
13	東京都	13,513,734	30	450,458	56	137	2,225	2,020	1,464
43	熊本県	1,786,969	4	446,742	29	55	47,316	46,571	1,460
9	栃木県	1,974,671	5	394,934	22	47	3,911	3,525	1,019
25	滋賀県	1,413,184	3	471,061	17	34	4,462	4,087	917
5	秋田県	1,022,839	2	511,420	21	42	98,977	95,541	654
4	宮城県	2,334,215	5	466,843	28	56	6,502	6,028	563
10	群馬県	1,973,476	5	394,695	22	44	1,602	1,423	498
14	神奈川県	9,127,323	20	456,366	50	114	697	600	418
36	徳島県	756,063	2	378,032	17	35	20,163	14,817	272
45	宮崎県	1,104,377	3	368,126	16	30	2,396	2,073	119
44	大分県	1,166,729	3	388,910	17	31	3,945	3,363	106
42	長崎県	1,377,780	3	459,260	18	27	2,481	2,305	99
18	福井県	787,099	2	393,550	16	25	1,357	1,121	62
38	愛媛県	1,385,840	3	461,947	18	29	4,955	3,919	49
35	山口県	1,405,007	3	468,336	18	30	1,383	1,208	48
30	和歌山県	963,850	2	481,925	16	25	3,109	2,110	40
39	高知県	728,461	2	364,231	20	34	8,881	6,741	26
37	香川県	976,756	2	488,378	15	24	1,223	1,013	20
32	島根県	694,188	2	347,094	13	20	537	396	20
47	沖縄県	1,434,138	3	478,046	21	29	1,913	1,830	17
41	佐賀県	833,245	2	416,623	17	25	1,810	1,481	16
24	三重県	1,815,827	4	453,957	22	33	321	169	13
16	富山県	1,066,883	3	355,628	12	19	68	29	11
17	石川県	1,154,343	3	384,781	17	25	264	24	4
31	鳥取県	573,648	1	573,648	10	11	1	1	1

表 A.2: 0-1 変数固定数 (衆議院小選挙区, 2005 速報総人口・2006 行政界, $\pm 33.3\%$)

id	都道府県	人口	m	平均	V	0-1 変数	固定	非固定
11	埼玉県	7,053,689	15	470,246	67	2,010	779	1,231
23	愛知県	7,254,432	15	483,629	64	1,920	849	1,071
27	大阪府	8,817,010	17	518,648	63	2,142	1,276	866
40	福岡県	5,049,126	11	459,011	59	1,298	545	753
14	神奈川県	8,790,900	17	517,112	51	1,734	991	743
13	東京都	12,570,904	21	598,614	56	2,352	1,653	699
12	千葉県	6,056,159	12	504,680	51	1,224	696	528
28	兵庫県	5,590,381	12	465,865	46	1,104	636	468
8	茨城県	2,975,023	7	425,003	41	574	135	439
22	静岡県	3,792,457	8	474,057	38	608	285	323
20	長野県	2,196,012	5	439,202	42	420	124	296
26	京都府	2,647,523	6	441,254	31	372	110	262
21	岐阜県	2,107,293	5	421,459	36	360	101	259
34	広島県	2,876,762	7	410,966	28	392	193	199
4	宮城県	2,359,991	6	393,332	28	336	148	188
7	福島県	2,091,223	5	418,245	30	300	115	185
46	鹿児島県	1,753,144	3	584,381	34	204	55	149
3	岩手県	1,385,037	4	346,259	26	208	72	136
10	群馬県	2,024,044	5	404,809	26	260	125	135
9	栃木県	2,016,452	5	403,290	25	250	115	135
33	岡山県	1,957,056	4	489,264	27	216	88	128
43	熊本県	1,842,140	4	460,535	27	216	88	128
15	新潟県	2,431,396	5	486,279	31	310	191	119
6	山形県	1,216,116	3	405,372	23	138	30	108
1	北海道	5,627,424	12	468,952	25	600	500	100
47	沖縄県	1,360,830	4	340,208	21	168	72	96
19	山梨県	884,531	3	294,844	20	120	25	95
25	滋賀県	1,380,343	4	345,086	20	160	66	94
29	奈良県	1,421,367	4	355,342	19	152	59	93
24	三重県	1,867,166	5	373,433	22	220	129	91
2	青森県	1,436,628	4	359,157	25	200	118	82
5	秋田県	1,145,471	3	381,824	21	126	53	73
45	宮崎県	1,152,993	3	384,331	20	120	52	68
35	山口県	1,492,575	4	373,144	19	152	97	55
39	高知県	796,211	3	265,404	20	120	65	55
38	愛媛県	1,467,824	3	489,275	18	108	54	54
36	徳島県	809,974	3	269,991	17	102	48	54
42	長崎県	1,478,630	4	369,658	18	144	95	49
44	大分県	1,209,587	3	403,196	17	102	54	48
18	福井県	821,589	3	273,863	16	96	49	47
30	和歌山県	1,036,061	3	345,354	16	96	51	45
32	島根県	742,135	2	371,068	15	60	18	42
17	石川県	1,173,994	3	391,331	17	102	86	16
41	佐賀県	866,402	3	288,801	19	114	103	11
31	鳥取県	606,947	2	303,474	10	40	29	11
16	富山県	1,111,602	3	370,534	12	72	67	5
37	香川県	1,012,261	3	337,420	15	90	90	0

表 A.3: アルゴリズム step3 反復回数上限値 (衆議院小選挙区, 2015 速報総人口・2016 行政界)

id	都道府県	人口	m	u_d^*	l_d^*	d^*	r^*	X	Y	$\lfloor X/Y \rfloor + 1$
02	青森県	1,308,649	3	436,392	435,894	498	1.001	321	876	1
03	岩手県	1,279,814	3	426,737	426,504	233	1.001	100	1,831	1
05	秋田県	1,022,839	2	511,533	511,306	227	1.000	112	2,253	1
06	山形県	1,122,957	3	374,346	374,288	58	1.000	30	6,454	1
19	山梨県	835,165	2	417,615	417,550	65	1.000	31	6,424	1
20	長野県	2,099,759	5	420,179	419,852	327	1.001	99	1,284	1
29	奈良県	1,365,008	3	455,063	454,972	91	1.000	30	5,000	1
36	徳島県	756,063	2	378,073	377,990	83	1.000	40	4,555	1
39	高知県	728,461	2	364,425	364,036	389	1.001	193	936	1
07	福島県	1,913,606	5	383,297	382,157	1,140	1.003	563	336	2
43	熊本県	1,786,969	4	447,630	446,102	1,528	1.003	639	292	3
46	鹿児島県	1,648,752	4	413,492	411,532	1,960	1.005	655	210	4
21	岐阜県	2,032,533	5	407,194	405,262	1,932	1.005	1,244	210	6
30	和歌山県	963,850	2	483,069	480,781	2,288	1.005	1,143	211	6
15	新潟県	2,305,098	5	465,345	457,768	7,577	1.017	3,251	61	54
47	沖縄県	1,434,138	3	480,811	473,748	7,063	1.015	4,297	68	64
32	島根県	694,188	2	351,043	343,145	7,898	1.023	3,948	44	90
08	茨城県	2,917,857	7	421,704	412,299	9,405	1.023	4,537	44	104
25	滋賀県	1,413,184	3	477,628	466,221	11,407	1.024	4,839	41	119
41	佐賀県	833,245	2	423,546	409,699	13,847	1.034	6,922	30	231
04	宮城県	2,334,215	5	474,592	459,024	15,568	1.034	7,818	30	261
42	長崎県	1,377,780	3	468,209	450,113	18,096	1.040	9,146	25	366
18	福井県	787,099	2	402,041	385,058	16,983	1.044	8,490	23	370
26	京都府	2,610,140	6	454,874	427,471	27,403	1.064	7,552	16	473
34	広島県	2,844,963	6	499,419	465,004	34,415	1.074	9,156	14	655
23	愛知県	7,484,094	17	467,752	427,517	40,235	1.094	12,723	11	1,157
01	北海道	5,383,579	12	475,710	435,326	40,384	1.093	13,305	11	1,210
10	群馬県	1,973,476	5	408,363	375,309	33,054	1.088	19,385	12	1,616
35	山口県	1,405,007	3	482,893	445,981	36,912	1.083	22,354	13	1,720
45	宮崎県	1,104,377	3	401,156	351,492	49,664	1.141	16,633	8	2,080
22	静岡県	3,701,181	8	485,587	440,541	45,046	1.102	22,106	10	2,211
40	福岡県	5,102,871	11	521,449	446,877	74,572	1.167	17,020	6	2,837
28	兵庫県	5,536,989	12	535,807	428,653	107,154	1.250	32,762	5	6,553
11	埼玉県	7,261,271	16	578,245	430,343	147,902	1.344	23,486	3	7,829
33	岡山県	1,922,181	5	477,435	352,885	124,550	1.353	31,550	3	10,517
14	神奈川県	9,127,323	20	516,951	401,272	115,679	1.288	55,094	4	13,774
09	栃木県	1,974,671	5	518,761	351,372	167,389	1.476	43,561	3	14,521
44	大分県	1,166,729	3	478,335	344,041	134,294	1.390	44,868	3	14,957
38	愛媛県	1,385,840	3	515,092	389,825	125,267	1.321	72,121	4	18,031
27	大阪府	8,838,908	20	502,605	375,197	127,408	1.340	66,748	3	22,250
37	香川県	976,756	2	562,001	414,755	147,246	1.355	73,622	3	24,541
17	石川県	1,154,343	3	465,810	294,656	171,154	1.581	90,124	2	45,063
24	三重県	1,815,827	4	594,364	361,835	232,529	1.643	92,121	2	46,061
13	東京都	13,513,734	30	576,526	341,691	234,835	1.687	108,766	2	54,384

How to solve the electoral districting problem

Keisuke Hotta

Faculty of Business Administration, Bunkyo University

khotta@shonan.bunkyo.ac.jp

Received: 31st January 2019 / Accepted: X February 2019

Abstract

In order to implement the election of the constituency system, the electoral district must be defined. It is generally a combinatorial optimization problem to construct an appropriate electoral district based on the guidelines of the country such as constitutional law and law. In Japan, the gap of one vote in the electoral section often becomes a problem, and in order to evaluate based on this index, it is necessary to obtain an optimal solution that gives a limit value, not an approximate solution. However, in some cases, it is very difficult to obtain the optimal solution for this problem. This paper summarizes the details about the way to obtain the optimal solution established by Nemoto and Hotta [38, 39]. In particular the method to get the solution of the minimum ratio easily and its computational complexity analysis are indicated.

Keyword: apportionment problem, electoral redistricting problem, the maximum disparity among values of votes in different constituencies, optimization for the minimum ratio, complexity, 0-1 mixed integer programming, graph partitioning, connected component decomposition

Faculty of Business Administration, Bunkyo University

1100 Namegaya, Chigasaki, Kanagawa 253-8550, JAPAN

Tel +81-467-53-2111, Fax +81-467-54-3734

<http://www.bunkyo.ac.jp/faculty/business>