選挙区最適区割問題のモデリングと厳密解導出
Political Redistricting in Japan

根本 俊男　　堀田 敬介
Toshio NEMOTO　　Keisuke HOTTA

文教大学 情報学部
〒 253-8550 神奈川県茅ヶ崎市行谷 1100

Faculty of Information and Communication
Bunkyo University
1100 Namegaya, Chigasaki, Kanagawa 253-8550, JAPAN

{nemoto,khotta}@shonan.bunyo.ac.jp

概要

日本の衆議院議員選挙は小選挙区比例代表並立制により実施されている．その小選挙区制の実施に必要な 300 選挙区を一票の重みの格差が最小になるように画定する最適化問題を考える．導出する区割は, 政治学の観点から厳密解であることが重要である．米国を中心に区割の画定を扱った事例は報告されているが, 日本の制度とは区割の原則が異なり利用は難しい．また, 日本の場合は問題規模が比較的大きい上に厳密性が求められるので既存の手法では全選挙区の最適区割の導出が困難であった．本研究では, 問題のモデル化と定式化, そして厳密解を求める方法などを見直すことで, 初めて全 300 選挙区の最適区割の導出に成功した．さらに, 従来では具体的な数値として示すことは困難であった様々な指標の計測も最適区割の情報から可能となり, 選挙制度のデザインをサポートする新たなツールも提供できることとなった．

Abstract

We consider the political redistricting problem for the 300 single-seat constituencies of the House of Representatives in Japan. This problem becomes 47 redistricting subproblems because the 300 single-seats are apportioned to 47 prefectures by law. There are two difficulties to solve them. One is the size of subproblems. For example, Tokyo consists of 56 cities and 25 districts. The other is the difference in districting rule between Japan and well-studied countries such as the United States. In US, compactness, geographical criteria, is emphasized, but it is of little significance in Japan. It is important not to divide city into smaller parts, and to find the optimal solution to make an index of *gerrymander*. Consequently, it is hard to find the exact solution, not an approximate solution, with a conventional method. However, we formulated subproblems as two combinatorial optimization problems, the set partition type and the graph partition type, solved them with some interesting ideas, and then obtained the optimal 300 districts for the first time.

キーワード: モデリング, 小選挙区制, 区割画定問題, 組合せ最適化，大規模問題

1. はじめに

日本をはじめ多くの民主主義制度の国では意思表明を自由に行なうことができ, かつそれは平等に扱われることが保障されている．この自由と平等の保障を象徴する重要な制度が**選挙**である．そ

の選挙の方法には有権者の意思をどのように議席に反映させるかにより様々な形式が存在する．それらを大きく分類すると, 多数派の意思をより鮮明に反映させたい場合は, 最多得票 1 名を当選させる**小選挙区制**となり, 少数派の意思もある程度まで反映させたいときは, 得票数に応じて複数人を当選させる**大選挙区制**となる．どのような選挙制度でも, 選挙が民主主義の自由と平等を保障する制度であるため, 1 人が投じる**一票の重み** (価値) を平等にするのが原則である．この 1 票の重みの計測方法はいくつか考えられるが, ここでは,

$$（一票の重み）=\frac{(議席数)}{(人口)} \tag{1}$$

と約束する．一票の重みの逆数を, **議員一人当たりの人口**とよぶこともある．選挙区が 1 つの場合は一票の重みは各人平等である．しかし, 複数選挙区の場合は, 必ずしも等しくならない．この一票の重みの差を**一票の重みの格差**とよび, 小さい方が好ましい．格差の数値化は比で定められることが多く, ここでも以下のように定義する．

$$（一票の重みの格差）_{(倍)}=\frac{(一票の重みが最大の選挙区の一票の重み)}{(一票の重みが最小の選挙区の一票の重み)} \tag{2}$$

外国の選挙制度を調べると一票の重みの格差の許容範囲は 1.5 倍未満と設定することが多いようだ．米国の場合は, ほぼ 1 倍にしなくてはならない．一方, 日本の衆議院議員選挙は 1994 年から小選挙区比例代表並立制で実施され, その中の小選挙区制では一票の重みの格差は 2 倍未満と定められている．外国の例と比べると緩い上限だが, 導入当時から 1 票の重みの格差は 2 倍を超え, 2002 年に再画定を行なったにもかかわらず, いまだ 2.064 倍と法律上の上限を破る状態を続けている．

この日本の小選挙区制での一票の重みの格差の大きさに対しては批判が多い（例えば, 2002 年 7 月 27 日読売新聞社説, 2002 年 7 月 19 日毎日新聞社説, 2001 年 12 月 21 日朝日新聞社説)．その批判のほとんどは議席数 300 のうち 47 議席を各都道府県へ 1 議席ずつ事前配分し, 残りの 253 議席を全人口に対する各都道府県の人口に応じて比例配分する (**1＋最大剰余法**) という独特な議席配分方法に集中している．この議席数の配分方法に関する問題は OR や公共政策の分野で多くの研究がなされ**定数配分問題**とよばれている [1], [15]．この定数配分問題からの知見に基づいた批判の方向は正しいが, 一票の重みの格差を縮小させるという観点からは必ずしも十分ではない．なぜなら, 大選挙区制では定数配分数が一票の重みの格差の変化に直接影響を与えたが, 小選挙区制においてはその間接要因でしかないからだ．これは, 議席数を 1 に固定すると一票の重みの格差が次のように書き換えられることからわかる．

$$（小選挙区制での一票の重みの格差）_{(倍)}=\frac{(最大人口選挙区の人口)}{(最小人口選挙区の人口)} \tag{3}$$

つまり, 小選挙区制での一票の重みの格差は選挙区の人口で決まる．各選挙区の人口を決めるのは選挙区の区割なので, 小選挙区制では大選挙区制とは異なり, 各選挙区の人口差が少ない区割画定が一票の重みの格差を縮小させる直接要因になる．さて, 各都道府県に配分議席数が与えられたとき, 一票の重みの格差を最小にする区割を決める最適化問題を**区割画定問題**, その最適解を**最適区割**とよぶ．もちろん, 各都道府県を最適区割に画定したとしても, 各都道府県への定数配分が適切でなければ全国での一票の重みの格差は縮小しない．全国での一票の重みの格差を最小化するには, 各都道府県への定数配分問題と各都道府県ごとでの区割画定問題を同時に考える必要がある．この全体を最適化する問題を**小選挙区区割問題**, その最適解を**全国最適区割**とよぶ．

本研究では, 日本の小選挙区制における全国最適区割の導出を目指す．導出成功により, それを現区割への対抗案として提示可能になるが, その利用は想定していない．なぜなら, 地勢や歴史な

ど様々な要因が複雑に絡み合う現実の区割の作業と, 明確化できる作業ルールの部分しか扱えない数理モデルの間の差は大きいからだ．全国最適区割を導出する意義は, 曖昧な状況も恣意性も排した極端な区割案の情報を実際の区割作業に提供することにあると考える．明確に把握できる区割ルールの範囲で一票の重みの平等を追求した最適区割には恣意性がない．それが具体的に提示されていることにより, 実際の区割作業の中で一票の重みの平等を破ってまで最適区割と異なる案の採用を主張するには十分な説明が必要となる．これは, 区割の客観性を高める重要な仕組みになる．この区割に対する客観的な指標としての最適区割の利用法は, 政治学で提唱されているアイディアにもつながっている．ある党派に有利になるよう恣意的に区割を画定する**ゲリマンダリング**の度合いを計測する指標として最適区割が必要とされている [8]．ただ, 最適区割の導出は困難が多く, 実際の利用例は限られていた．各都道府県での最適区割の導出で実用に道が開かれることになる．ここで, 客観性のために最適区割の厳密性が重要で近似では意味を成さない点には注意が必要である．また, 一票の重みの格差の原因は定数配分と区割だが, 最適区割は両者の格差に対する原因の計測も可能となり, 様々な定数配分法の新しい計量化法を提供する．これらの例をはじめ, 全国最適区割の導出により多方面に有益な影響を与えると考える．

日本での全国最適区割への取り組みは著者の知る限り存在しないが, 区割に関する数理的なアプローチは 2000 年以前から研究されている [5],[11]．それらは高々5 選挙区の県に対しての結果で, 選挙区数の多い都道府県で導出に成功した事例はない．海外では, 主に米国で 1960 年代から区割に関する研究がされてきた [4]．しかし, 米国の場合は選挙区に形が**コンパクト**であることと一票の重みの格差を限りなく 1 倍に近づけることが強く要請され行政単位の分断は重視しないが, それを重視する日本とは問題の土台が異なる．また, 海外での研究のほとんどは近似解法に基づいており [2], 厳密解を導出したい本研究とは方向が異なる．

日本で最適区割の導出がなされてこなかった主な理由を 3 点指摘したい．1 点目の理由は, 小選挙区制の歴史の浅さである．1994 年までは大選挙区制 (中選挙区制) が採用され, 区割画定問題より格差是正に有効な定数配分問題に対する研究が重視されたと思われる．2 点目の理由は, 実際の区割作成は原則的な方針のみで行なわれ, 曖昧なルールが存在する点である．政治的・制度的解釈を確認しながら, その曖昧な点を恣意性の無い形で明確化していく作業は難しく, 数理的な取り組みを遠ざけたと思われる．3 点目の理由は, 適切な数理モデルを作成しても, それに対し効率的に厳密解を見つけるのは困難だからである．1 点目の歴史の浅さに対しては, 今後の研究で定数配分問題とバランスが取れるように理論的な基盤を整備していかなくてはならないだろう．2 点目のモデル化の困難性は, モデル化作業とその適用結果検証を実験的に繰り返すことで解決可能であろう．ただ, 3 点目の求解の困難性により, この反復に必要なツールは存在しなかった．しかし, 最近になり日本の小選挙区制を題材にした研究が坂口・和田 [8, 9], 根本・堀田 [12, 13, 14] のふたつのグループで進み, 現在の各都道府県への議席配分数の下での全都道府県の最適区割導出が報告されるなど技術的な基盤が整備されつつある．結果的に, 明確なモデル作成や全国最適区割の導出に良い影響が出始めている．

さて, ここでは全国最適区割の導出に向けてのアイディアを紹介していきたい．まずは, 定数配分問題に比べ理論整備が遅れている区割画定問題の捉え方を解説し, 現在の議席配分の下での全都道府県の最適区割を初めて導出した結果を報告する．その後で, 区割画定問題への取り組みから得たツールを利用し, 小選挙区区割問題へのアプローチ方法について考えていきたい．

2.　区割画定問題

日本の小選挙区制での区割画定問題を明確にし, それに対する定式化を 2 つ紹介する.

2.1. 数理モデル化

小選挙区の区割画定作業は, 法律により設置された衆議院議員選挙区画定審議会が**区割案の作成方針**に則り行う (cf.[10]). その主な内容は以下の通りである.

方針 (1) 全国での 1 票の重みの格差は 2 倍未満が基本.

方針 (2) 市区郡は分割しない.

方針 (3) 選挙区内で飛び地を作らない.

方針 (4) 地域のつながりを考慮する.

他にも, 1 選挙区に許容される人口の上下限制約や 1 つの市区郡を分割する場合の方針なども記述されている. この作成方針には地域のつながりの定義が無いなど曖昧な点が見受けられる. そこでまずは明確に定まる部分のみを考慮した数理モデルを作成することで問題を把握する.

区割案の作成方針は定数配分を含んだ作業を想定している. ここでは, 区割画定問題と定数配分問題を独立に扱いたいので, 各都道府県への配分議席数は与えられていると仮定し, 各都道府県では一票の重みの格差を最小にする区割を導くように方針 (1) を次の目的 $(1')$ に書き直すことにする.

目的 $(1')$ 都道府県内で, 1 票の重みの格差を最小.

都道府県内の 1 票の重みの格差を最小にする区割は, 与えられた議席配分の下で全国でも格差を最小にする区割となる. もしそれが 2 倍未満なら方針 (1) とは矛盾しない. 次に方針 (2) は, 市区郡を 1 つの要素として扱えば自ずと満たされる. 方針 (3) は, 各市区郡間に行政界での隣接関係を定め, 選挙区は連結な市区郡で構成すると読み替えればよい. 最後に, 方針 (4) は, 地勢, 交通, 歴史的沿革などの自然的社会的条件を総合的に考慮すると政治的に解釈される. しかし, ここでは方針 (3) で方針 (4) も満足させたと捉え, 島のように行政界の隣接だけでは説明不足が生じる場合に限り交通のつながりを補完的に隣接とみなし地域のつながりとした. さらに選挙制度の基本的な設定を加味し, 都道府県毎の区割画定問題は次のようにモデル化できる.

入力 市区郡集合 $V = \{v_1, \cdots, v_n\}$, 市区郡の隣接関係 $E = \{\{v_i, v_j\} | v_i \text{と} v_j \text{は隣接}\}$,
各市区郡の人口 $p_i (i = 1, \cdots, n)$, 選挙区数 $m\ (< n)$.

出力 一票の重みの格差が最小の区割 (最適区割).

制約 1 選挙区は連結な市区郡で構成する.

制約 2 すべての市区郡は唯一つの選挙区に属す.

制約 3 選挙区数は m.

2.2. 定式化

前節で明確化した区割画定問題の定式化は複数考えられる. 既存の定式化や解法から紹介しよう. まずは集合分割問題が考えられる [7]. 次に, 最小 m 全域森問題 [5] やグラフ頂点分割問題 [11] としての定式化がある. いずれも分枝限定法で最適解導出を試みているが, 高々5 選挙区が限界であった. また, いずれも選挙区の中心市区郡事前指定が必要であり, 恣意性が入る余地がある. これらは解法の性能評価実験の中で区割画定問題を利用した研究である. 区割画定問題に正面から向かった研究では, コンパクト性という選挙区の形状制限を導入し, 列生成法で解を導出した米国での研究は興味深い [3]. しかし, 区割線をある程度自由に設定可能という米国の制度を利用しているので, 日本の場合に利用は難しい. 日本の小選挙区区割への取り組みは, 坂口・和田が最初だろう [8]. 区割画定問題の重要性を指摘し, 選挙区数の少ない県での最適区割を提示した. その後,

入力データが明確に得られる 24 県に議論を絞り, 選挙区の形状を制限する手法での区割も導出している [9]. ただし, この制限のため, 最適性の保障は無い.

過去の研究を参考に, 新たにいくつかの定式化を考えてみた. その中で実験的に良い結果を出した**集合 m 分割型**と**グラフ分割型**の 2 つをここでは採り上げる. どちらも組合せ最適化問題として表現している点で共通している. しかし, 制約 1 の選挙区内の連結性を入力段階で強制するか, 制約条件として強制するかの点で大きく異なる.

2.3. 集合 m 分割型

はじめに, 集合分割問題 [7] を基にした集合 m 分割型モデルを示そう. まず, 制約 1 を満たす市区郡の集合を**ブロック**と名付ける. つまりブロックは選挙区の候補である. すべてのブロックの集合を $\mathcal{B}$ で表す. ブロック集合 $\mathcal{B}$ から選んだ m 個のブロックが制約 2 を満たすと, 実行可能な区割となる. その中で 1 票の重みの格差が最小な区割を見つけるのが集合 m 分割型である.

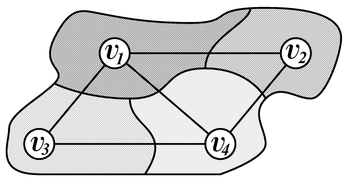

図 1: 4 市区郡の例とそのグラフ表現 (V, E)

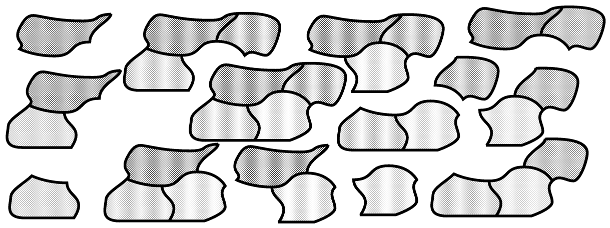

図 2: 例に対するブロック集合 $\mathcal{B}$

入力データ 市区郡集合 V, 選挙区数 m, ブロック集合 $\mathcal{B}$ を表す行列 $[b_{ij}|i \in N, j = 1, \cdots, |\mathcal{B}|]$: 市区郡 v_i がブロック j の構成要素なら b_{ij}=1; そうでないなら $b_{ij} = 0$, ブロック j の人口 $q_j = \sum_{i \in N} b_{ij} p_i$ $(j = 1, \cdots, |\mathcal{B}|)$.

変数 1 つの選挙区の人口上限を示す変数 u, 下限を示す変数 l, $\{0,1\}$-変数 x_j $(j = 1, \cdots, |\mathcal{B}|)$:区割にブロック j を使用する時 $x_j = 1$; しない時 $x_j = 0$.

定式化

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & u/l & (4)\\
\text{s.t.} \quad & q_j x_j \ \le \ u \quad (j = 1, \cdots, |\mathcal{B}|) & (5)\\
& \alpha(1 - x_j) + q_j x_j \ \ge \ l \quad (j = 1, \cdots, |\mathcal{B}|) & (6)\\
& \textstyle\sum_{j=1,\cdots,|\mathcal{B}|} b_{ij} x_j \ = \ 1 \quad (i \in N) & (7)\\
& \textstyle\sum_{j=1,\cdots,|\mathcal{B}|} x_j \ = \ m & (8)\\
& x_j \in \{0, 1\} \quad (j = 1, \cdots, |\mathcal{B}|) & (9)
\end{aligned}
$$

ここで, α は十分大きな定数, $N = \{1, \cdots, n\}$ とする. 条件式 (7)〜(9) は制約 2 と制約 3 を表現している. すべてのブロックは制約 1 を満たしているので, 実行可能解 x から導かれる m 個のブロックは実行可能な区割である. 条件式 (5), (6) は使用するブロックの人口上・下限制約なので, 目的関数 (4) は, 1 票の重みの格差を示し, 区割画定問題を表現している.

このモデルの長所は, 表現が容易な点と, $\mathcal{NP}$-困難のクラスに属す問題であるが, 実際には中規模サイズ程度なら最適解を発見しやすい点である [6]. 一方, 短所は, 各都道府県においてブロック数 $|\mathcal{B}|$ が大きな数になりやすい点である. 例えば, 49 市区郡を持つ神奈川県では少なくとも 21 億個以上のブロックが存在する.

2.4. グラフ分割型

次に, ある種のネットワークフロー問題として捉えることで制約 1 を満足させる定式化を提案する．まず, モデルの基になるネットワークを定義したい．市区郡集合 V とその隣接関係 E のペア (V,E) は無向グラフである．このグラフの無向枝を互いに逆向きの 2 本の有向枝に置き換えた有向グラフを (V,A) とする．この有向グラフを m 個複製し, 各々を (V^k,A^k)=$(\{v_i^k|i\in N\},\{a^k|a\in A\})$ $(k\in M)$ と表す．ここで, $M=\{1,\cdots,m\}$ である．また, これとは別に点集合 $S=\{s^k|k\in M\}$, 枝集合 $A_{sk}=\{(s^k,v_i^k)|i\in N\}$ $(k\in M)$ と, 点集合 $T=\{t_i|i\in N\}$, 枝集合 $A_{it}=\{(v_i^k,t_i)|k\in M\}$ $(i\in N)$ を準備する．これらを, 点集合 $\bar{V}=\cup_{k\in M}V^k\cup S\cup T$, 枝集合 $\bar{A}=\cup_{k\in M}(A_{sk}\cup A^k)\cup\cup_{i\in N}A_{it}$ とまとめ, 拡大有向グラフ $(\bar{V},\bar{A})$ を定める．この拡大有向グラフを基に, 各枝の容量は十分大きいという情報を付したネットワーク $\mathcal{N}$ を定め, 次のようにモデル化を行なう．

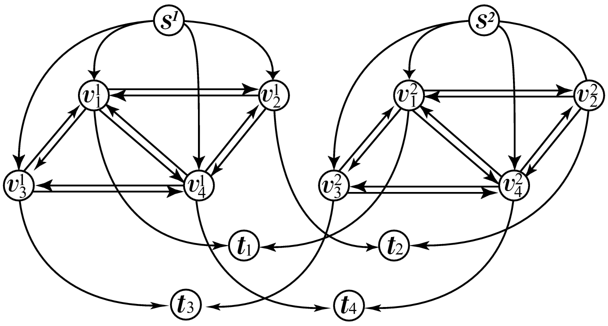

図 3: 例に対する 2 選挙区の場合の拡大有向グラフ

入力データ ネットワーク $\mathcal{N}$, 市区郡の人口 p_i $(i\in N)$, 十分大きな流量 β.

変数 枝 $a\in\bar{A}$ に流れるフロー $f(a)$, $\{0,1\}$-変数 y_{ik} $(i\in N,k\in M)$: 枝 (s^k,v_i^k) のフローが正の時 $y_{ik}=1$; 0 の時 $y_{ik}=0$, $\{0,1\}$-変数 z_{ik} $(i\in N,k\in M)$: 点 v_i^k に流れ込むフローの和が正の時 $z_{ik}=1$; 0 の時 $z_{ik}=0$.

定式化

$$\begin{aligned}
\min.\quad & u/l && (10)\\
\text{s.t.}\quad & l\le\textstyle\sum_{i\in N}p_iz_{ik}\le u\ (k\in M) && (11)\\
& \textstyle\sum_{a\in\delta^-v_i^k}f(a)=\sum_{a\in\delta^+v_i^k}f(a)\ (i\in N,k\in M) && (12)\\
& f(a)\ \ge\ 0\ (a\in\bar{A}) && (13)\\
& f((s^k,v_i^k))\ =\ \beta y_{ik}\ (i\in N,k\in M) && (14)\\
& \textstyle\sum_{i\in N}y_{ik}=1\ (k\in M) && (15)\\
& y_{ik}\in\{0,1\}\ (i\in N,k\in M) && (16)\\
& \textstyle\sum_{a\in\delta^-v_i^k}f(a)\le\beta z_{ik}\ (i\in N,k\in M) && (17)\\
& z_{ik}\ \le\ f((v_i^k,t_i))\ (i\in N,k\in M) && (18)\\
& \textstyle\sum_{k\in M}z_{ik}\ =\ 1\quad (i\in N) && (19)\\
& z_{ik}\in\{0,1\}\quad (i\in N,k\in M) && (20)
\end{aligned}$$

ここで, $\delta^+v(\delta^-v)$ は, 点 v から出る (に入る) 枝集合を示す．条件式 (12) と (13) はフロー条件である．各点 s^k から T 側にフローは流れる．続く条件式 (14)〜(20) で, 流れるフローを 2 つの方針で制御する．まず, 条件式 (14)〜(16) で, グラフ (V^k,A^k) のちょうど 1 点に s^k から β のフローが流

入するよう制御している．次に，条件式 (17)〜(20) で，点 v_i^k に流入する正の値のフローがあれば，必ず枝 (v_i^k, t_i) にも正の値のフローが流れるように制御している．ただし，条件式 (19) により，各枝集合 $A_{it}(i \in N)$ の中でフローが流れるのはちょうど 1 本ずつである．

ここで，この定式化の実行可能解に対し，点部分集合 $B^k = \{v_i | z_{ik} = 1\}(k \in M)$ を定める．フローの制御により，集合 B^k は非空で，互いに疎で，$\cup_{k \in M} B^k = V$ なので，区割画定問題の制約 2 と制約 3 を満たす．さらに，条件式 (18) よりフローが流入しない点で $z_{ik} = 1$ にはならず，隣接関係に沿ってのみフローが流れるので，集合 B^k は制約 1 の連結性も満たしている．条件式 (11) が各 B^k の人口の上・下限制約になっていることから目的関数は一票の格差を最小にしており，これも区割画定問題を定式化している．

この定式化の長所は，グラフ利用の過去の定式化に必要だった中心市区郡指定が無く恣意性が排除できた点にある．逆に短所は，$\{0, 1\}$-整数変数の数が $2nm$ 個と多い点である．素朴に分枝限定法で解こうとすると多くの計算時間を要す．例えば，24 市区郡の島根県の最適な 3 選挙区を見出す比較的小さなサイズの問題でも約 37 時間を費やした．

3.　入力データの準備

上記で紹介した 2 つの定式化を用いて実際に最適区割を導出したい．その前に，それに必要な入力データを明確にしておく．区割画定の作業は国勢調査の速報値が発表されたのを受け実施されると定められており，2000 年 10 月がデータの基準時になる．

3.1. 市区郡集合と人口

基準時に実在する市区郡 (北海道のみ郡ではなく支庁) が要素になる．ただし，1 つの市区郡が地理的に分断されている場合は，各々を別な要素とする．そのため，実際の市区郡数と入力データの市区郡数は一致しない．各要素の人口は区割方針に従い 2000 年国勢調査の速報値を用いた．

3.2. 人口の多い市区の分割

方針 (2) により基本的に市区郡は分割しない．しかし，都道府県および全国の議員 1 人当たりの人口 (以後，**平均人口**) の小さい方の 4/3 を 1 つの市区人口が超える場合は分割を行なうとの例外事項がある．判断基準は明確だが，分割方法は示されず，その方法が問題になる．ここでは，該当市区にまずは平均人口を持つ 1 選挙区 (さいたま市のみ 2 選挙区) を仮想的に割り当て，該当市区は残りの人口を持つ要素で残した．この方法だと，該当市区は 1 つの選挙区を他と共有するが，残りの選挙区は独自に持つ．この方法の利点は，分割される部分がどこと選挙区を共有するかに恣意性が入らない点である．欠点は，事前に割り当てる人口を平均人口と決めている点である．この欠点は，割当人口をパラメータとして定式化に導入する方法で対処できる．

3.3. 人口の少ない選挙区を防ぐための分割

ある市区郡を分割しない限り近隣の選挙区人口が平均人口の 2/3 を下回る場合も例外で分割が許される．これは，上記とは異なり分割前の最適区割を見て判断されるべき処置で，その情報が無いときは恣意性が入る余地がある．ここでは，分割前の最適区割を基に千葉県の市川市，松戸市と三重県の四日市市などを該当させた．分割方式は，各市の地区情報を利用する手段もあるが，選挙区を共有すべき市区郡とで平均人口になるように一方を定め，残りの人口を該当市に割り当てた．

3.4. 隣接関係

市区郡集合の要素の行政界が陸上で隣接している場合に隣接関係を定めた．陸上以外でも，橋 (道路) で結びついている場合は隣接とみなした．島の場合は，飛行機または船での定期的な交通機関が存在する場合にその 2 市区郡間を隣接とみなした．

4. 最適区割導出のための工夫

区割画定問題に対する 2 つの定式化にデータを入力しただけでは最適解を得るのは困難なケースが多い．ここでは, 最適解導出のために加えた工夫のいくつかを紹介する．

4.1. 最小差問題の利用

区割画定問題は比を最小化する数理計画問題である．最小比問題は, パラメータを導入した線形最小化問題に変形し, それを何度か解く解法が一般的である．しかし, 変形後の問題でも解導出に時間を費やす本問題ではこの方法を直接適用することは難しい．そこで，最小差を達成する区割が, 最小比も達成しているかを判定する条件を区割画定問題の特徴から導くことで, 目的関数を $u-l$ とした最小差問題を実際は解き, 最小比を見つけている保証がない時に限り, 探索範囲を限定した最小差問題を解き直すという工夫でこの困難を回避した.

4.2. ブロックの列挙

集合 m 分割型で用いるブロック集合 $\mathcal{B}$ を準備するには, 無向グラフ (V,E) 上で連結な部分グラフを列挙すればよい．列挙は, 再帰呼出し型解法で可能である (cf.[6] 第 14 章)．しかし, 市区郡数の少ない県でもブロック数は膨大で, 入力ブロックの選別が必要になる．

表 1: 都道府県毎の 1 票の重みの格差 (東日本)：現区割と最適区割との比較

県名	市区郡	人口	選挙区	平均人口	現区割		最適区割				
					格差	分割	最大人口	最小人口	格差	分割	定式化
北海道	63	5682950	12	473579	1.531	-	526639	359526	1.465	-	SP
青森県	20	1475635	4	368909	1.436	-	402408	331999	1.212	-	GP
岩手県	30	1416198	4	354050	1.193	-	356696	350520	1.018	-	SP
宮城県	31	2365204	6	394201	1.755	-	429750	351141	1.224	-	SP
秋田県	18	1189215	3	396405	1.395	-	420746	382840	1.099	-	GP
山形県	24	1244040	3	414680	1.159	-	415552	413565	1.005	-	GP
福島県	27	2126998	5	425400	1.667	-	436690	412832	1.058	-	SP
茨城県	43	2985424	7	426489	1.754	-	438192	378631	1.157	-	SP
栃木県	23	2004787	5	400957	1.610	-	443787	382598	1.160	-	GP
群馬県	27	2024820	5	404964	1.374	1	423108	394737	1.072	-	SP
埼玉県	60	6938004	15	462534	1.364	1	514467	430912	1.194	1	SP
千葉県	48	5926349	13	455873	1.470	2	464418	443979	1.046	3	SP
東京都	56	12059237	25	482369	1.463	5	536000	421504	1.272	5	SP
神奈川	49	8489932	18	471663	1.589	1	528821	417838	1.266	1	SP
新潟県	48	2475724	6	412621	1.452	-	527271	388198	1.358	-	SP
富山県	17	1120843	3	373614	1.513	-	381907	363538	1.051	-	GP
石川県	18	1180935	3	393645	1.363	-	456434	334780	1.363	-	GP
福井県	18	828960	3	276320	1.018	-	278754	273700	1.018	-	GP
山梨県	19	888170	3	296057	1.099	-	296643	295714	1.003	-	GP
長野県	40	2214409	5	442882	1.687	-	443547	442346	1.003	-	SP
岐阜県	36	2107687	5	421537	1.407	-	431628	417842	1.033	-	SP
静岡県	39	3767427	8	470928	1.411	2	512807	443878	1.155	1	SP
愛知県	66	7043235	15	469549	1.639	-	482687	460403	1.048	-	SP

※ 市区郡 ：市区郡要素数．地理的に分離している市区郡は別要素のため実際数とは異なる．
選挙区 ：選挙区数 (配分議席数)
平均人口 ：人口を選挙区数で除した数 (小数点以下四捨五入).
格差 ：一票の重みの格差
分割 ：分割した市区郡数．ハイフン (-) は分割市区郡なしを示す.
定式化 ：短かい計算時間で求解した定式型．SP が集合 m 分割型を, GP がグラフ分割型を示す.

まず, 最適解の最大人口より大きいとの保障のある上限 U と最小人口より小さいとの保障のある下限 L を定める．これらを定めるには現在の区割や近似解法での解を参考に導出してもよいし, 区割方針より, 上限 U を平均人口の 4/3 倍, 下限 L を平均人口の 2/3 倍と定めてもよい．U と L の差は小さいほうが好ましいが, 最適解を削除する可能性がない範囲で数値設定を工夫する必要がある．この U と L の間の人口を有するブロックを**第 1 妥当ブロック**とよぶ．定義より, 入力データを第 1 妥当ブロック集合に制限しても元の問題と最適解は同じである．この選別で, 多くの都道府県では数百〜数十万個にブロック数が減少するが, まだその数は多い．

さらに, ブロックに属す市区郡の組合せで選別を行なう．ある第 1 妥当ブロック B とそれに接続する枝をグラフ (V, E) から除くと残ったグラフが非連結になる時がある．残った連結部分の 1 つが人口下限 L を下回ると, 元のブロック B は実際には実行可能解として利用はできないと判断できる．第 1 妥当ブロック集合からそのようなブロックをすべて除いたものを, **第 2 妥当ブロック集合**とよぶ．このアイディアの延長で, 人口上限 U を利用した選別方法などもあるが省略する．この選別も有効で, 数十〜数万ブロックまで減少する都道府県が出てくる．この程度のブロック数だと, 集合 m 分割型で実際に最適解を計算できる段階に入る．

4.3. グラフ分割型での前処理

グラフ分割型の欠点は $\{0,1\}$-変数の多さで, 計算機実験でも少し大きなサイズの問題になると最適解を出すまでに長時間かかる．そこで, この $\{0,1\}$-変数を事前に 0 か 1 に固定したい．いくつかの固定は簡単である．例えば, グラフ (V^1, A^1) には枝 (s^1, v_1^1) からフローが流れると仮定でき, $y_{11} = 1$, $y_{1k} = 0$ $(k = 2, \cdots, m)$ と事前固定できる．ただし, これ以外の固定は自明では無い．グ

表 2: 都道府県毎の 1 票の重みの格差 (西日本)：現区割と最適区割との比較

県名	市区郡	人口	選挙区	平均人口	現区割		最適区割				
					格差	分割	最大人口	最小人口	格差	分割	定式化
三重県	32	1857365	5	371473	1.371	1	387236	353176	1.096	1	GP
滋賀県	21	1342811	4	335703	1.285	-	349980	324384	1.079	-	GP
京都府	36	2644331	6	440722	1.616	-	442941	437779	1.012	-	SP
大阪府	64	8804806	19	463411	1.435	1	515055	376428	1.368	1	SP
兵庫県	53	5550742	12	462562	1.425	-	505892	419842	1.205	-	SP
奈良県	19	1442862	4	360716	1.081	-	366196	357309	1.025	-	GP
和歌山	16	1069839	3	356613	1.326	-	386501	327477	1.180	-	GP
鳥取県	11	613229	2	306615	1.155	1	307014	306215	1.003	1	GP
島根県	24	761499	2	380750	1.120	-	380877	380622	1.001	-	GP
岡山県	32	1950656	5	390131	1.257	1	430239	377590	1.139	1	GP
広島県	43	2878949	7	411278	1.252	1	427485	404818	1.056	-	SP
山口県	30	1528107	4	382027	1.300	-	386749	379745	1.018	-	SP
徳島県	15	823997	3	274666	1.034	1	279701	271132	1.032	-	GP
香川県	16	1022843	3	340948	1.192	-	372585	321795	1.158	-	GP
愛媛県	28	1493126	4	373282	1.490	-	479737	328647	1.460	-	GP
高知県	19	813980	3	271327	1.004	2	271360	271293	1.000	2	GP
福岡県	57	5015666	11	455970	1.523	-	465803	437601	1.064	-	SP
佐賀県	21	876664	3	292221	1.027	1	306629	283683	1.081	-	GP
長崎県	22	1516536	4	379134	1.630	-	450080	317646	1.417	-	GP
熊本県	24	1859451	5	371890	1.440	1	421302	318321	1.324	1	GP
大分県	27	1221128	3	407043	1.130	-	436490	389220	1.121	-	GP
宮崎県	20	1170023	3	390008	1.139	-	392845	387415	1.014	-	GP
鹿児島	35	1786214	5	357243	1.285	1	376150	340165	1.106	1	SP
沖縄県	21	1318281	4	329570	1.120	-	334811	321131	1.043	-	GP

ラフ (V^1, A^1) 以外のグラフではどの点にフローが流入するか定まらないからだ．しかし, グラフ (V^1, A^1) では点 v_1^1 を始点に連結成分を探しているので, もし点 v_1^1 とは同じブロックにはならない点を発見できたら, その点に関しては変数固定作業が可能となる．

ある点と同一のブロックにはならない点の探索は, グラフ上で人口上限以内で到達可能な点を探索しながら限定する方法や, 第 2 妥当ブロックの情報で絞り込む方法が考えられる．残った変数が数百個程度だと最適解の導出が可能になる．

どちらかのモデルで格差の小さい実行可能解が得られると, それを利用して, 第 2 妥当ブロック集合の縮小化とグラフ分割型で固定する変数の数の増加が期待でき, 問題が解きやすくなる．実際に，一方の定式化では最適区割の導出が困難であった都道府県に対しては, その定式化で得られた暫定解の情報をもう一方で活用する操作を相互に用いることで, 解導出を高速化した．

5.　現定数配分の下での最適区割の導出

現在の定数配分の下で各都道府県での最適区割を導いた．全 300 選挙区の最適区割を導出した初めての結果である．成功のポイントは, 一つのアプローチにこだわらず様々な定式化を採用し, さらにそれらをハイブリットに用いた点にある．逆に, 一つの手法ですべての都道府県の解を導出することは現在の技術では難しいと思う．従来の研究での一つの定式化や一つの解法へのこだわりが最適区割の導出を遅らせたのかもしれない．

今回は, 区割画定問題にどのような数理的アプローチが適切かに主眼があったので, 特化した解法ではなくソルバー (OPL Studio, ver.3.1) を利用した．使用計算機は PentiumIII800MHz, メモリ 512MB である．1 回の入力に対する時間制限は CPU 利用時間で 12 時間とし, それ以内で最適解を導出した場合に問題例を解いたと判断した．解けない場合は, 暫定解の情報から再度入力データを作成しなおし, 実験を繰り返した．

まずは, 2002 年に改定された現行の区割 (現区割) と本実験で求めた区割（最適区割）の都道府県毎の比較を表 1, 表 2 に示す．現区割では都道府県内での一票の重みの格差も大きく問題であることがわかる．都道府県内での格差が大きい 5 府県を並べたのが表 3 である．最適区割では, 格差の随分少ない区割の存在を示しており, 改善の余地があるのではないかと考えられる．

次に, 市区郡の分割数にも注目してみたい．現区割では 23 市区郡が分割されているが, 最適区割では 19 市区郡の分割で抑えている．分割数が多いほうが一票の重みの格差を減少できるはずだが逆の結果になっている．原則では市区郡の分割は避けるべきと区割作成方針でしているにもかかわらず, 必要以上の分割が行なわれていることを示している．

表 3: 現区割での都道府県内での一票の重みの格差が大きい上位 5 府県

順位	府県名	現区割			最適区割		
		最大人口	最小人口	格差	最大人口	最小人口	格差
1	宮城県	508847(2 区)	289877(5 区)	1.755 倍	429750	351141	1.224 倍
2	長野県	536492(1 区)	317922(4 区)	1.687 倍	443547	442346	1.003 倍
3	福島県	542573(1 区)	325422(4 区)	1.667 倍	436690	412832	1.058 倍
4	愛知県	539164(12 区)	328877(14 区)	1.639 倍	482687	460403	1.048 倍
5	京都府	539209(6 区)	333621(5 区)	1.616 倍	442941	437779	1.012 倍

※ 5 府県とも分割された市区郡は現区割でも最適区割でも存在しない

最後に, 現区割と最適区割の全国での一票の重みの格差に関係する値を表 4 にまとめた．全都道府県で各選挙区の人口が均等になるよう区割を画定したとしても一票の重みの格差が 1.778 倍になることがわかる．つまり, 現在の定数配分ではどのように区割を最適化しようが一票の重みの格差はこれを下回ることはできない．この 1.778 倍が一票の重みの格差の法的な許容範囲である 2 倍までわずかであることから, 現行の定数配分方法に対する批判の根拠となっている．しかし, 差がわずかという理由が 2 倍以上の原因とするのは説得力がない．表 4 より, 定数配分方法による一票の重みの格差のより強いの下限は最適区割から導かれる 1.997 倍で, そこからさらに格差が増えた部分は区割作業が招いたと定量的に評価すべきである．

表 4: 全国での選挙区間の格差：現区割と最適区割の比較

	平均人口	現区割	最適区割
最大人口	482369(東京都)	558947(兵庫 6 区)	536000(東京都)
最小人口	271327(高知県)	270743(高知 1 区)	271132(徳島県)
1 票の重みの格差	1.778	2.064	1.977

※平均人口: 各都道府県の平均人口（人口を選挙区数で除した値）の最大値と最小値を抽出

6.　全国最適区割の導出に向けて

前節では各都道府県に配分されている現在の議席数が与えられているとして, 各都道府県の最適区割を導出する過程と結果を説明した．現行では定数配分方式として 1+最大剰余法を採用しているが, 法律上は各都道府県に 1 議席ずつ割り振った後に, 残り 253 議席を比例配分すると指示しているだけで, 最大剰余法を採用している根拠はない．そこで, 一票の重みの格差が最小になる残りの 253 議席の比例配分方法に関して考えてみたい．

6.1．定数配分方法の比較

まずは, 従来の主な比例配分方式とその特徴を紹介し, 一票の重みの格差の観点から評価を示したい．配分する議員定数を D, 各都道府県を $i \in S$ で表し, 都道府県 i の人口を c_i, 全国の人口を $C(:= \sum_{i \in S} c_i)$ とすると, **理想的な配分議席数**は

$$\gamma_i := \frac{c_i D}{C} \tag{21}$$

である．しかし, γ_i が整数となることはまれなため, なるべく公平に整数値に丸める様々な方法が提案・研究されてきた (cf.[1, 15])．定数配分方法には, 例えば以下の**剰余法** (1) や**除数法** (2〜6) がある（括弧内は別名）．

1. **最大剰余法** (Hamilton 法, Vinton 法)
2. **切り上げ法** (最大除数法, Jefferson 法, d'Hondt 法)
3. **切り捨て法** (最小除数法, Adams 法)
4. **四捨五入法** (奇数法, 過半小数法, Webster 法, Sainte-Lagüe 法)
5. **幾何平均法** (均等比例法, Hill 法, Huntington 法)
6. **調和平均法** (Dean 法)

最大剰余法 (1) は, $\lfloor \gamma_i \rfloor$ を各都道府県に配分し, 残り議席 $D - \sum_{i \in S} \lfloor \gamma_i \rfloor$ を $\gamma_i - \lfloor \gamma_i \rfloor$ の大きい順に配分する方法である．総定数単調性と人口単調性を満たさないことが知られている [1].

除数法 (2〜6) は, 1 議員が代表すべき基準人口 d を決定して都道府県毎に基準値 $\mu_i := c_i/d$ を計算し, μ_i を基に配分数を決定する方法である．配分数は方法毎に以下の通りである.

2. $\lceil \mu_i \rceil$
3. $\lfloor \mu_i \rfloor$
4. $\lambda := 0.5$ とし, $\mu_i - \lfloor \mu_i \rfloor \geq \lambda$ の時, $\lceil \mu_i \rceil$, $\mu_i - \lfloor \mu_i \rfloor < \lambda$ の時, $\lfloor \mu_i \rfloor$.
5. $\lambda := \sqrt{\lceil \mu_i \rceil \cdot \lfloor \mu_i \rfloor}$ とし, $\mu_i \geq \lambda$ の時, $\lceil \mu_i \rceil$, $\mu_i < \lambda$ の時, $\lfloor \mu_i \rfloor$.
6. $\lambda := \dfrac{2\lceil \mu_i \rceil \cdot \lfloor \mu_i \rfloor}{\lceil \mu_i \rceil + \lfloor \mu_i \rfloor}$ とし, $\mu_i \geq \lambda$ の時, $\lceil \mu_i \rceil$, $\mu_i < \lambda$ の時, $\lfloor \mu_i \rfloor$.

さて, 各配分方法で定数配分を行い, 平均人口の最大値を最小値で除した数はその定数配分方法に対する一票の重みの格差の自明な下限となる．表 5 は, 現在の衆議院小選挙区 300 議席を, 2000 年国勢調査速報値人口をもとに, 現行の「1+最大剰余法」と前記 6 種類の定数配分を行った場合の一票の重みの格差の自明な下限を示したものである．一票の重みの格差の正確な下限は前節のように最適区割を導かないと示せないが, この方法で計算した下限で既に一票の重みの格差が 1.5 倍未満となる区割は不可能なことがわかる．つまり, 定数配分を確定してから区割画定を行うという順序を変えない限り, 一票の重みの格差を現行より大幅に改善することは難しい.

表 5: 主な定数配分方式での一票の重みの格差の自明な下限

	平均人口最大値	平均人口最小値	自明な下限
1+最大剰余法	482369	271327	1.778
最大剰余法	613229	356613	1.720
切り上げ法	462534	306615	1.509
切り捨て法	761499	393645	1.934
四捨五入法	613229	356613	1.720
幾何平均法	511422	306615	1.668
調和平均法	511422	306615	1.668

6.2. 全国最適区割を導く定数配分方法の提案

選挙区の区割画定は, 日本では明治以降まず都道府県に定数配分してから始めることが慣習のようだ．海外でも定数配分だけを独立な問題として捉え, 配分確定後に区割画定問題を解くという例が多い．しかし, 一票の重みの格差は, 配分定数だけではなく区割にも依存しているので, 格差をより解消したいとするなら 2 つの問題を同時に考えることの方が自然である．日本では法律の上で, 定数配分後に区割画定を行うことを規定していない．また, これまでは区割画定問題において最適区割導出が困難な作業であったので定数配分問題を先に解決していたと推察するが, 現状では最適区割を導出可能である [13]．そこで 2 つの問題を同時に扱う枠組みとして「最適区割に基づく定数配分法」を提案したい．それは, 47 都道府県全てについて, 2 つの配分数 $\lfloor \gamma_i \rfloor, \lceil \gamma_i \rceil$ それぞれで最適区割を導出し, 47 都道府県の定数配分合計が 300 という条件の下で人口格差が最小となる配分を見つけるという方法である．数理的には, 以下に示す $\{0,1\}$-ナップサック型の最適化問題を解く方法と言い換えられる.

入力 : $D := 300$, $S := \{1, \ldots, 47\}$, u_{i0}, l_{i0} $(i \in S)$: 都道府県 i に定数 $\lfloor \gamma_i \rfloor$ 配分時の最適区割最大人口, 最小人口; u_{i1}, l_{i1} $(i \in S)$: 定数 $\lceil \gamma_i \rceil$ 配分時の最適区割最大人口, 最小人口.

変数 : $\{0,1\}$-変数 x_i $(i \in S)$: 都道府県 i の配分数が $\lfloor \gamma_i \rfloor$ の時 $x_i = 0$, $\lceil \gamma_i \rceil$ の時 $x_i = 1$.

最適区割と定数配分を同時に決定する問題

$$\min. \quad u/l \tag{22}$$

$$\text{s.t.} \quad u_{i0}(1-x_i) + u_{i1}x_i \ \leq \ u \quad (i \in S) \tag{23}$$

$$l_{i0}(1-x_i) + l_{i1}x_i \ \geq \ l \quad (i \in S) \tag{24}$$

$$\textstyle\sum_{i \in S}(\lfloor \gamma_i \rfloor + x_i) \ = \ D \tag{25}$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad (i \in S) \tag{26}$$

2000 年国勢調査速報値人口による理想配分を基にした場合は, 残り議席数 $D - \sum_{i \in S}\lfloor \gamma_i \rfloor = 25$ となり, 条件式 (25) は $\sum_{i \in S} x_i = 25$ と書き換えられる.

小選挙区区割問題に対する新しいアプローチとして, 2 つの定数配分 $\lfloor \gamma_i \rfloor, \lceil \gamma_i \rceil$ に基づく最適区割から $\{0,1\}$-ナップサック型問題を解き, 定数配分と区割画定を同時に定めることを提案した. さらに, 人口比例配分よりも一票の格差を最小にすることを重視するなら, 都道府県毎に考えうる全ての定数配分について最適区割を求め, 人口格差が最小となる配分を決定する整数ナップサック型問題を解くアプローチも考えられる. その最適解が数理的には全国最適区割になる.

このアイディアに基づく実験の結果は発表時に紹介したい.

7. おわりに

日本の小選挙区制での最適区割問題に対する最適区割の導出を中心に, 小選挙区区割問題について考えてきた. 全都道府県の最適区割を導出したことで, 小選挙区制の計画や検証などに新たなツールを提供したことになる. また, 一票の重みの格差を最小化する全国最適区割の導出のアプローチについても示した. しかし, 残されている課題も多い. そこで最後に, モデル化と解法のふたつの観点から今後の課題を示しておきたい.

モデル化の観点からは, より熟慮された数理モデルの構築作業が大きな課題である. 例えば, 市区郡の隣接を今回は地理的隣接を原則的に採用したが, 山間部などは地理的に隣接していても生活圏としてつながっていない場合が多い. 生活圏としてのつながりを隣接の定義に考慮したいと考えると, 国道や地方道がまずは思いつくが, 道路の建設には恣意性が入る危険があるので客観性の観点から問題がある. また, 冬季は通行不可になる道路も存在し, 簡単に採用はできない. 各都道府県では市区町村のつながり度合いを多変量解析の手法で計測し公表していることが多いが, その取り組みを参考にすることも考えられる. ただし, 多くの場合その入力項目に区割が入っており利用には注意が必要だ. また, 二つ目の例としては, 市区郡の分割に関する問題を指摘しておく. 日本の区割では原則として市区郡の分割は禁止しているが, 人口が多い場合などは例外的に分割を許している. しかし, その分割方法は規定していない. 現在, 合併が各地で進み, 市区郡数が減る一方で一つの市区郡の人口が大きくなってきている. 結果的に, 市区郡の分割を行なう事例が増えるが, これは恣意性の入る余地の拡大に直結する. 客観的な視点で, つまり数理的手法で市区郡の分割を適切に行なう方法を考えるのは直近の重要な課題である. 他にも, モデル化の場面で考えなくてはならないことは多い.

より良いモデルの構築を目指すには実験を通して妥当性を確認する作業が避けられないが, その作業に集中するための計算機実験の高速化が解法の面からの大きな課題である. 本研究では問題へのアプローチ方法を重視し, 各定式化に対する解法には触れていないが, 設定を変えて繰り返しの実験が必要な状況を考えると各定式化に対して特化した解法の提案は有意義である. 区割画定

問題の入力に用いる市区郡の隣接を示すグラフは平面グラフであるが, その特殊性は現在は利用していないし, いくつかの都道府県でのさらに特殊なグラフ構造も考慮していない. 各都道府県や定式化に特化した解法の提案で高速化の余地はかなりある. また, 一票の重みの格差がより小さい実行可能解の情報は厳密解導出時間の短縮に良い影響があるが, その近似解を手軽に求める手法の提案も望まれる. もちろん, より適した問題の定式化も考えていかなくてはならないだろう.

参考文献

[1] M. L. Balinski and H. P. Young: *Fair Representation 2nd ed.*, Brookings(2001).

[2] B. Bozkaya, E. Erkut and G. Laporte: A tabu search heuristic and adaptive memory procedure for political districting, *European Journal of Operations Research*, 144(2003) 12-26.

[3] A. Mehrotra, E. Johnson and G. L. Nemhauser: An optimization based heuristic for political districting, *Management Science* 44-8(1998)1100-1114.

[4] J. C. Williams,Jr.: Political Redistricting: A Review, *Papers in Regional Science* 74-1(1995)13-40.

[5] T. Yamada, H. Takahashi and S. Kataoka: A branch-and-bound algorithm for the mini-max spanning forest problem, *European Journal of Operational Research*, 101(1997)93-103.

[6] 久保幹雄, 田村明久, 松井知己編: 応用数理計画ハンドブック, 朝倉書店 (2003).

[7] 今野浩, 鈴木久敏編: 整数計画法と組合せ最適化, 日科技連 (1982).

[8] 坂口利裕, 和田淳一郎: 選挙区割りの最適化について, 三田学会雑誌, 93-1(2000)109-137.

[9] 坂口利裕, 和田淳一郎: 選挙区割り問題, オペレーションズ・リサーチ, 48-1(2003)30-35.

[10] 田中宗孝: 政治改革 6 年の道程, ぎょうせい (1997).

[11] 鳥井修: グラフ上の頂点分割問題, 東京大学修士論文 (1995).

[12] 根本俊男, 堀田敬介: 区割画定問題に対する数理的アプローチ, 2002 年日本 OR 学会春季研究発表会アブストラクト集, (2002)58-59.

[13] 根本俊男, 堀田敬介: 区割画定問題のモデル化と最適区割の導出, オペレーションズ・リサーチ, 48-4(2003)300-306.

[14] 根本俊男, 堀田敬介: 小選挙区最適区割に基づく議員定数配分, 2003 年日本 OR 学会秋季研究発表会アブストラクト集, (2003).

[15] 大和 毅彦: 議員定数配分方式について－定数削減, 人口変動と整合性の観点から－, オペレーションズ・リサーチ, 48-1(2003)23-29.