OR特論

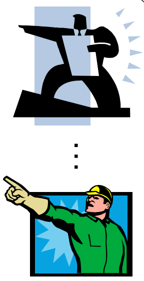
アルゴリズムの比較

効率の良い解法と悪い解法

アルゴリズム

条件
有限長の指示
＋
有限時間で
停止の保障

問題を解くための『手順』



⋮

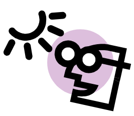
ひとつの問題に対してアルゴリズムは多数

プログラム：
計算機が実行できる指令の系列

ここで学ぶこと

ある問題を解く手順（アルゴリズム）は複数ある

- 「良い」・「悪い」の比較基準は？
  ⇒使用場面で様々な基準が考えられる
  ⇒ここでは，計算時間に注目！
- アルゴリズムの効率を計る方法（計算量）
- アルゴリズムの比較方法（漸近計算量）



準備運動：多項式の値を求める

- 関数 $f(x)=5x^4+6x^3+2x^2+4x+7$

多項式
- x^n :項

•x=3の時の$f(x)$の値を求めてみよう.

•$f(x)$の値を求めるのに，
掛け算(×)・足し算（＋）は何回実行した？

•掛け算・足し算を1回実行するには
1円のコストがかかるとする.
最も安く，$f(x)$の値を求める方法を提案せよ.

$f(3)=5 \cdot 3^4+6 \cdot 3^3+2 \cdot 3^2+4 \cdot 3+7$の計算

直接計算 ↓

方法A

- X=5×3×3×3×3
- Y=6×3×3×3
- Z=2×3×3
- W=4×3
- $f(3)$=X+Y+Z+W+7

⇒掛け算：10回，
足し算：4回

変形 ↓

$f(3)=((((5 \times 3+6) \times 3+2) \times 3+4) \times 3+7)$

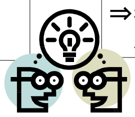
計算 ↓

方法B

- S=5×3＋6
- T=S×3＋2
- U=T×3＋4
- $f(3)$=U×3+7

⇒掛け算：4回，
足し算：4回

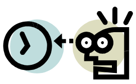
Horner法

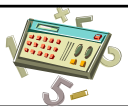


演習2-1

一般のn次多項式
$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$
の値を計算したい.

① 方法A利用時の演算総数をnで表せ.
② 方法B利用時は？
③ 1億回/秒演算できるコンピューターがある.
n=1,000,000のとき，各方法では何秒で値を求めるか？





演習2-1：ヒント

方法A

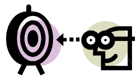
- $X_n=a_n\times\overbrace{x\times\cdots\times x}^{n個}$ 　掛け算：n回
- $X_{n-1}=a_{n-1}\times\overbrace{x\times\cdots\times x}^{n-1個}$ 　掛け算：n-1回
- …
- $X_1=a_1\times x$ 　掛け算：1回
- $f(x)=X_n+X_{n-1}+\cdots+X_1+a_0$ 　足し算：n回

方法B 　掛け算：1回,足し算：1回

- $S_n=a_n\times x+a_{n-1}$
- $S_{n-1}=S_n\times x+a_{n-2}$
- …
- $S_2=S_3\times x+a_1$
- $f(x)=S_1=S_2\times x+a_0$

n回の繰り返し

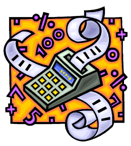
復習 総和を求める(1)



1+2+…+(n-1)+n の求め方

n+1
n+1
n+1
S =1+2+3+ … +(n-2)+(n-1)+n
n/2個

よって，S=(n+1)×(n/2)=n(n+1)/2



演習2-1：例解

方法A

- $X_n=a_n\times\overbrace{x\times\cdots\times x}^{n個}$ 　掛け算：n回
- $X_{n-1}=a_{n-1}\times\overbrace{x\times\cdots\times x}^{n-1個}$ 　掛け算：n-1回
- …
- $X_1=a_1\times x$ 　掛け算：1回
- $f(x)=X_n+X_{n-1}+\cdots+X_1+a_0$ 　足し算：n回

方法B 　掛け算：1回,足し算：1回

- $S_n=a_n\times x+a_{n-1}$
- $S_{n-1}=S_n\times x+a_{n-2}$
- …
- $S_2=S_3\times x+a_1$
- $f(x)=S_1=S_2\times x+a_0$

n回の繰り返し

総数: (n+1)n/2 +n 回 　どちらが大きい？　総数: 2n 回

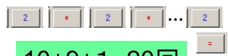
アルゴリズムの良し・悪しを比較

- 土俵の整備：計算モデル
- ものさしの準備：計算量
- 目盛りの読み方：漸近計算量

計算の単位

2^{10}の計算
何回押す？

安い電卓の場合



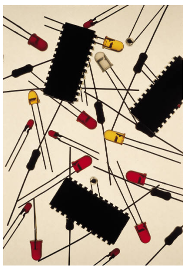
10+9+1=20回

関数電卓の場合

5回

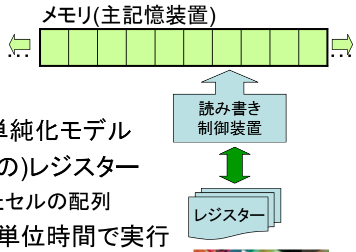
同じ土俵（モデル）が必要

計算の手間の測り方



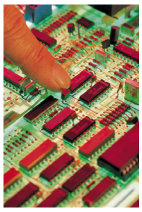
- 1回の算術演算を1単位
  何回実行したかで数える.
  - 算術演算：加減乗除・比較など
  - 足し算と掛け算の手間は一緒？
    ⇒(仮想的)コンピュータを仮定
    RAM（Random Access Machine）モデル
    ※様々なモデルが考えられる. →「計算理論」
- 入力のサイズによって手間は変化する.
  - 入力サイズに対する評価が重要

復習 RAM



現在(将来)の計算機の単純化モデル

- (無限の)メモリと(有限の)レジスター
  – メモリ:アドレスを持ったセルの配列
- ストア，ロード，演算を単位時間で実行
  – ストア:レジスタの内容をセルに書き込む
  – ロード:セルの内容をレジスターに読み込む
  – 演算:2つのレジスタの内容を算術演算をし，結果をレジスタに書き込む



入力サイズ

- 問題を解く←問題例の入力要

入力サイズ
問題を表現するのに必要なメモリー量

- (例)
  問題:$x=\alpha$ の時のn次多項式$f(x)$の値は？
  $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$
  問題例の入力: α，nとa_n, a_{n-1}, … , a_1 , a_0

入力サイズ　n+3個の入力が必要

※ 入力数字が大きな時は桁数も考慮する場合がある

練習 2機械の最適加工順序問題

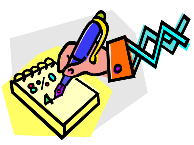
Q1. 8製品の場合の入力サイズは？

Q2. n製品の場合の入力サイズは？

(例) 各製品の加工必要時間

8製品

製品	旋盤	研削盤
A	3	4
B	8	7
C	6	7
D	9	8
E	8	4
F	7	2
G	5	6
H	5	1



復習 ジョンソン法

2機械n製品最適加工順序問題
に対する解法

1. 最小値を見つける
2. それがM1側なら…
3. 製品を消す

仮定:
今後の議論のため前処理を実施

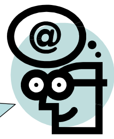
入力データ

製品	旋盤	研削盤
A	3	4
B	8	7
C	6	7
D	9	8
E	8	4
F	7	2
G	5	6
H	5	1

前処理後

min	
3	M1
7	M2
7	M1
8	M2
4	M2
2	M2
5	M1
1	M2

例題:ジョンソン法



n製品の時，何回の比較で最
適加工順序が求められる？

n回

1. 最小値を見つける
2. それがM1側なら…
3. 製品を消す

最小値は何回の比較
で見つかる？
↓
全部で何回？

定数時間

定数時間

最小値の見つけ方 素朴な方法

7枚のカード

比較回数

7 3 5 6 2 10 12

走査

6回

7 3 5 6 10 12

走査

5回

⋮

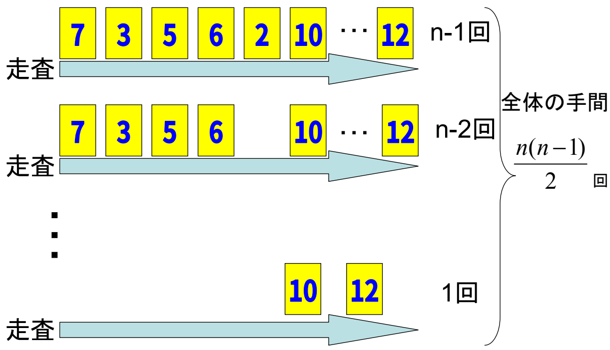
10 12

走査

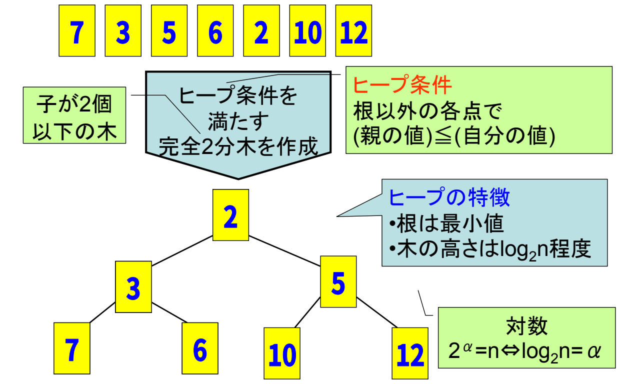
1回

21回

素朴な方法 n枚の場合



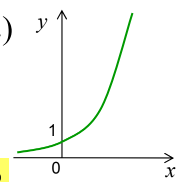
工夫した方法 ヒープ



復習 指数・対数

指数関数: $y=2^x \; (=\overbrace{2\times 2\times \ldots \times 2}^{x\text{個}})$

x	0	1	2	3	4	5
y	1	2	4	8	16	



xが増えると, yの値が急激に増加する

対数関数:指数関数の逆関数

$y=\log_2 x$

対数の底

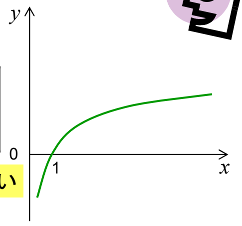
(例) $\log_2 8=3$
$\log_2 16=4$

2の何乗かで8になる数は？

復習 指数・対数(2)

対数関数: $y=\log_2 x$

x	1	2	4	8	16	32
y	0	1	2	3	4	

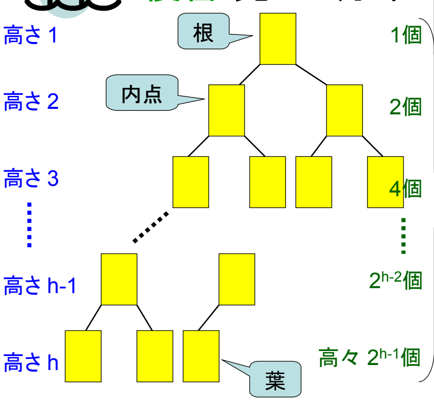


xが増加しても, yの値はあまり増えない

計算機の世界は2進数. 計算機は2つの比較しかできない
→2を底にした対数がよく登場する.
(例1)アルファベットを記録するのに必要なビット数は？
(例2) 16個の金貨の中に重さの軽い偽金貨が1つある.
天秤ばかりを何回利用すると発見できる？

復習 完全2分木

- 木のグラフ
- 基本的に内点の子は2つ
- 最下層は左詰め



点の数がnの時の, 完全2分木の高さは？

(点の数)= $1+2+4+\ldots+2^{h-2}+2^{h-1}$

和を求めてみよう

復習 総和を求める(2)

$1+2+4+\ldots+2^{h-2}+2^{h-1}$ の求め方

$$
\begin{array}{rl}
S= & 1+2+4+\ldots+2^{h-2}+2^{h-1} \\
-)\ 2S= & \quad 2+4+8+\ \ldots\ +2^{h-1}+2^{h} \\
\hline
-S= & 1 \qquad\qquad\qquad -2^{h}
\end{array}
$$

よって, $S=2^h-1$ → $n=2^h \Leftrightarrow h=\log_2 n$

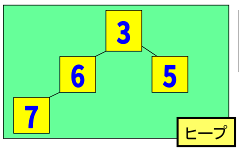
-1は省略

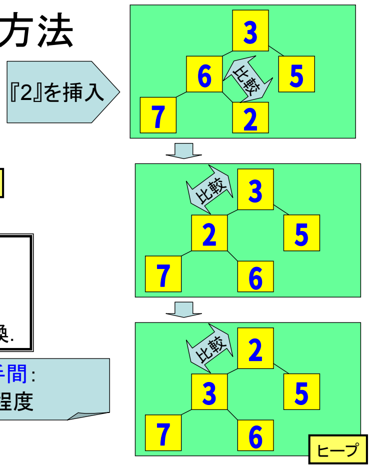
高さhの完全2分木の点の数

点数nの完全2分木の高さは$\log_2 n$

正確には, $\log_2 n$を切り上げた整数

ヒープの構築方法





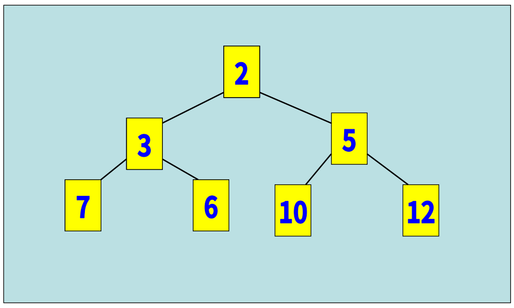
1. 最下層右に追加.
2. (繰り返し)
- 親と比較し
  自分が小さいなら交換.

1要素の挿入の手間:
最悪で木の高さ程度

ヒープの構築法(2)

7枚のカード

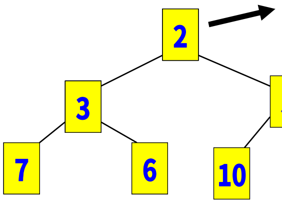
7 3 5 6 2 10 12



ヒープの利用法

ヒープ条件より『根』の値が,
全体の最小値.

見つける手間は,
1回(定数時間).



最小値発見

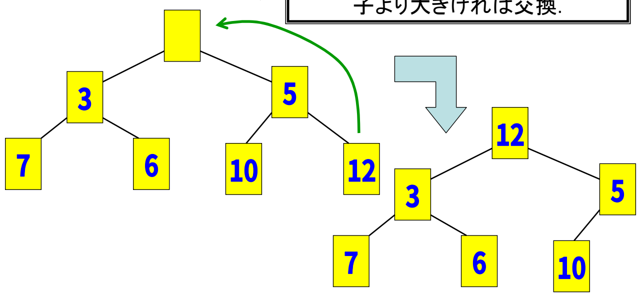
→次の最小値を見つけるには?

最小値の削除＋ヒープ条件の修復

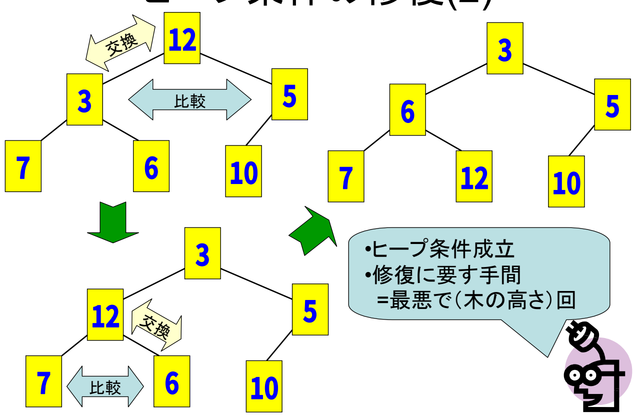
『根』を削除すると，2分木で無い．

修復要

1. 最下層・最右の要素を根に．
2. 以下をできる限り繰り返す．
   - (2つの)子の小さい値と比較．子より大きければ交換．



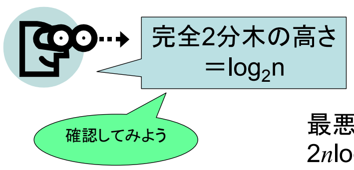
ヒープ条件の修復(2)



ヒープ利用時の手間

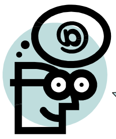
n個の要素から最小値を順に見つける手間

- (準備)ヒープの構築：(1要素挿入手間)×(要素数)＝最悪で(木の高さ)×n
- 最小値の発見：n回
  - 1回の最小値の発見(＝親の値)：1回
  - 1回のヒープ修復の手間：最悪で(木の高さ)



最悪の場合，全体で $2n\log_2 n$ 回程度の手間

例題(続) ジョンソン法



製品数がnの時，
計算の手間は？

準備が必要
$n\log_2 n$

n回

1. 最小値を見つける
2. それがM1側なら…
3. 製品を消す

ヒープを利用：最悪 $\log_2 n$
素朴な方法：最悪 n

定数時間

定数時間

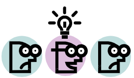
⇒ 最小値発見が計算の手間に決定的

アルゴリズムの比較

n個の要素から最小値を順に取り出す手間は？

素朴な方法	ヒープを利用した方法
• ちょうど n(n-1)/2 回	• 実際にどの程度かかるかは不明 • 最悪で $2n\log_2 n$ 回

1. n=8の時,各々の方法は何回の演算を実行している？
2. n=1,000,000の時，各々の方法は約何回の演算を実行する？
3. 1億回/秒演算できるコンピューターがある.
   上記2のとき，各方法では何秒で作業を終了するか？

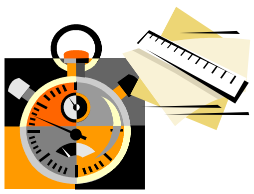


最悪の状況で比較すること
に意味がありそうだね.

最悪計算(時間)量

同じサイズの入力に対して，

最悪時のアルゴリズムの手間を測定した計算量
⇒アルゴリズムを評価する物差しにする.



アルゴリズムを評価する
他の主な物差し

•平均計算量
•最悪計算領域量：アルゴリズム実行に使用するメモリーの量を評価する.

等

漸近計算量

- 計算量は簡潔な表現を用いることが多い
  - n→∞になるときの挙動が知りたい
  - (例)ある最悪計算量：$2n^2+5n+120$
    nが大きくなったとき計算量に支配的に影響するのはn^2の項のみ．
    →ほかの情報を省いても，挙動は把握可能
- 簡潔な表現方法：最も影響する項だけで表現
  - $2n^2+5n+120 \Rightarrow O(n^2)$

どうしてだろう？
考えてみよう！

「オーダー」と読む
アルファベットの大文字『O』

ある正定数cとNが存在し，N以上のnに対しT(n) ≦ cf(n)が成立
⇔
T(n)＝O(f(n))

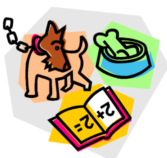
$O(f(n))$

- $2n^2+3n+10= O(n^2)$
- $100000n^2-100n= O(n^2)$
- $0.00001n^2+10000000= O(n^2)$

どれも漸近計算量で表現すると同じ

厳密には，O(n^3)でもよいので嘘．ただ，実用上はこの理解でも良い．詳しい内容は別な機会に．

- $O(1)$：定数時間オーダー
  - 入力サイズに依存しないことを示す



世の中の約束事
O(オーダー)の記法を「＝」の式で用いるときは右辺に書く．
左辺は右辺より低い情報量になることは無い．

※オーダーの記法は情報を省略している

例題

n個の要素から最小値を順に取り出す手間は？

素朴な方法	ヒープを利用した方法
• ちょうど $n(n-1)/2$ 回	• 最悪で $2n\log_2 n$ 回
• 最悪計算量 $n(n-1)/2$	• 最悪計算量 $2n\log_2 n$
⇩	⇩
$O(n^2)$	$O(n\log_2 n)$

大きなnに対して，$n>\log n \Rightarrow n^2>n\log n$
⇒ヒープ利用の方法は素朴な方法より優れている

計算量の意味で

例題(続) ジョンソン法

製品数がnの時，計算の手間は？

準備が必要 $O(n\log_2 n)$

n回

1. 最小値を見つける — ヒープを利用：$O(\log_2 n)$
2. それがM1側なら… — 定数時間
3. 製品を消す — 定数時間

⇒ ヒープを利用して $O(n\log_2 n)$

もっと速くなる？

ジョンソン法の改造

入力データ

製品	旋盤	研削盤
A	3	4
B	8	7
C	6	7
D	9	8
E	8	4
F	7	2
G	5	6
H	5	1

前処理

min	
3	M1
7	M2
7	M1
8	M2
4	M2
2	M2
5	M1
1	M2

さらに前処理
min順で並び替え

製品	min	
H	1	M2
F	2	M2
A	3	M1
E	4	M2
G	5	M1
B	7	M2
C	7	M1
D	8	M2

この表を使えば，あとは簡単！

ソーティング

並び替えの手間は？

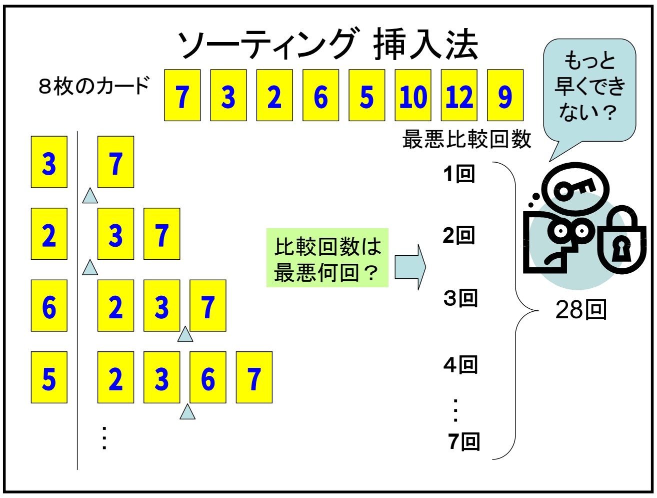
ソーティング

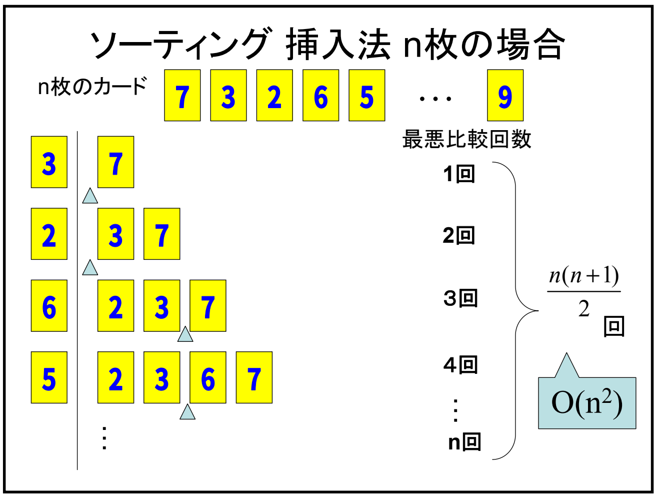
８枚のカード

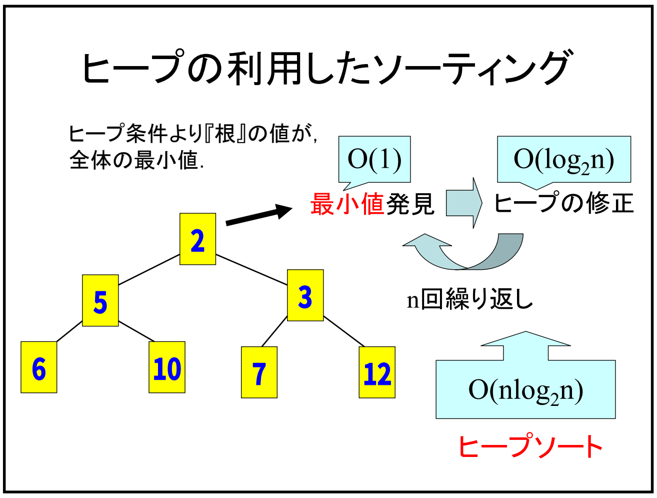
7	3	2	6	5	10	12	9

ソーティング — 小さい順に並べる

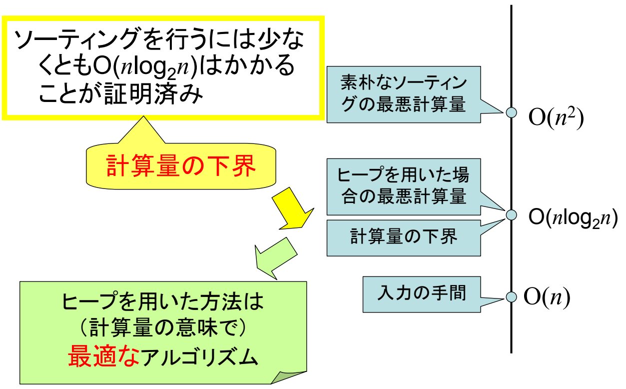
2	3	5	6	7	9	10	12


ソーティング 挿入法
8枚のカード
7 3 2 6 5 10 12 9
もっと早くできない？
最悪比較回数
3 | 7
2 | 3 7
6 | 2 3 7
5 | 2 3 6 7
比較回数は最悪何回？
1回
2回
3回
4回
7回
28回

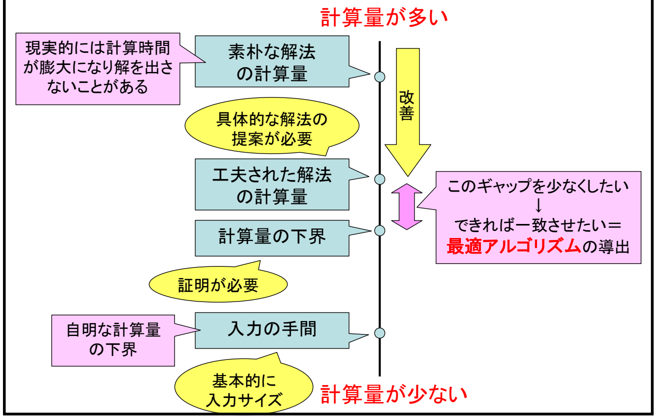

ソーティング 挿入法 n枚の場合
n枚のカード
7 3 2 6 5 … 9
最悪比較回数
3 | 7
2 | 3 7
6 | 2 3 7
5 | 2 3 6 7
1回
2回
3回
4回
n回
$\frac{n(n+1)}{2}$ 回
$O(n^2)$


ヒープの利用したソーティング
ヒープ条件より『根』の値が,
全体の最小値.
$O(1)$
最小値発見
$O(\log_2 n)$
ヒープの修正
n回繰り返し
$O(n\log_2 n)$
ヒープソート
2
5
3
6
10
7
12

ソーティングの計算量の下界



ある問題の計算量の構造



ここまでのまとめ

- ある問題に対するアルゴリズムは複数
- アルゴリズムは最悪計算量で評価
- 最悪計算量は漸近計算量で表すと便利
  ⇒計算量の意味で優劣比較が可能

•計算量のみが優劣の基準ではない
•状況に応じた別尺度の導入も大切
•ただし，最適化問題では重要要素

next 問題自体が持つやさしさ・難しさ

演習2-2 最小木問題

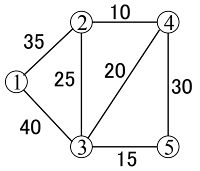
点数がn個，枝数がm本のグラフの重み和最小の木を探せ

Kruskalの解法

1. T=ϕ
2. 枝の重みの小さい順に以下の(*)を行う.

   (*)Tに枝を加えた時に，Tに閉路ができなければその枝をTに加える.

最終的に得られたTが最小木



①問題の入力サイズは？
②Kruskalの解法を効率よく実行する方法は？
③その最悪計算量は？