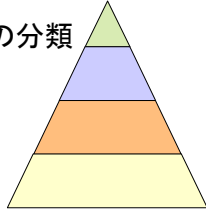


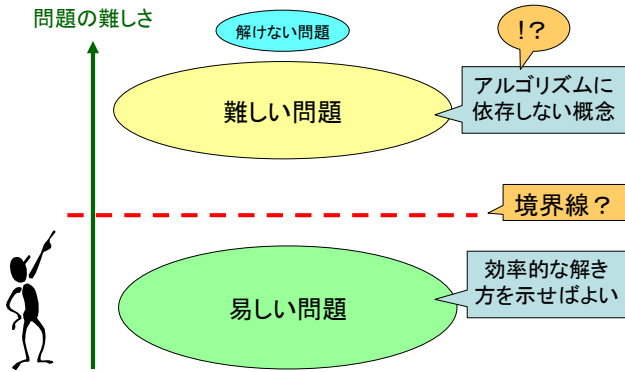
易しい問題・解きにくい問題

直面する問題の難しさの分類



ここで学ぶこと

問題の難しさ



効率よく解けた ⇔ (まだ)解けない

n 製品の最適加工順序問題の場合

機械数	2機械	多機械
主な解法	ジョンソン法	分枝限定法など
最悪計算量	$O(n \log_2 n)$	$O(n!)$
$n=1$ 万, 1億演算/秒の時	0.002秒	6×10^{35634} 宇宙年

他の問題の場合はどう?

・効率の良い方法は見つからない
・いつかは見つかる?

効率の良さの分岐線



計算時間の比較

計算機の速さ	1億演算/秒				
nの大きさ	$n \log_2 n$	n^2	n^3	2^n	$n!$
10	3.3E-07	1.0E-06	1.0E-03	1.0E-05	3.6E-02
20	8.6E-07	4.0E-06	3.2E-02	1.0E-02	2.4E+10
30	1.5E-06	9.0E-06	2.4E+01	1.1E+01	2.7E+24
40	2.1E-06	1.6E-05	1.0E+00	1.1E+04	8.2E+39
50	2.8E-06	2.5E-05	3.1E+00	1.1E+07	3.0E+56
100	6.6E-06	1.0E-04	1.0E+02	1.3E+22	9.3E+149
1000	1.0E-04	1.0E-02	1.0E+07	1.1E+293	#NUM!
10000	1.3E-03	1.0E+00	1.0E+12	#NUM!	#NUM!
	1秒以内	1日以内	1年以内	宇宙暦以内 (約150億年)	宇宙暦以上



豆知識講座 3.3E-07って?



- 電卓・EXCELで出てくる表示。
(指数表示: exponential form)

指数部 ← 桁数を示す

$$10^{-7} = \frac{1}{10^7} = \frac{1}{10000000}$$

- $3.3E-07 = 3.3 \times 10^{-7}$
 $= 3.3 \times 0.0000001$
 $= 0.00000033$

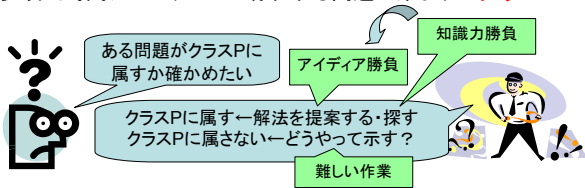
桁数の多い数字の桁数をイメージしやすくする表示方法

- (他の例)
- $3.1E+00 = 3.1 \times 10^0 = 3.1$
 - $1.1E+04 = 1.1 \times 10^4 = 1.1 \times 10000 = 11000$

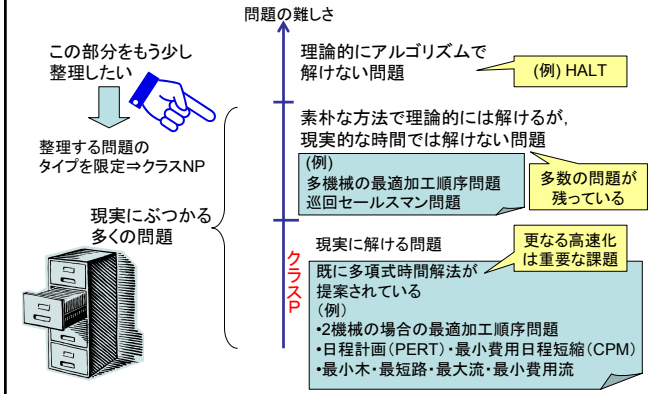
多項式時間アルゴリズム (polynomial-time algorithm)

- 入力サイズ: n
- 多項式: $f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0$
- 最悪計算量が $O(f(n))$

多項式時間アルゴリズムが存在する問題の集まり ⇒ クラスP



クラスPに(まだ)属さない問題達



寄り道 解けない問題 HALT

有限な文字列 有限な文字列 ⇒ Pもxも同じ

- 入力: プログラムPとデータx
- 質問: プログラムPにデータxを与えた時に有限時間で停止しますか?

仮定: HALTを解くアルゴリズムQが存在

⇒ アルゴリズムQでは、Qの正当性を計れないことを証明 (対角線論法)



Nondeterministic Polynomial-time Solvable

クラスNP

• 答えがYESである証拠が多項式時間で確認できる**決定問題** 入力サイズの

• 例: (決定問題)
22時間以内に終了する加工順序はある?

- (証拠)加工順序を1つ示す 22時間以内で終了するかは製品数(n)程度で確認可能

クラスNPに属する

入力サイズO(n)

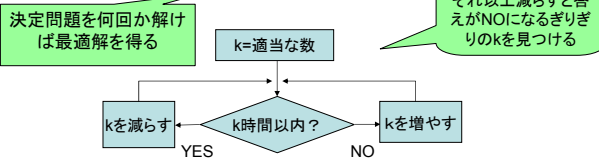


総当り法(素朴な方法)で解ける決定問題はクラスNPに属す

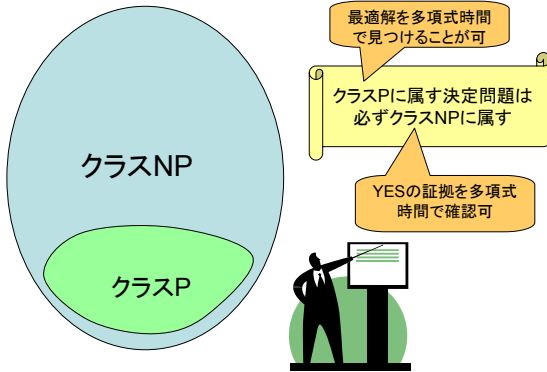
現実に出会う問題の(決定問題版)はほぼクラスNP

決定問題

- **決定問題**: YES/NOで答える問題
 - (最適化問題)
最適加工順序を求めよ
 - (決定問題)
22時間以内に終了する加工順序はある?
- **最適化問題** ← (変換可能) → 決定問題



クラスPとクラスNP



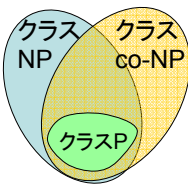
寄り道: クラス co-NP

- クラスNP: Yesの証拠を多項式時間で確認可
- ⇕
- Noの証拠を多項式時間で確認可 ⇒ クラスco-NP

2002年までco-NPに属していた問題

Agrawal達: PRIME in P(2002) クラスPだよ!

整数nは素数ですか?(PRIME)
Yes 素数です: どう確認する?
No 合成数です: 多項式時間で確認可能



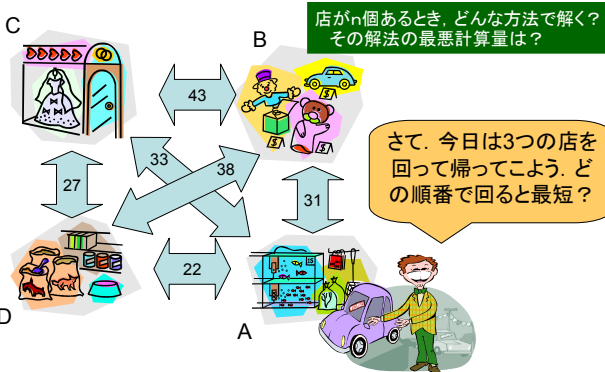
(まだ)クラスPではないクラスNPの問題たち

- 配送便の配達経路. 最短の配達経路は？
 >巡回セールスマン問題
- 限られた積載量. 利益最大積荷選択方法は？
 >ナップサック問題
- ある県の営業区域. 平等な区域割りは？
 >集合分割問題
- 条件を満たす答えは？
 >充足可能性問題

他にも多数の問題がある



巡回セールスマン問題
traveling salesman problem (TSP)



ナップサック問題

- 貨物船で以下の在庫を輸出し利益を得たい
- 貨物船の最大積載重量: 100t
- 在庫管理の都合上, 輸出する製品は在庫すべてを積む

製品名	小麦	米	大豆	コーン	澱粉
在庫量 (t)	30	45	35	10	50
利益見込	25	15	30	10	20

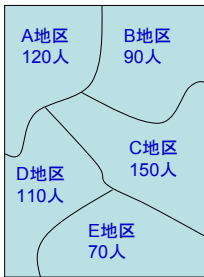
在庫すべてを輸出した場合

Q. 総利益を最大にするには, 何を積む?

製品数がn個の時, どのような解法で解く?
その解法の最悪計算量は?



集合分割問題



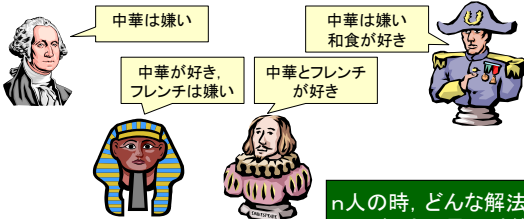
- 5地区を3人の営業マンが担当する
- 1地区は1人だけで担当
- 隣接しない地区を1人が併せて担当することはできない
- 3人の負担をなるべく平等にする担当地区の割当を考えてくれ！



地区数が n 個の時、
どんな解法で解く？
その解法の最悪計算量は？

充足可能性問題 (satisfiability problem: SAT)

- 4人全員の希望を満足する料理は何？
(希望無しは満足度には関係ない)
- 料理候補: 中華, 和食, フレンチ



n 人の時、どんな解法で解く？
その解法の最悪計算量は？

クラスNPでの大発見

Cook博士の発見(1971年)の大雑把な解釈

クラスNPに属する**すべての問題**はSATに
簡単に(多項式時間の手間で)変形可能



SATはクラスNPに属する問題の中で
最も難しい

SATに対して多項式時間解法があれば、
クラスNPに属する問題は
すべて多項式時間で解ける

更なる事実(Karp博士)

SAT \Leftrightarrow ナップサック問題

SAT \Leftrightarrow 集合分割問題

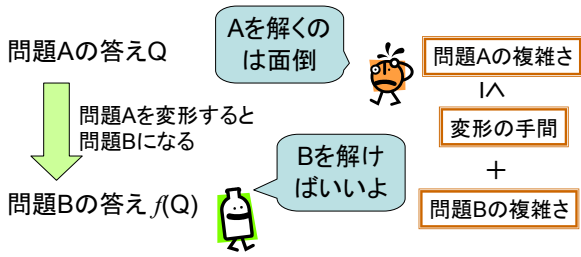
⋮
両者は
同じ位難しい

SAT \Leftrightarrow TSP

SATの仲間たち

NP完全問題

帰着可能性



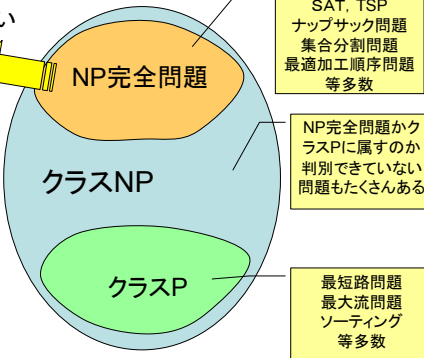
Cook博士の仕事: NP完全問題の存在性を示した
Karp博士の仕事: NP完全問題の仲間たちを見つけた

クラスPとクラスNPとNP完全問題

決定問題に限らない

NP困難問題

NP完全問題は
(今のところ)
多項式時間解法が
無い問題なんだ。



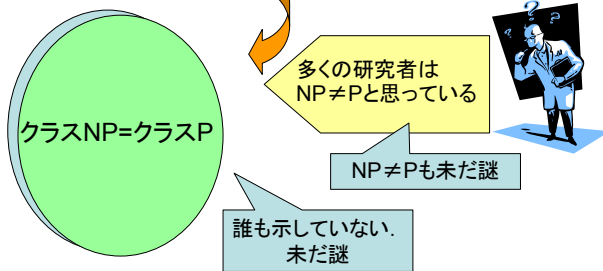
SAT, TSP
ナップザック問題
集合分割問題
最適加工順序問題
等多数

NP完全問題が
クラスPに属するの
か判別できていない
問題もたくさんある

最短路問題
最大流問題
ソート
等多数

P=NP?

• NP完全問題のひとつに対して多項式時間解法が存在したら...




NP完全問題

近似解法や分枝限定法でのアプローチが得策

- NP完全問題=難しい? ←たぶん本当



まとめ

- 問題の難しさには階層がある 
 - 解けない問題
 - クラスNP
 - クラスP
- クラスNPの中にも難しさの階層がある
 - NP完全問題
- 問題への解法を考える際は、まず問題の難しさのレベルに気を配るべき
