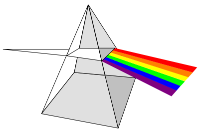
OR特論

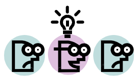


Mathematical Programming

最適化手法の王様
数理計画法

ここで学ぶこと

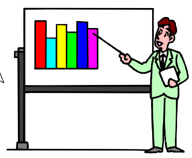
- 数理計画とは
- 数理モデル化と表現方法(定式化)
- 数理計画問題の分類



数理計画とは
Mathematical Programming

与えられた**制約式のもとで**,
ある**関数を最大化**する応用数学の問題
(最小化)

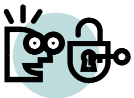
•数理計画＝数理計画問題
(ー problem)
•数理計画問題とそれを解く手法全般を「**数理計画法**」とよぶ.



数理計画と問題解決

数理計画（問題）

与えられた**制約式のもと**で，
ある**関数を最大**（**最小**）にする



比較

問題解決の例：経営の問題

与えられた**資源内**で
利益を最大（**費用・リスクを最小**）にする

⇒数理計画は数理的な問題解決の中心的な技法として定着

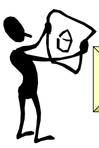
例題1　数式での表現

3種類の原液A,B,Cから，
2つの粉末製品P,Qを製造

	製品P 1(kg)	製品Q 1(kg)	使用可能量
原液A	15(kl)	11(kl)	1650(kl/日)
原液B	10(kl)	14(kl)	1400(kl/日)
原液C	9(kl)	20(kl)	1800(kl/日)
利益	5(万円)	4(万円)	

利益が最大になる製品P,Qの1日の生産量は？
問題を数理モデル化しなさい．

数理モデル作成　2つの段階



数理モデル化　　定式化 formulation

問題理解 ⇒ 問題表現

観察力・言語理解力

システムとしての把握

- 構成要素は？
  - コントロール可能な要素
  - コントロールできない要素
- 相互関係は？
- コントロール結果の評価方法は？

変数として表現
例：x_1, x_2

定数として表現

数式として表現
例：等式，不等式

関数として表現

例題1(続) 定式化してみよう

- コントロールできる要素：製品P,Qの生産量
  →製品Pの生産量をx_1，製品Qの生産量をx_2とおく.
- コントロールの制約：原液A,B,Cの使用可能量
- コントロール結果の評価：利益

- 制約を表す不等式は？
- 利益を表す関数は?

数理計画問題の書き方

目的関数 Objective function

最大化
(最小化の時はminimize)

maximize $z=5x_1+4x_2$
subject to
$$15x_1+11x_2 \leqq 1650$$
$$10x_1+14x_2 \leqq 1400$$
$$9x_1+20x_2 \leqq 1800$$
$$x_1 \geqq 0$$
$$x_2 \geqq 0$$

又は制約条件式
subject to:～の条件の下で

制約式 Constraints

省略表記

max. $z=5x_1+4x_2$
s.t.
$$15x_1+11x_2 \leqq 1650$$
$$10x_1+14x_2 \leqq 1400$$
$$9x_1+20x_2 \leqq 1800$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

目的関数の$z=$も
省略される時あり

練習 生産計画

- 2つの液体製品P,Qは機械A,Bを用いて加工される
- 利益が最大になる1週間の製品P,Qの加工量は？

	液体P 1ml	液体Q 1ml	使用可能時間
機械A	3(h)	1(h)	45(h/週)
機械B	1(h)	2(h)	40(h/週)
利益	6(万円)	5(万円)	

定式化してみよう

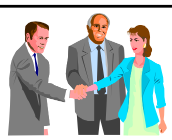
練習 解答例

練習を定式化

x_1 : 液体Pの生産量
x_2 : 液体Qの生産量

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & z=6x_1+5x_2 \\ \text{s.t.} & 3x_1+\ x_2 \leqq 45 \\ & x_1+2x_2 \leqq 40 \\ & x_1, x_2 \geqq 0 \end{array}$$

演習2 原料奪取作戦

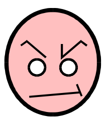


例題1で登場した会社から

- 原液A, B, Cの1日の使用可能量をすべて買い取りたい.
- 支払総額は少なくしたい.
- 問題:各原液1klにいくらで提示する？

この問題を数理モデルで表現しなさい

演習2(続) ヒント



- 変数（コントロールできるもの）
  - 原液Aの買取提示価格 y_1(円/kl)
  - 原液Bの買取提示価格 y_2(円/kl)
  - 原液Cの買取提示価格 y_3(円/kl)
- 制約（交渉成立の条件）:
  売主は自製造で得る利益以下では売らない
  - 自製造で得る利益以上の金額を提示すべき

数理モデルで表現してみよう！

用語：実行可能解と最適解

最適解：最適値を達成する実行可能解 (optimal solution)

$$
\begin{aligned}
\text{max. } & z=5x_1+4x_2 \\
\text{s.t. } & 15x_1+11x_2 \leqq 1650 \\
& 10x_1+14x_2 \leqq 1400 \\
& 9x_1+20x_2 \leqq 1800 \\
& x_1, x_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

最適値：目的関数の最大値 (optimal value)

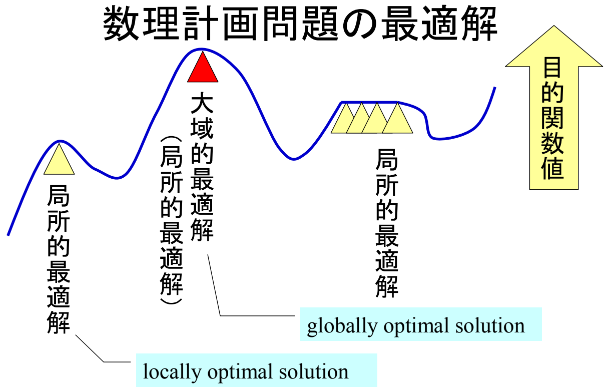
実行可能解：制約式を満たす(x_1,x_2) (feasible solution)

実行可能領域：実行可能解の集合 (feasible region)

※実行可能解が存在しない場合もある→実行不能な問題

※実行可能でも最適解が存在しない場合がある→例題2

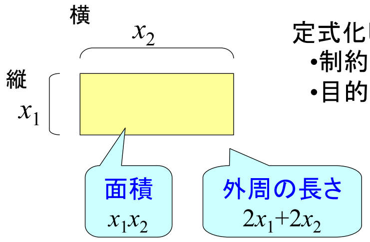
数理計画問題の最適解



※最適解が複数存在する場合もある→通常1つだけ求めればよい

例題2

面積が4以上で，外周の長さ最小の長方形は?



定式化してみよう
- 制約条件は?
- 目的関数は?

例題2 解答例

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & z=2x_1+2x_2 \\ \text{s.t.} & x_1x_2 \geqq 4 \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{array}$$

- 最適解は $x_1=2,\ x_2=2$
- 最適値は 8

横 $x_2=2$

縦 $x_1=2$

正方形

Q. 面積が4以上で縦の長さ最小の長方形は?

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & z=x_1 \\ \text{s.t.} & x_1x_2 \geqq 4 \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{array}$$

限りなく0に近い値?

⇒最適解はない

最適解が存在する･しない

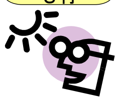
実行可能領域が存在 ⇔ 実行可能領域が空

最適値は有限

最適値が発散

最適解存在

複数存在も有



最適解無し

例題2後半の場合

目的関数値をいくらでも大きくできる

最適解無し

非有界

unbounded

実行可能解がない

↓

最適解無し

実行不能

infeasible

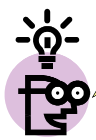
実行可能解の存在判定

実行可能性問題 feasibility problem

実行可能解が存在するのかを判定する問題

解法:いつでも値が0になる関数を目的関数にする

⇒実行可能解があれば, 最適値は0



実行可能性の判定も最適化問題なんだ

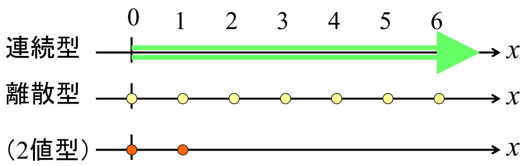
例

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & z=0x_1+0x_2 \\ \text{s.t.} & 15x_1+11x_2 \leqq 1650 \\ & 10x_1+14x_2 \leqq 1400 \\ & 9x_1+20x_2 \leqq 1800 \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{array}$$

定式化の分類法(1)

利用する変数が取れる値の型で分類

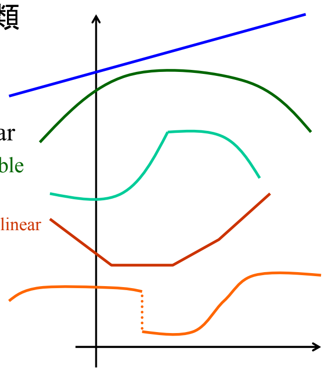
- 連続型 continuous ⇒ 例:実数 real
- 離散型 discrete ⇒ 例:整数 integer(整数計画)
  - 2値型 binary ⇒ 例:0または1(0-1整数計画)



定式化の分類法(2)

使用関数の種類で分類

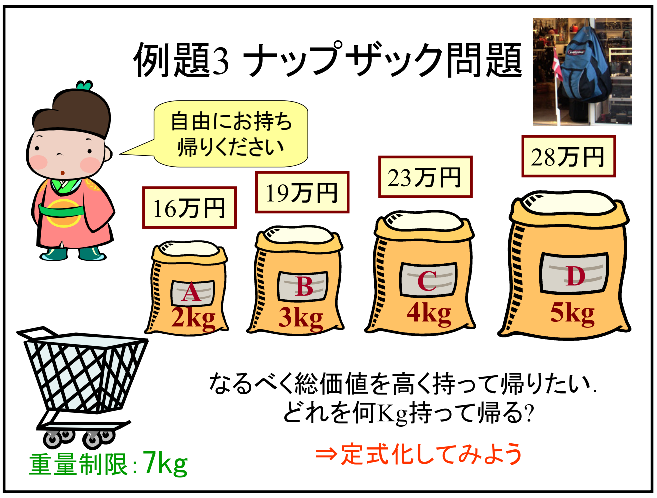
- 連続関数
  - 線形関数 linear
  - 非線形関数 nonlinear
    - 微分可能 differentiable
    - 微分不能 non-
      - 区分線形 piecewise linear
- 非連続
- 凸関数 convex
- 凹関数 concave

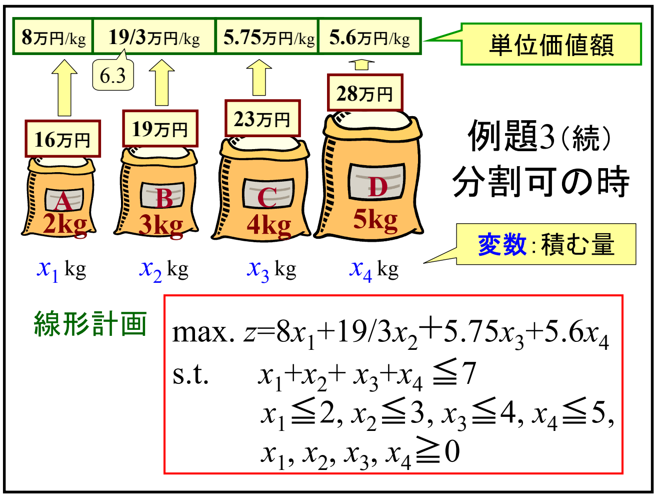


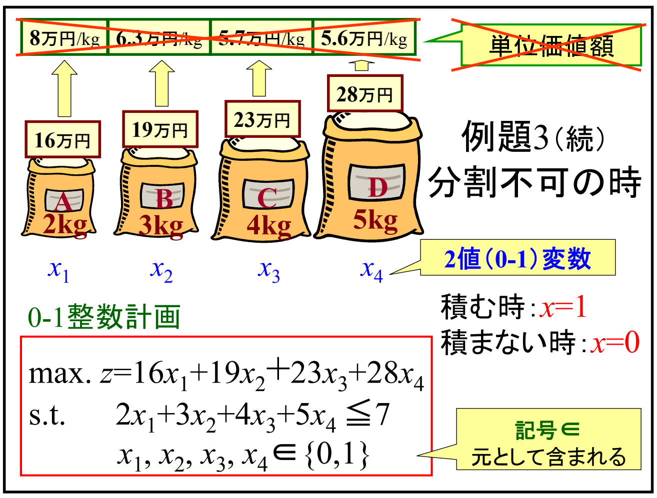
分類後の主な問題名

変数型	目的関数	条件式	問題名	+Programming	略称
連続型	線形	線形	線形計画	Linear	LP
	2次関数	線形	2次計画	Quadratic	QP
	凸関数	凸関数	凸計画	Convex	CP
	非線形	非線形	非線形計画	Nonlinear	NLP
離散型	—	—	整数計画	Integer	IP
	凸	凸	離散凸計画	Discrete Convex	
2値型	—	—	0-1整数計画	Binary Integer	BIP
混合	—	—	混合整数計画	Mixed Integer	MIP

※ 凸計画の等式制約は線形


例題3 ナップザック問題
自由にお持ち帰りください
16万円
19万円
23万円
28万円
A 2kg
B 3kg
C 4kg
D 5kg
なるべく総価値を高く持って帰りたい.
どれを何Kg持って帰る?
⇒定式化してみよう
重量制限:7kg


8万円/kg
19/3万円/kg
5.75万円/kg
5.6万円/kg
単位価値額
6.3
16万円
19万円
23万円
28万円
A 2kg
B 3kg
C 4kg
D 5kg
例題3(続)
分割可の時
変数:積む量
x_1 kg
x_2 kg
x_3 kg
x_4 kg
線形計画
max. $z=8x_1+19/3x_2+5.75x_3+5.6x_4$
s.t. $x_1+x_2+x_3+x_4 \leqq 7$
$x_1 \leqq 2,\ x_2 \leqq 3,\ x_3 \leqq 4,\ x_4 \leqq 5,$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0$


~~8万円/kg~~
~~6.3万円/kg~~
~~5.75万円/kg~~
~~5.6万円/kg~~
~~単位価値額~~
16万円
19万円
23万円
28万円
A 2kg
B 3kg
C 4kg
D 5kg
例題3(続)
分割不可の時
2値(0-1)変数
x_1
x_2
x_3
x_4
0-1整数計画
積む時:x=1
積まない時:x=0
max. $z=16x_1+19x_2+23x_3+28x_4$
s.t. $2x_1+3x_2+4x_3+5x_4 \leqq 7$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$
記号∈
元として含まれる

16万円/袋	19万円/袋	23万円/袋	28万円/袋

例題3（続）分割不可 複数可の時

x_1 袋　x_2 袋　x_3 袋　x_4 袋

変数：いくつ積む?

整数計画

$$\max.\ z=16x_1+19x_2+23x_3+28x_4$$
$$\text{s.t.}\quad 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4 \leqq 7$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in Z_+$$

記号 Z_+
非負整数の集合

（参考）R：実数
Z_{++}：正の整数

16万円/袋	19万円/袋	23万円/袋	28万円/袋

Dのみ分割可

例題3（続）分割一部可 複数可の時

x_1 袋　x_2 袋　x_3 袋　x_4 袋

変数：何袋分積む?

変数：何袋積む?

混合整数計画

$$\max.\ z=16x_1+19x_2+23x_3+28x_4$$
$$\text{s.t.}\quad 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4 \leqq 7$$
$$x_1, x_2, x_3 \in Z_+,\ \boldsymbol{x_4 \geqq 0}$$

例題3（続）分割不可の時(別表現1)

2kg,3kg,4kg,5kg　カートの重量制限(kg)

対象の粉を順に増やす

	0	1	2	3	4	5	6	7
なし	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	16	16	16	16	16	16
	0	0	16	19	19	35	35	35
	0	0	16	19	23	35	39	42
	0	0	16	19	23	35	39	44

積む　積まない　+0　+16　+19　+23　+28

16万,19万,23万,28万

例題3（続）動的計画法

カートの重量制限

	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	**0**	**16**	**19**	**19**	**35**	**35**	**35**
4kg	**0**	**0**	**16**	**19**	**23**	**35**	**39**	**42**

+23

粉がk種類，カートの制限重量がαkgの時の最適値

制限重量αが粉kの重み以下のとき

粉kを積まない　　粉kを積む

$$f(k,\alpha)=\begin{cases} f(k-1,\alpha) \\ \max\{f(k-1,\alpha),\ (k\text{の価値})+f(k-1,\alpha-(k\text{の重み}))\} \end{cases}$$

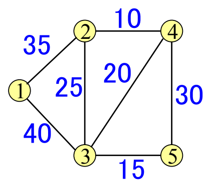
比較して，価値の高い方を採用　　再帰方程式

⇨ 動的計画法 Dynamic Programming（DP）

例題4 ガス管配置

5軒の家にガスを供給したい

設置費用が最小になるガス管の設置方法は?



定式化してみよう

目的 設置費用合計→最小

制約 5軒にガスを供給

⇕

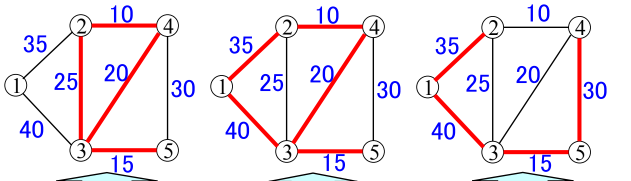
ガス管が繋がっている＋5軒を張っている

枝：設置可能路線

数字:設置費用

例題4（続） 最適解でない例

なぜ最適でないのか？



条件を満たしていない　　自明な無駄がある　　他に良いプランがある

実行不能　　改善策

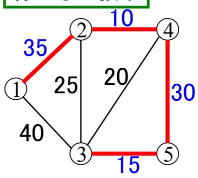
閉路は無駄
×閉路上の最大重み枝

非連結部分を繋げる
○最小重み枝

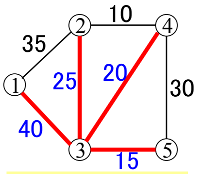
例題4（続）実行可能解が持つ性質

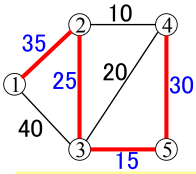
閉路は無駄 ⇒ 閉路の無いグラフ＝木
全点を結ぶ ⇒ 全張(spanning;スパンする)
} 全張木 spanning tree

様々な全張木



35+10+30+15=90　40+25+20+15=100　35+25+30+15=105



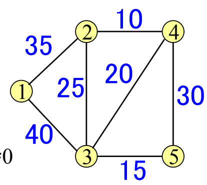


問題の本質 重み和最小の全張木（最小木）を見つけよ
⇔ 最小木問題
Minimum spanning tree problem

例題4（続）最小木問題の定式化

解きたい問題

目的 利用枝の重みの和→最小
制約 利用枝は全点を結ぶ
　　 利用枝に閉路がない



使用変数

x_{ij}:枝(i,j)を利用する時1，利用しない時0

目的関数

min. $z=35x_{12}+40x_{13}+25x_{23}+10x_{24}+20x_{34}+15x_{35}+30x_{45}$

制約条件式は?

例題4（続）「閉路がない」の表現

閉路がない ↔ 閉路がある

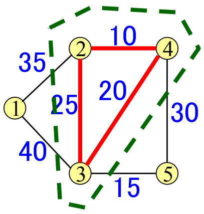
（部分点集合内での使用枝数）＜（部分点集合の大きさ）

（部分点集合内での使用枝数）＝（部分点集合の大きさ）

（部分点集合内での使用枝数）≦（部分点集合の大きさ）－1

例 点部分集合{②,③,④}に対して

$x_{23}+x_{24}+x_{34} \leqq 2$



例題4（続）定式化

min. $z=35x_{12}+40x_{13}+25x_{23}+10x_{24}+20x_{34}+15x_{35}+30x_{45}$

s.t. $x_{12}+x_{13}+x_{23}+x_{24}+x_{34}+x_{35}+x_{45}=4$　全部分集合に対して

（使用枝本数）≦（部分集合の大きさ）－1

$x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, x_{35}, x_{45} \in \{0,1\}$

部分集合は$2^{(\text{点数})}$個存在

定式化は可能だが
サイズ大で実際には扱えない

⇨ 使用枝の組合せを決める問題

⇨ 組合せ最適化問題　combinatorial optimization problem
離散最適化問題　discrete optimization problem

例題4（続）定式化

min. $z=35x_{12}+40x_{13}+25x_{23}+10x_{24}+20x_{34}+15x_{35}+30x_{45}$

s.t. $x_{12}+x_{13}+x_{23}+x_{24}+x_{34}+x_{35}+x_{45}=4$

$x12+x13+x23 \leqq 2$

$x23+x24+x34 \leqq 2$

$x34+x35+x45 \leqq 2$

$x12+x13+x23+x24+x34 \leqq 3$

$x12+x13+x23+x35 \leqq 3$

$x13+x34+x35+x45 \leqq 3$

$x23+x24+x34+x35+x45 \leqq 3$

$x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, x_{35}, x_{45} \in \{0,1\}$

定式化を利用しない

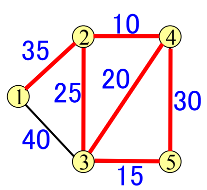
最小木の見つけ方：アイディア(1)

閉路⇒最大重みの枝を消去

⇩ 実現方法例

重みの小さい順に枝を選択し
閉路になる時は選ばない
全点がつながったら終了

クラスカル法
（Kruskal）



定式化を利用しない

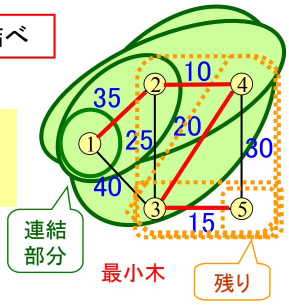
最小木の見つけ方：アイディア(2)

非連結⇒最小重みの枝で結べ

実現方法例

1点から連結部分を1点ずつ
最小重みの枝で増やす
全点が連結になったら終了

プリム法
(Prim)



最小木問題に対する解法の計算量

n:グラフの点数
m:グラフの枝数

クラスカル法

- 閉路の発見に集合の併合操作 $O(m+n\log n)$
- データ構造の改造で $O(m\alpha(m,n))+O(m\log n)$

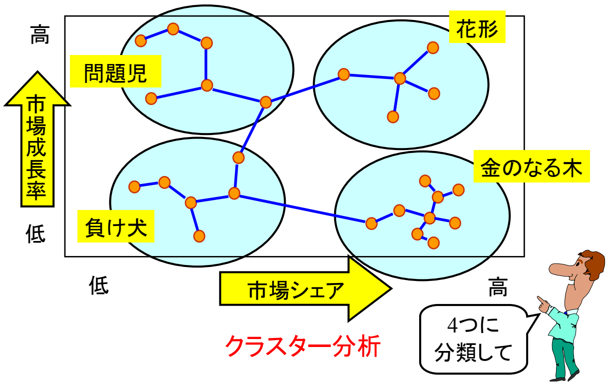
Ackermann逆関数

プリム法

- $O(n^2)$ ⇒Fibonacciヒープの利用 $O(m+n\log n)$
- 改良 $O(m\beta(m,n))$ ⇒さらに改良$O(m\log\beta(m,n))$

O(m) 線形時間解法はあるか?　◎存在確認
◎平面グラフ

最小木問題の利用例



クラスター分析

演習3 定式化せよ

施設配置問題

（建設費）＋（配送費）を最小にしたい.
どこに倉庫を建設し,
どのように配送すればよいか.
この問題を定式化せよ.

倉庫候補地

③ 店 1 ① 2 ②

ヒント

コントロールできるもの

$0 \leqq x_{ij} \leqq 1$

倉庫iから店jへの配送量⇒0～1の値

倉庫iを建設する･しない⇒2値

$y_i \in \{0,1\}$

- 倉庫iの建設費用 f_i (i=1,2)
- 倉庫iと店j間の配送費用 c_{ij} (i=1,2 ; j=1,2,3)
- 各店の需要は1. 分割配送可能.

まとめ

- 問題表現法のひとつ：定式化
- 様々な表現方法がある

（次は）⇒解の導出を考えよう！

寄り道 組合せ最適化

◎組み合わせる（動詞）

意味が違う

× 組み合わせ最適化
× 組合わせ最適化
× 組合最適化