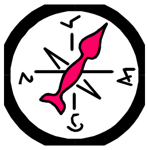
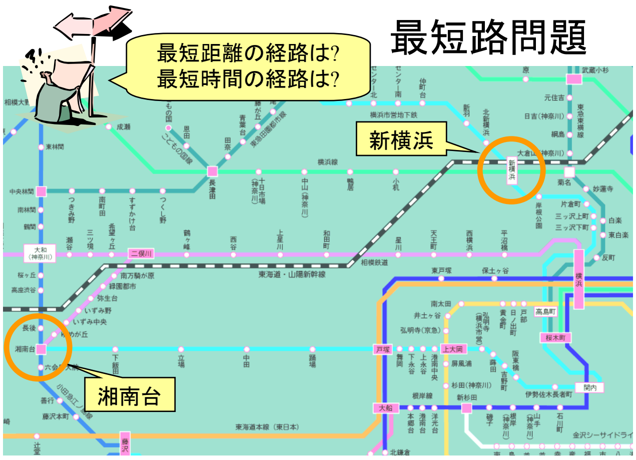
OR特論



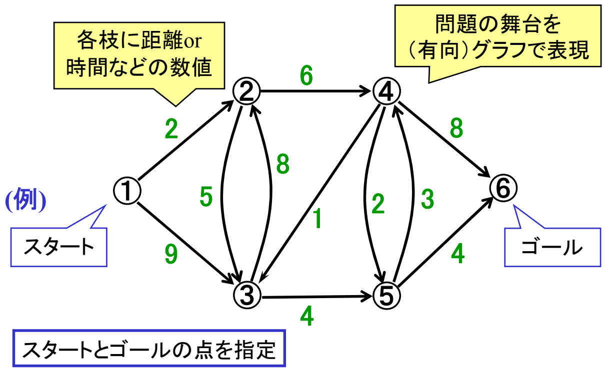
双対定理の解法への利用

最短路問題を例として

最短路問題



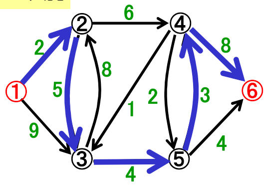
最短路問題のネットワーク表現



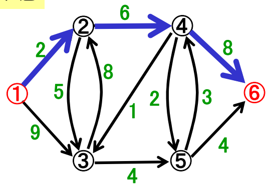
パス(経路)とその長さ

パス(経路):ある点とある点を結ぶ枝の列(向きに注意!)

パスA



パスB

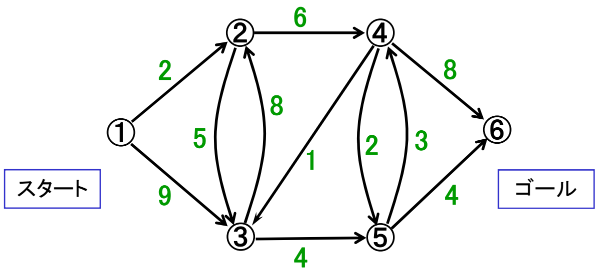


パスの長さ:2+5+4+3+8=22

2+6+8=16

- •スタートとゴールを結ぶパスは多数
- •その中で長さが最短のパス＝最短路
- •最短路を見つける問題:最短路問題

例題1 最短路を求めよ



最短路問題を定式化してみよう

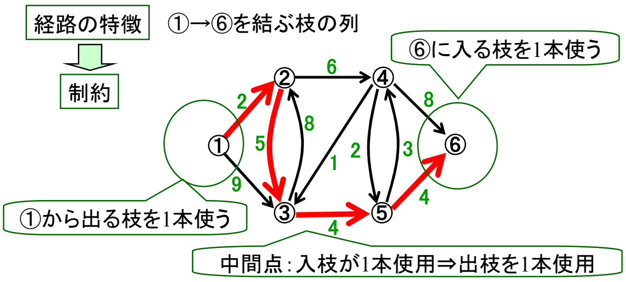
例題1(続) 定式化の準備

決めたいこと　どの枝を通るか

変数　$x_{ij}\in\{0,1\}$:枝(i,j)を通る$x_{ij}=1$; 通らない$x_{ij}=0$

経路の特徴　①→⑥を結ぶ枝の列

制約



例題1(続) 最短路問題の定式化

$$\min.\ 2x_{12}+9x_{13}+5x_{23}+6x_{24}+8x_{32}+4x_{35}+x_{43}+2x_{45}+8x_{46}+3x_{54}+4x_{56}$$

s.t.

$x_{12}+x_{13}=1$ ①から出る枝を1本使う

$x_{12}+x_{32}=x_{23}+x_{24}$

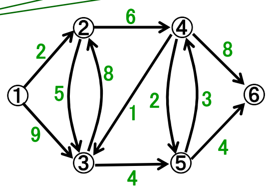
$x_{13}+x_{23}+x_{43}=x_{32}+x_{35}$ 中間点：入枝が1本使用 ⇒出枝を1本使用

$x_{24}+x_{54}=x_{43}+x_{45}+x_{46}$

$x_{35}+x_{45}=x_{54}+x_{56}$

$x_{46}+x_{56}=1$ ⑥に入る枝を1本使う

全枝(i,j)に対して$x_{ij}\in\{0,1\}$



例題1(続) 数式表現の整理

最短路問題（IP）

$$\min.\ 2x_{12}+9x_{13}+5x_{23}+6x_{24}+8x_{32}+4x_{35}+x_{43}+2x_{45}+8x_{46}+3x_{54}+4x_{56}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & -x_{12}-x_{13} = -1\\
& +x_{12}-x_{23}-x_{24}+x_{32} = 0\\
& +x_{13}+x_{23}-x_{32}-x_{35}+x_{43} = 0\\
& +x_{24}-x_{43}-x_{45}-x_{46}+x_{54} = 0\\
& +x_{35}+x_{45}-x_{54}-x_{56} = 0\\
& +x_{46}+x_{56} = 1
\end{aligned}$$

全枝(i,j)に対して ~~$x_{ij}\in\{0,1\}$~~ $x_{ij}\geqq 0$

LP緩和

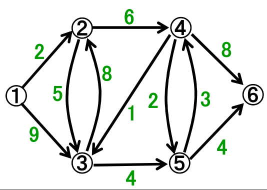
線形計画問題(P)

演習：(P)の双対問題を作ってみよう
相補性条件を導いてみよう

寄り道 ネットワークのデータ表現

$$\begin{array}{c|ccccccccccc}
 & a_{12} & a_{13} & a_{23} & a_{24} & a_{32} & a_{35} & a_{43} & a_{45} & a_{46} & a_{54} & a_{56}\\
\hline
① & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
② & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
③ & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
④ & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0\\
⑤ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1\\
⑥ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1
\end{array}$$

接続行列
(incidence matrix)



双対問題(D)

双対変数: $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$

$$
\begin{aligned}
\max.\ & -p_1 + p_6 \\
\text{s.t.}\ & p_2 - p_1 \le 2 \\
& p_3 - p_1 \le 9 \\
& p_3 - p_2 \le 5 \\
& p_4 - p_2 \le 6 \\
& p_2 - p_3 \le 8 \\
& p_5 - p_3 \le 4 \\
& p_3 - p_4 \le 1 \\
& p_5 - p_4 \le 2 \\
& p_6 - p_4 \le 8 \\
& p_4 - p_5 \le 3 \\
& p_6 - p_5 \le 4
\end{aligned}
$$

仮定 p_1=0

$$
\begin{aligned}
\max.\ & p_6 \\
\text{s.t.}\ & p_2 \le p_1 + 2 \\
& p_3 \le p_1 + 9 \\
& p_3 \le p_2 + 5 \\
& p_4 \le p_2 + 6 \\
& p_2 \le p_3 + 8 \\
& p_5 \le p_3 + 4 \\
& p_3 \le p_4 + 1 \\
& p_5 \le p_4 + 2 \\
& p_6 \le p_4 + 8 \\
& p_4 \le p_5 + 3 \\
& p_6 \le p_5 + 4 \\
& p_1 = 0
\end{aligned}
$$

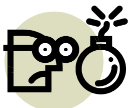
どうやって解く?

(D)の解き方:アイディア

$$
\begin{aligned}
\max.\ & p_6 \\
\text{s.t.}\ & p_2 \le p_1 + 2 \\
& p_3 \le p_1 + 9 \\
& p_3 \le p_2 + 5 \\
& p_4 \le p_2 + 6 \\
& p_2 \le p_3 + 8 \\
& p_5 \le p_3 + 4 \\
& p_3 \le p_4 + 1 \\
& p_5 \le p_4 + 2 \\
& p_6 \le p_4 + 8 \\
& p_4 \le p_5 + 3 \\
& p_6 \le p_5 + 4 \\
& p_1 = 0
\end{aligned}
$$

ベルマン方程式(Bellman's equation)

$$
\begin{aligned}
& p_1 = 0 \\
& p_2 = \min\{p_1 + 2, p_3 + 8\} \\
& p_3 = \min\{p_1 + 9, p_2 + 5, p_4 + 1\} \\
& p_4 = \min\{p_2 + 6, p_5 + 3\} \\
& p_5 = \min\{p_3 + 4, p_4 + 2\} \\
& p_6 = \min\{p_4 + 8, p_5 + 4\}
\end{aligned}
$$



この方程式って解けるの?

ベルマン方程式の解き方

$$
\begin{aligned}
& p_1 = 0 \\
& p_2 = \min\{p_1 + 2, p_3 + 8\} \\
& p_3 = \min\{p_1 + 9, p_2 + 5, p_4 + 1\} \\
& p_4 = \min\{p_2 + 6, p_5 + 3\} \\
& p_5 = \min\{p_3 + 4, p_4 + 2\} \\
& p_6 = \min\{p_4 + 8, p_5 + 4\}
\end{aligned}
$$

無変化で終了

	初期解	改定1	改定2	改定3	改定4	改定5	改定6
p_1	0	0	0	0	0	0	0
p_2	∞	2	2	2	2	2	2
p_3	∞	9	7	7	7	7	7
p_4	∞	∞	8	8	8	8	8
p_5	∞	∞	13	11	10	10	10
p_6	∞	∞	∞	16	15	14	14

(D)の最適解

動的計画法の利用

ベルマン-フォード法

計算量:O(mn)

n:点数
m:枝数

(D)の解⇒(P)の解

相補性条件

$(2-p_2+p_1)x_{12}=0$
$(9-p_3+p_1)x_{13}=0$
$(5-p_3+p_2)x_{23}=0$
$(6-p_4+p_2)x_{24}=0$
$(8-p_2+p_3)x_{32}=0$
$(4-p_5+p_3)x_{35}=0$
$(1-p_3+p_4)x_{43}=0$
$(2-p_5+p_4)x_{45}=0$
$(8-p_6+p_4)x_{46}=0$
$(3-p_4+p_5)x_{54}=0$
$(4-p_6+p_5)x_{56}=0$

	解
p_1	0
p_2	2
p_3	7
p_4	8
p_5	10
p_6	14

⇒

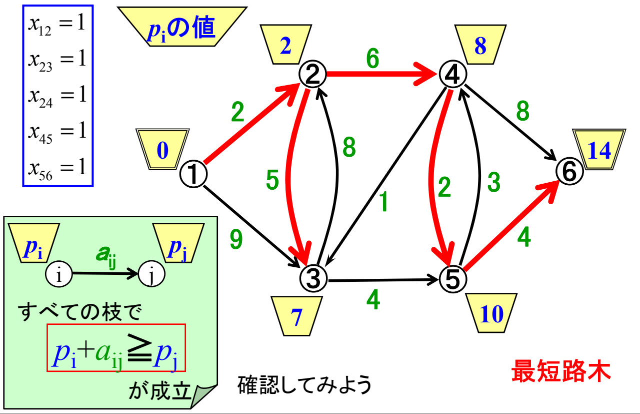
$(0)x_{12}=0$
$(2)x_{13}=0$
$(0)x_{23}=0$
$(0)x_{24}=0$
$(13)x_{32}=0$
$(1)x_{35}=0$
$(2)x_{43}=0$
$(0)x_{45}=0$
$(2)x_{46}=0$
$(5)x_{54}=0$
$(0)x_{56}=0$

⇒

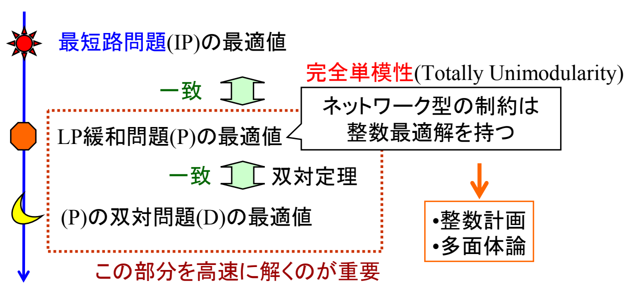
$x_{13}=0$
$x_{32}=0$
$x_{35}=0$
$x_{43}=0$
$x_{46}=0$
$x_{54}=0$

$x_{12}=1$
$x_{23}=1$
$x_{24}=1$
$x_{45}=1$
$x_{56}=1$

例題1(続) (P)の最適解

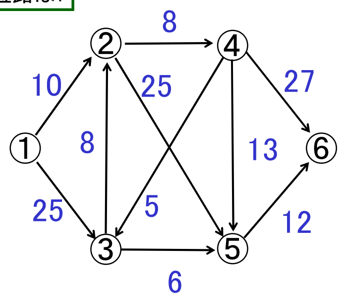


(IP)と(P)とその双対問題(D)



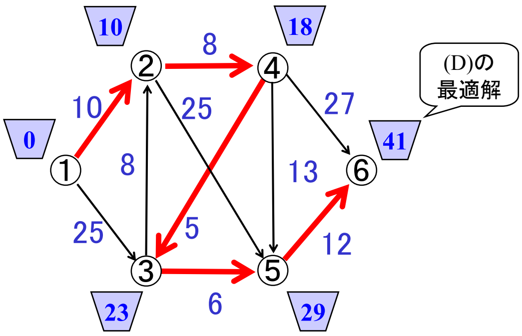
練習1 ベルマン−フォード法

①⇒⑥の最短路は?



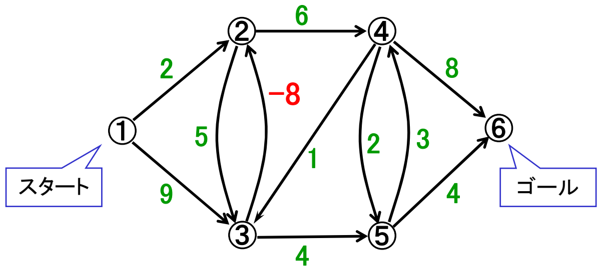
練習1 解答例

①を根とした最短路木



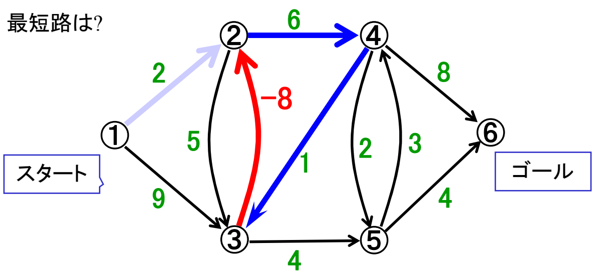
例題2 負の長さがある場合

最短路を求めよ



例題2(続) 負閉路の存在

最短路は?

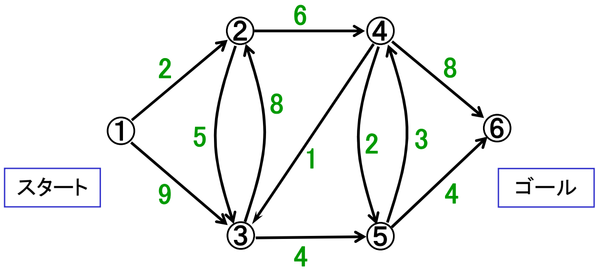


ベルマン-フォード法を適用⇒停止しない
（最短路が存在しない）

⇩

枝数回の繰り返しで停止させる（負閉路or最短路の発見）

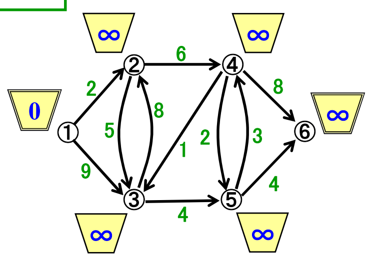
例題3 負の長さの枝が無いとき



枝の数値は
非負と仮定!

例題3(続) 性質を満たす
ポテンシャルの見つけ方(1)

準備:
- スタートのポテンシャルを**0**
- 残りの点のポテンシャルは**∞**
- 全点が未確定.



性質を満たすよう
ポテンシャルを順に更新

ダイクストラ法
Dijkstra

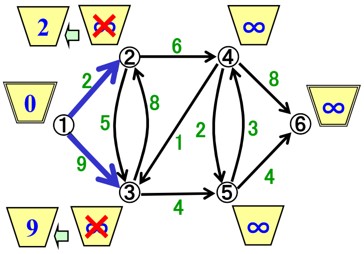
例題3(続) 性質を満たす**ポテンシャルの見つけ方(1)**

手順:全点が確定するまで以下を繰り返す

① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定

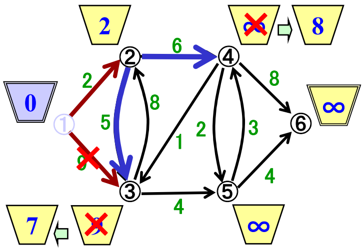


例題3(続) 性質を満たす**ポテンシャルの見つけ方(2)**

① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定

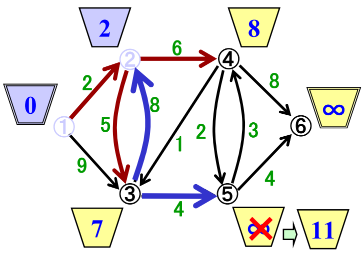


例題3(続) 性質を満たす**ポテンシャルの見つけ方(3)**

① ポテンシャル最小未確定点の選択

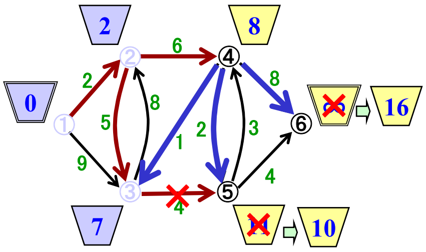
② ポテンシャル更新

③ 点を確定



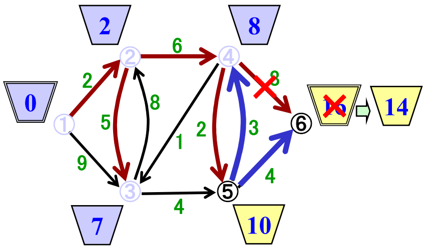
例題3(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方（4）

① ポテンシャル最小未確定点の選択
② ポテンシャル更新
③ 点を確定



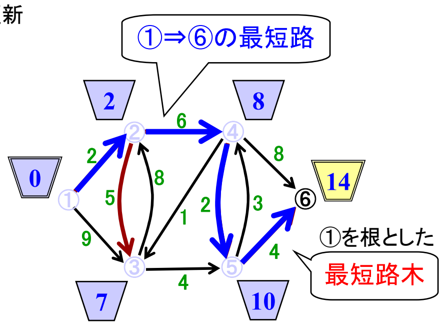
例題3(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方（5）

① ポテンシャル最小未確定点の選択
② ポテンシャル更新
③ 点を確定



例題3(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方（6）

① ポテンシャル最小未確定点の選択
② ポテンシャル更新
③ 点を確定
⇩
全点が確定し終了



最適なポテンシャルが見つかった ⇨ 最短路も見つかった

ダイクストラ法の高速実現法

ポテンシャル最小の点を高速に発見

– 未確定点を配列でなくリスト構造で保持
（走査する点数を減らす）
– 未確定点をポテンシャルの値順に整列
→整列アルゴリズムの知識が必要

フィボナッチヒープ

効率的実装

O(m+$n$log$n$)

基本的なアルゴリズム+
データ構造の知識は
不可欠

まとめ：問題を解く戦略を練る