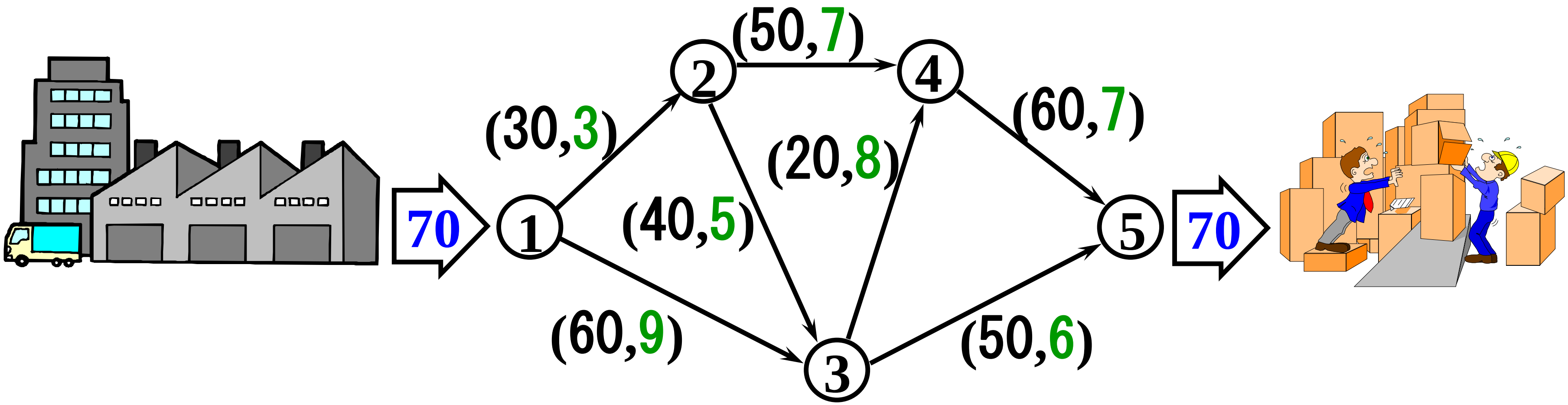
Network Programming IV

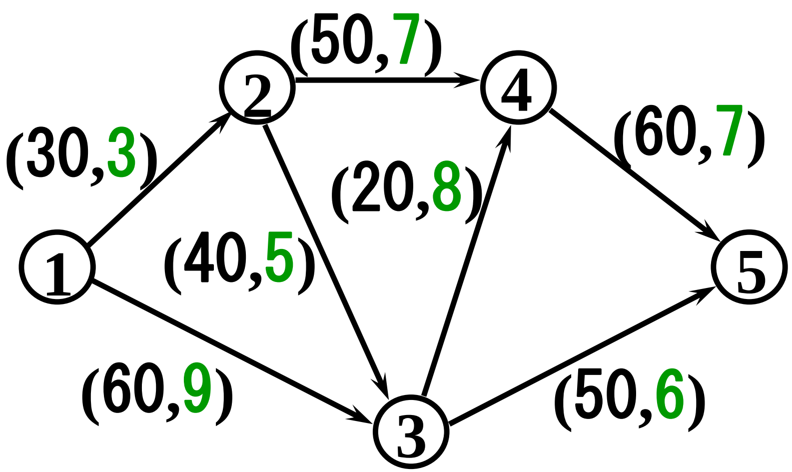
例題1 輸送作戦

文教工業では工場から倉庫へ70トン製品を輸送したい．最も費用の安い輸送計画を提案してほしい．

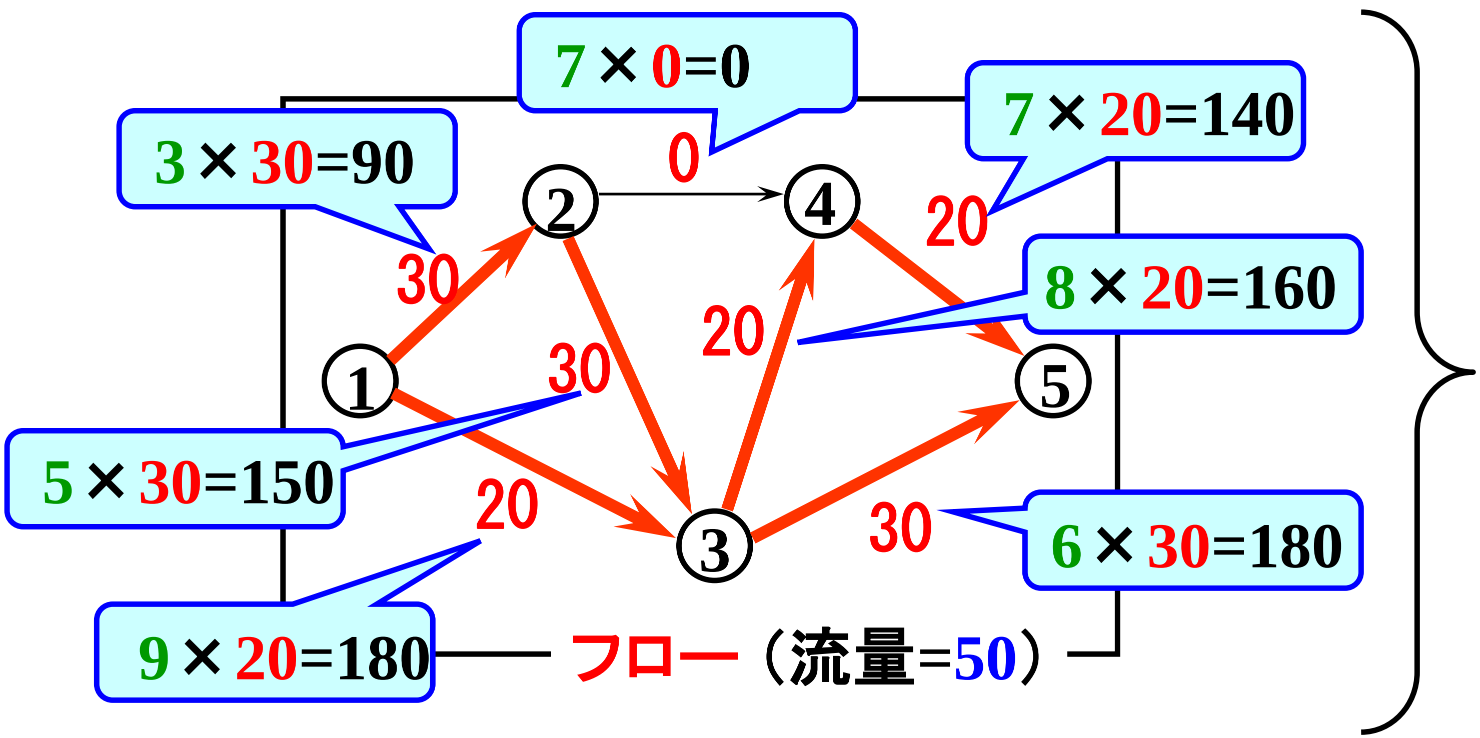


(枝の容量（トン）,1トン当たりの費用（万円）)

フローにより生じる費用



単位フロー当たりの費用×フロー



このフローに対する費用
900

最小費用フロー問題

目的 フローにより生じる費用→最小
条件 指定された流量の実行可能フローであること

最小費用フロー：指定された流量を持つ
費用最小の実行可能フロー

最小費用流問題に対する主な解法

- **負サイクル法**
  - コストがより下がる閉路を見つけて更新する.
  - 簡単. 工夫次第でより高速にできる.
- **最短路繰返し法**(→主双対法)
  - コスト最小路にフローを流す手続きを繰返す.
  - 簡単. 工夫次第でより高速にできる.
- **ネットワーク単体法**
  - 実用的解法.

他多数の解法が提案されている.

最短路繰返し法

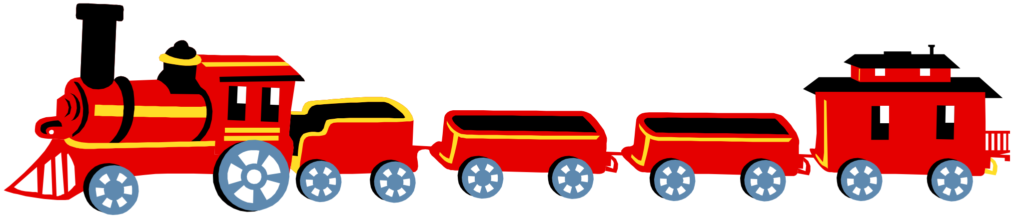
手順1:全枝のフローを0と置く.

手順2:以下を指定流量が得られるまで繰返す.

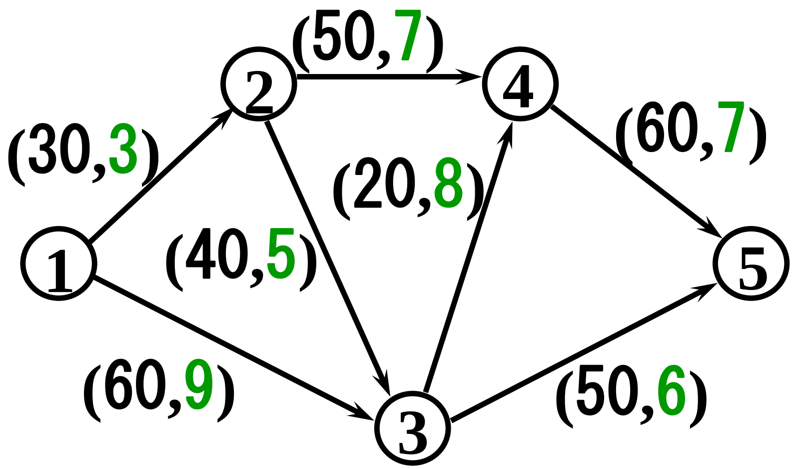
（1）**残余ネットワーク**を作る.

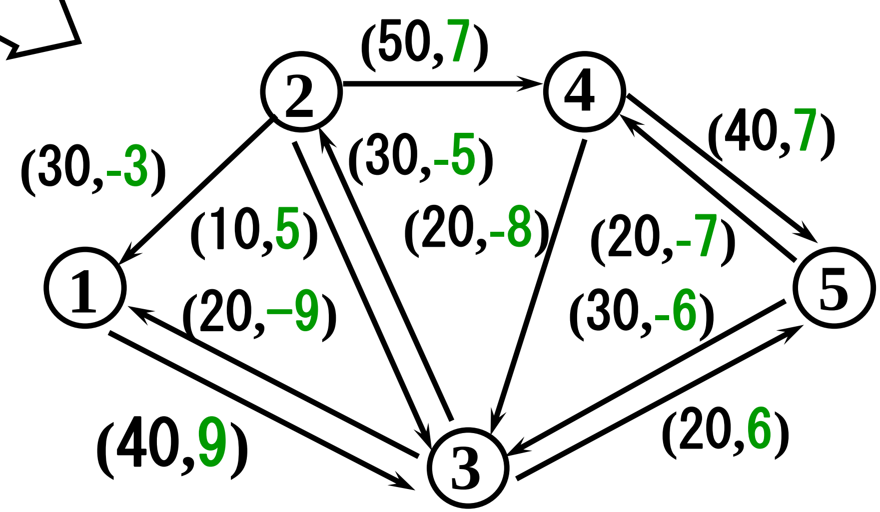
（2）残余ネットワーク上で供給点から需要点へのコスト最小の路（最短路）を求める.

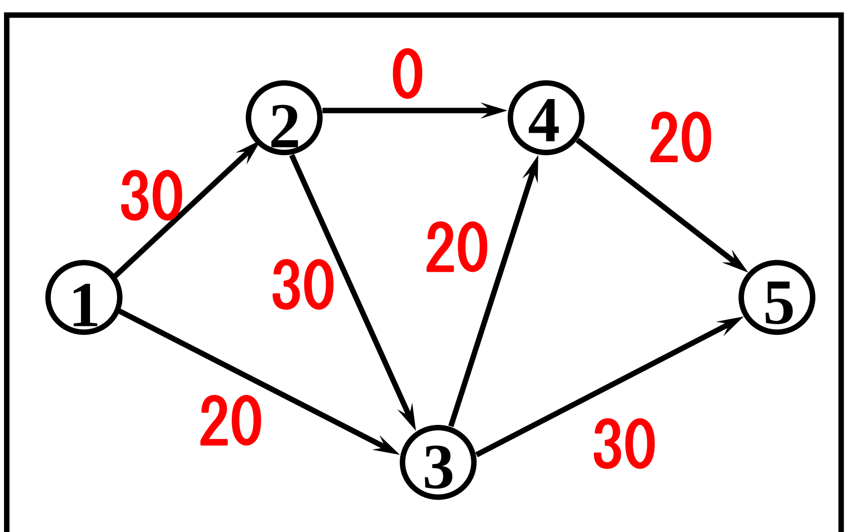
（3）最短路に沿って流せるだけフローを流す.



最小費用フローでの
残余ネットワーク

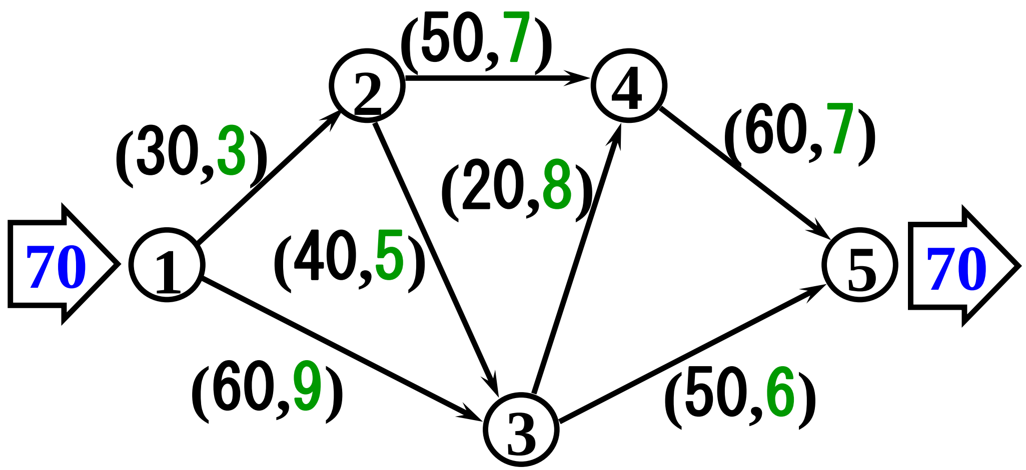




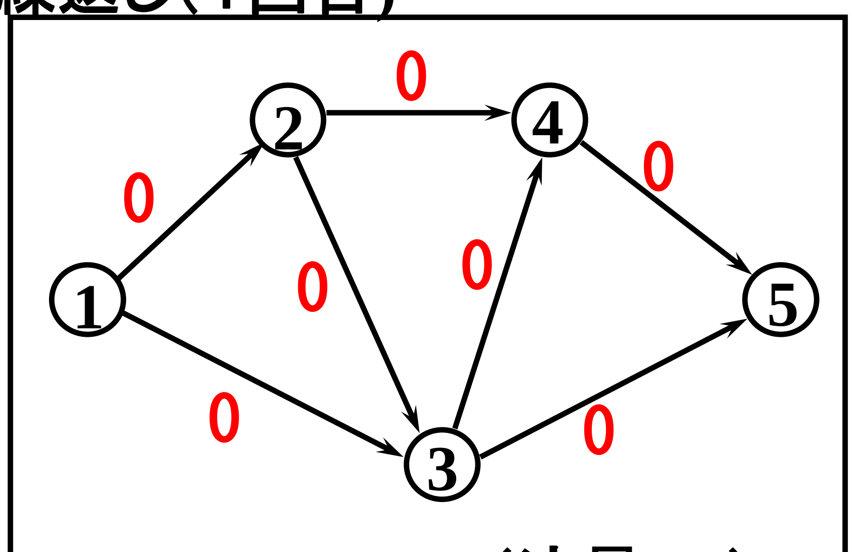


フロー（流量=50）

例題2 最短路繰返し法

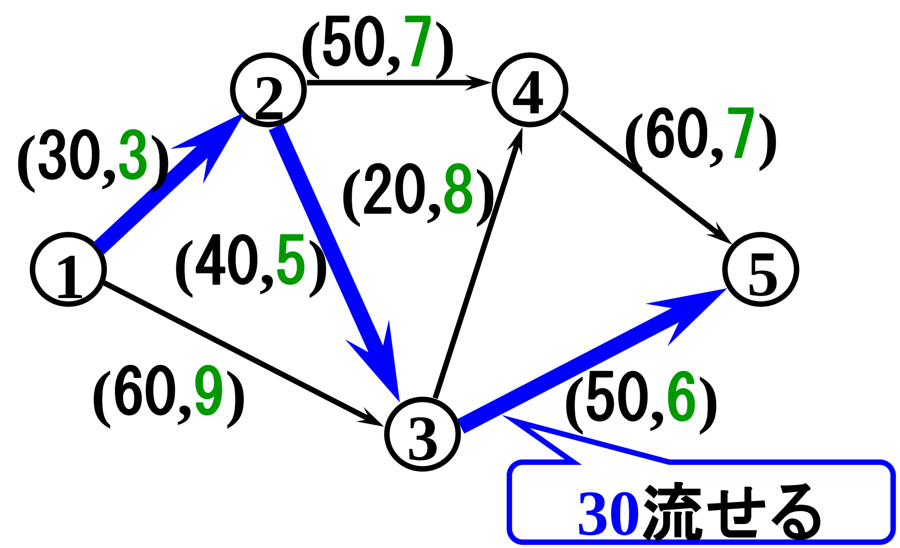


繰返し(1回目)

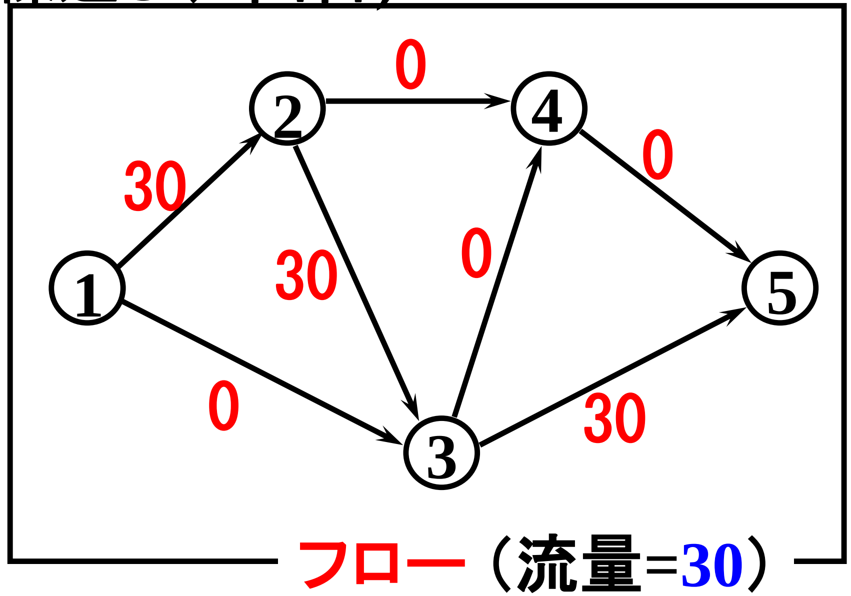


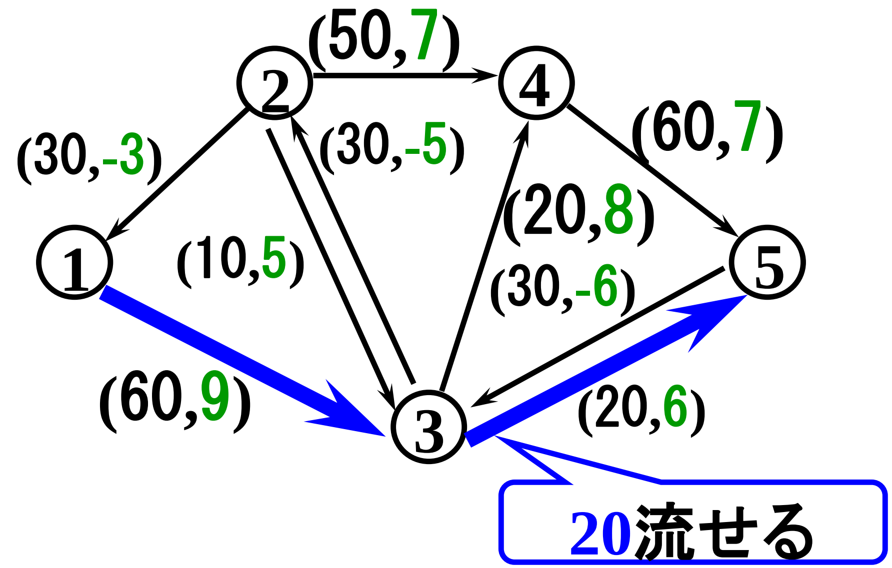
フロー（流量=0）

残余ネットワーク

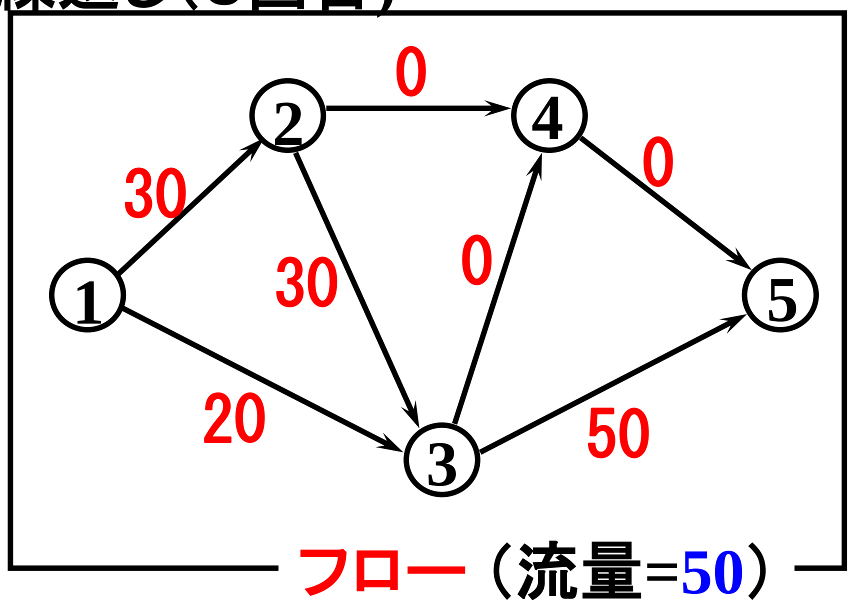


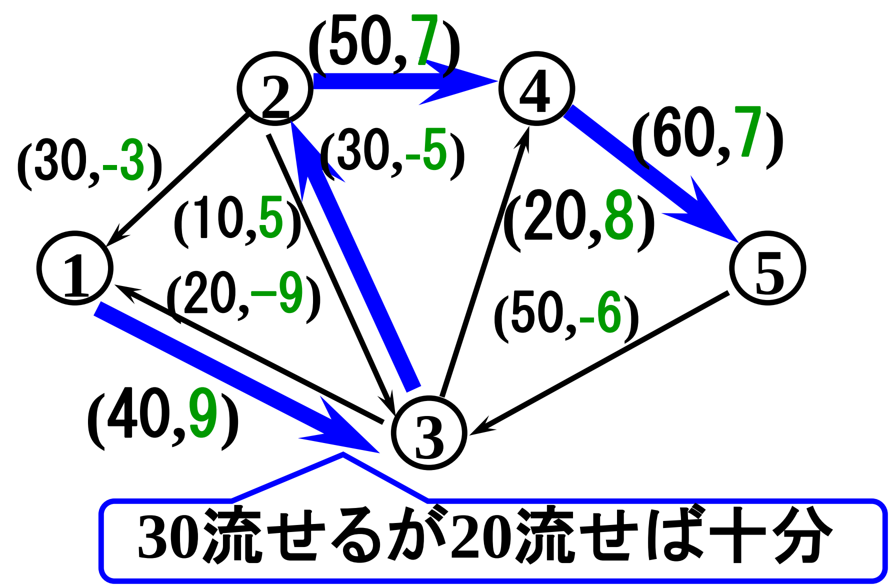
繰返し(2回目)



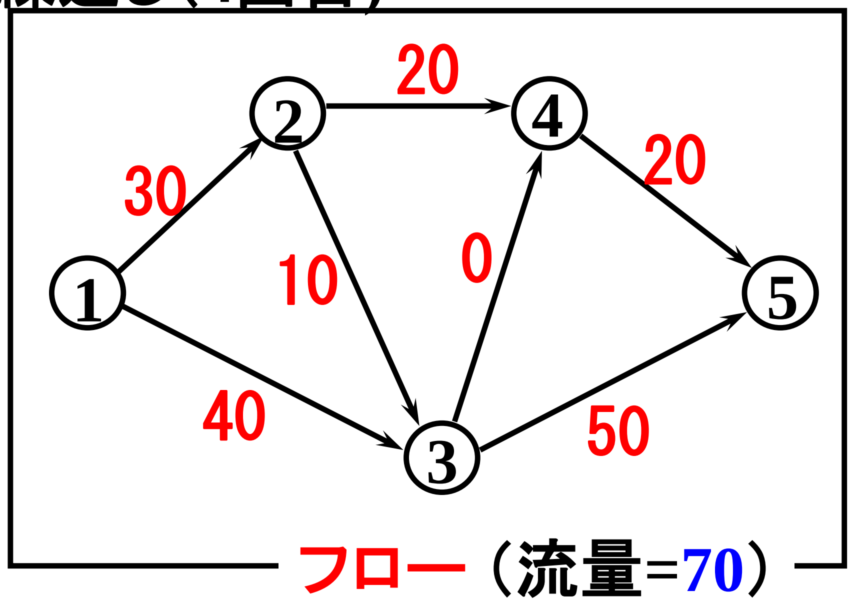


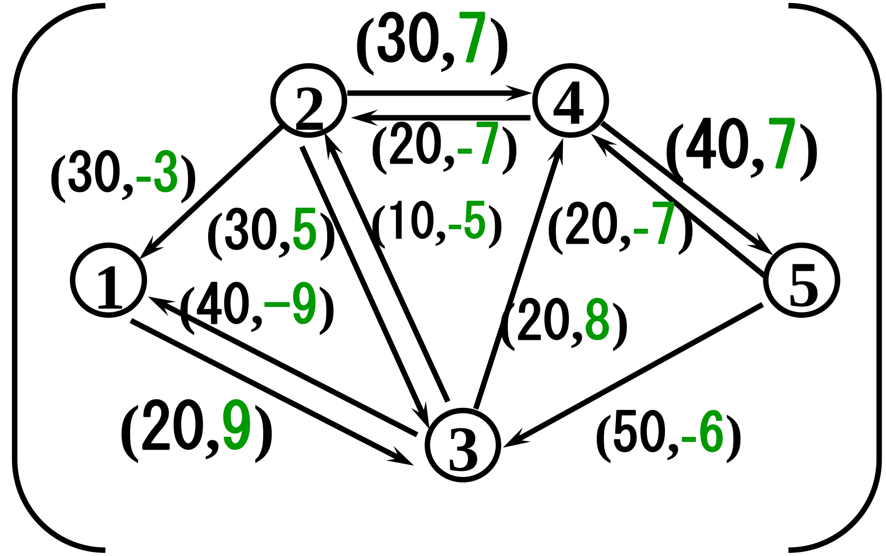
繰返し(3回目)





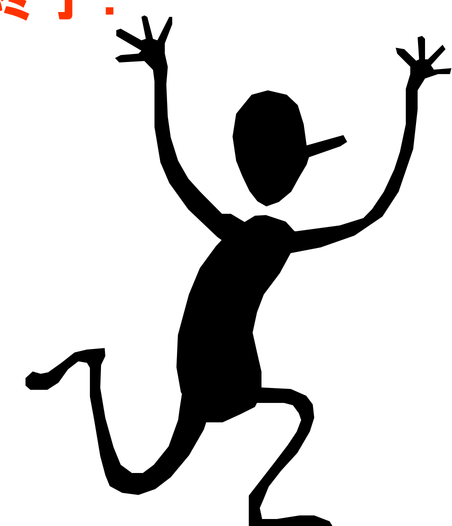
繰返し(4回目)



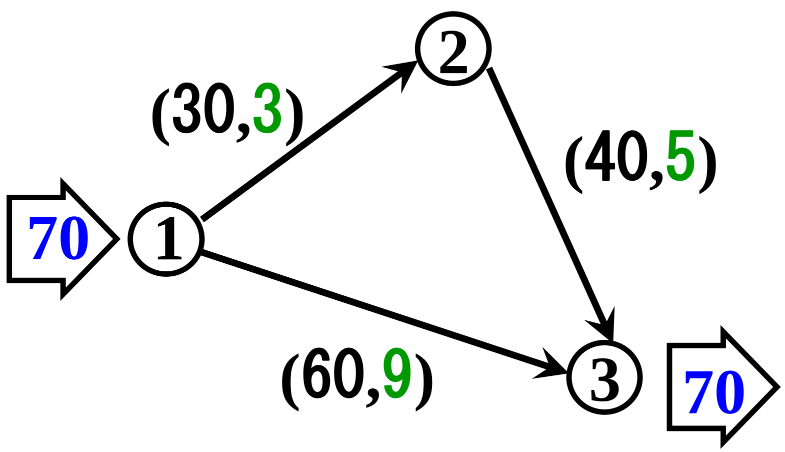


流量が供給量の70に到達したので終了.

流量70の最小費用フロー

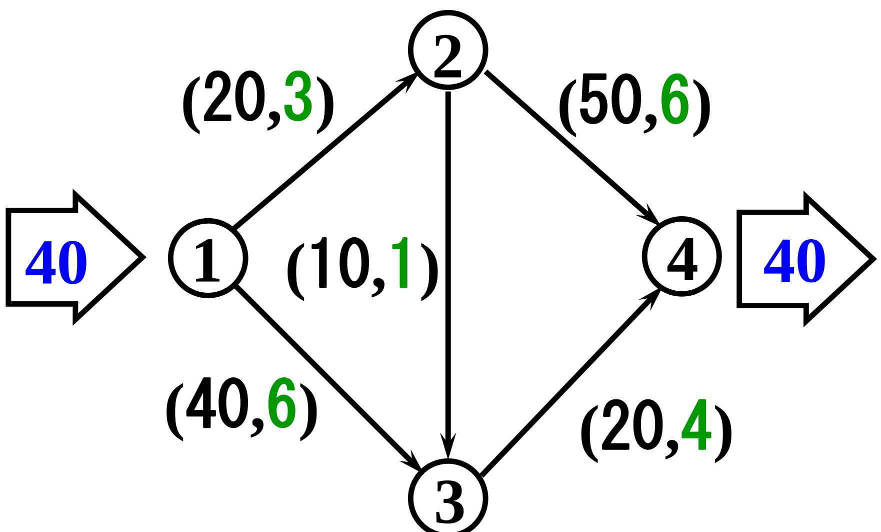


練習



演習1

流量40の最小費用フローを求めよ. また, その時の費用を求めよ.



（容量, 1単位当たりの費用）

最短路繰返し法の弱い点

残余ネットワークに負の長さの枝が現れる.

最短路を求めるのにダイクストラ法が使えない.

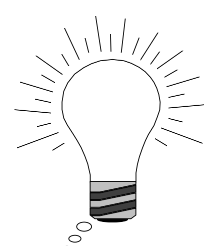
対策1

ダイクストラ法より計算時間はかかるが，負の長さも扱える解法を利用する.

あまり良い対策ではない

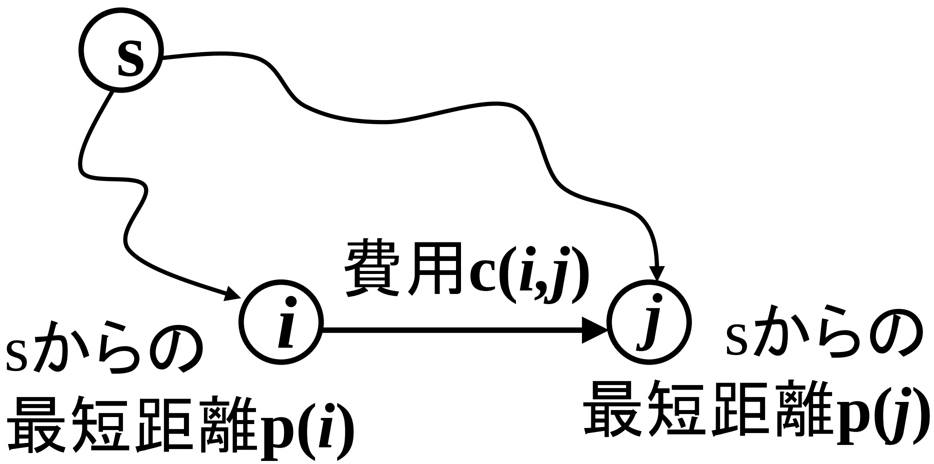
対策2

残余ネットワークを工夫し，高速なダイクストラ法を利用する.



残余費用の導入

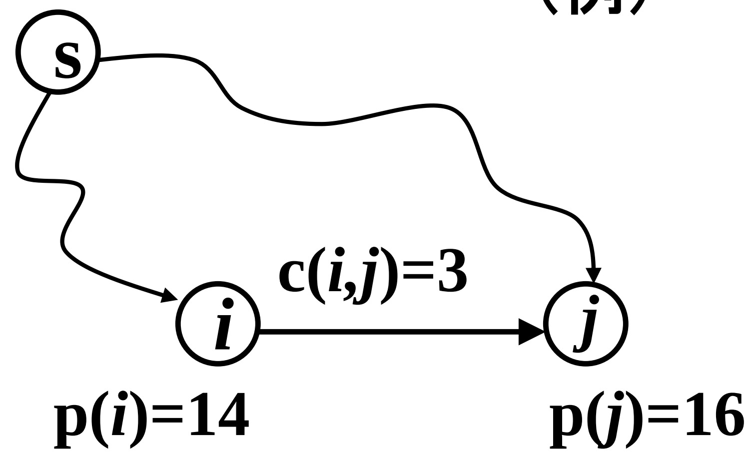
残余費用



残余費用

$\underline{c}(i,j)=c(i,j)+p(i)-p(j)$

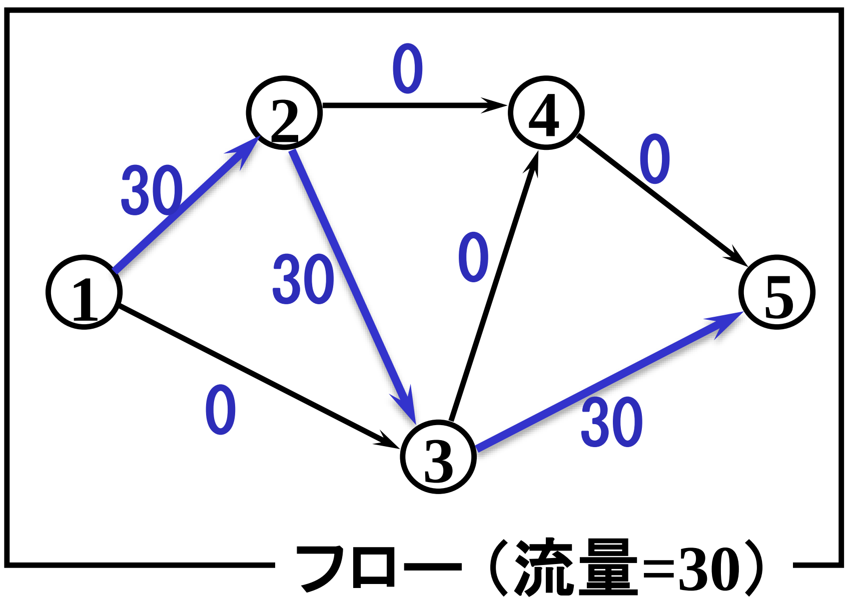
（例）

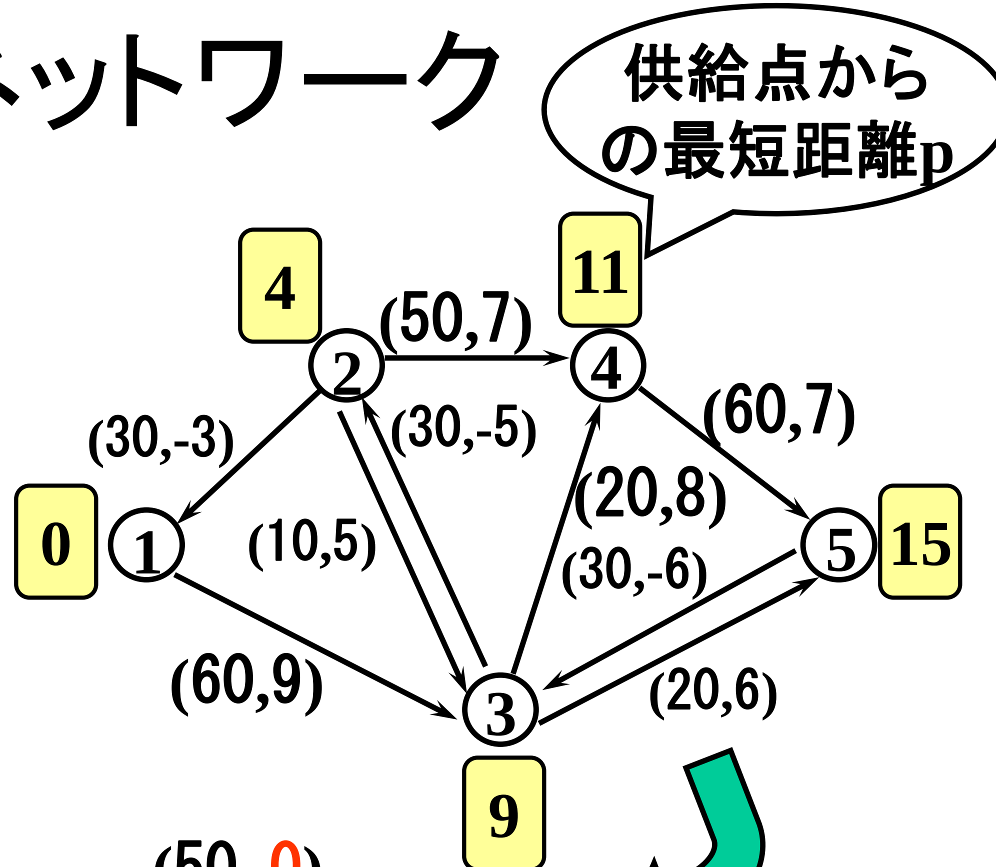


$\underline{c}(i,j)=3+14-16=1$

残余費用は非負である. なぜ？

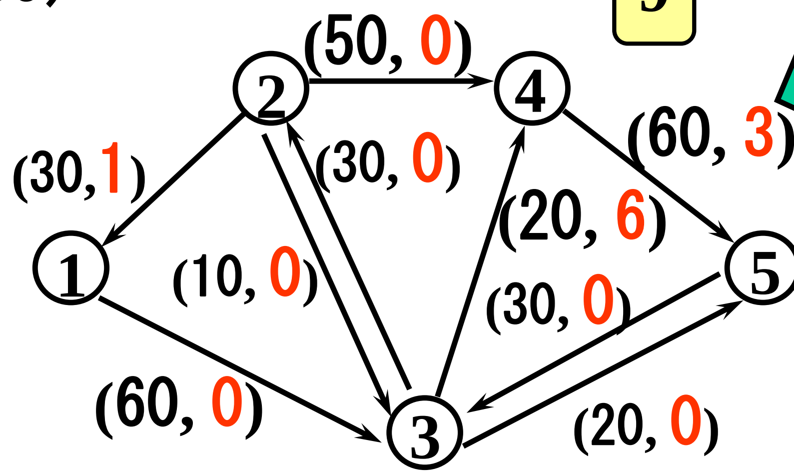
改訂残余ネットワーク





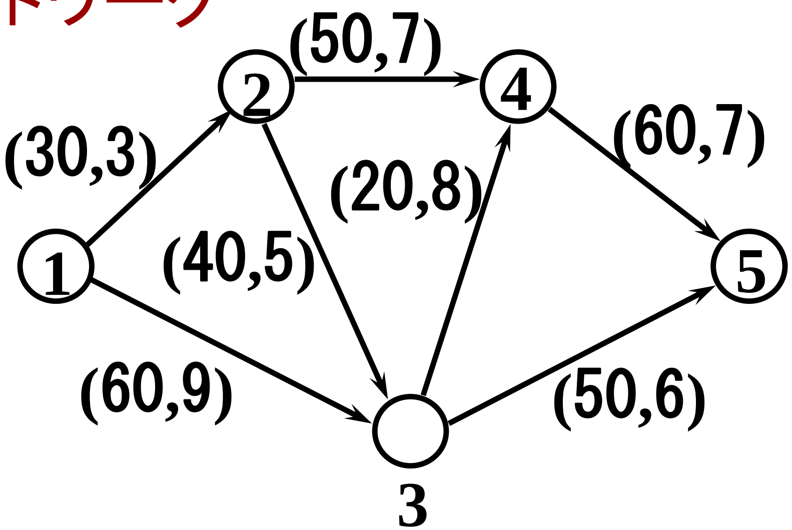
残余費用に置き換える

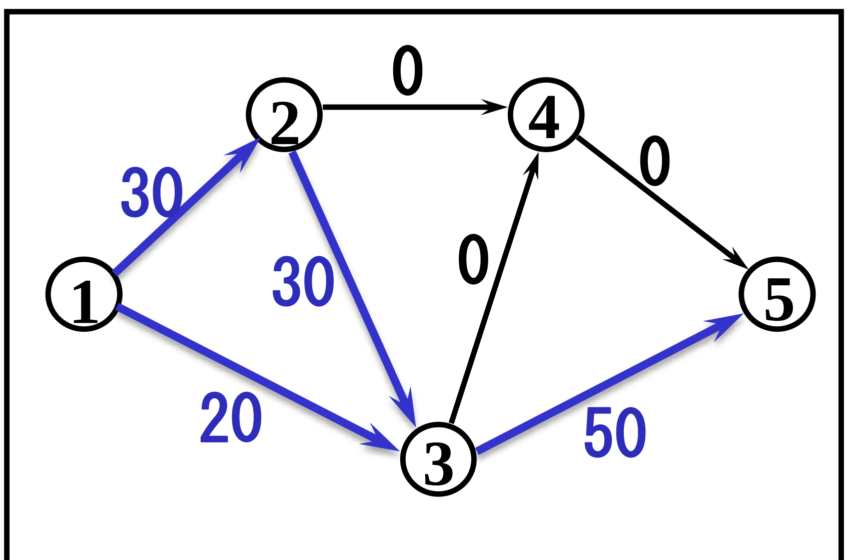
改訂残余ネットワーク



練習 改訂残余ネットワークを描こう

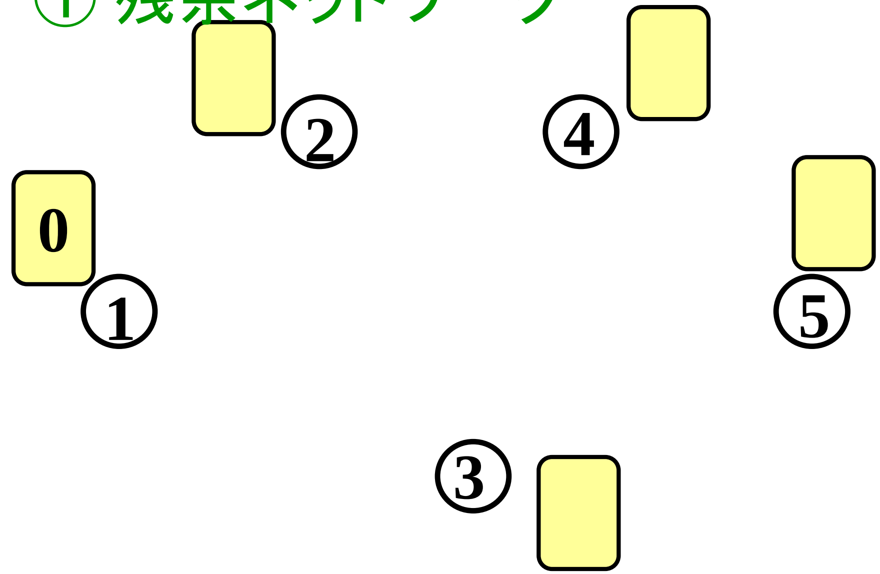
ネットワーク





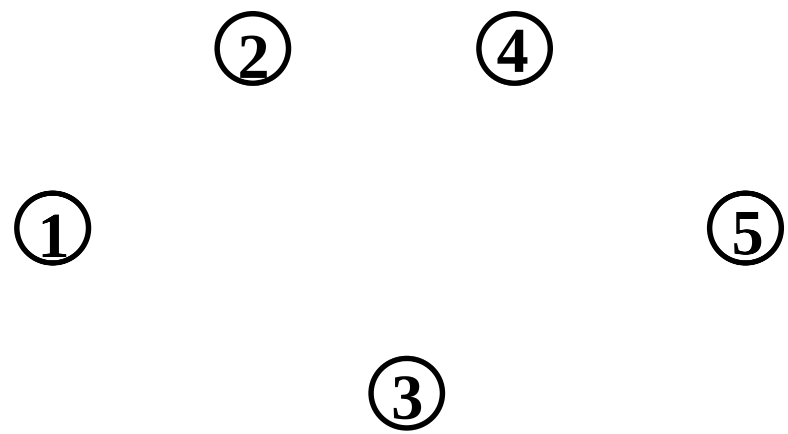
フロー（流量=50）

① 残余ネットワーク



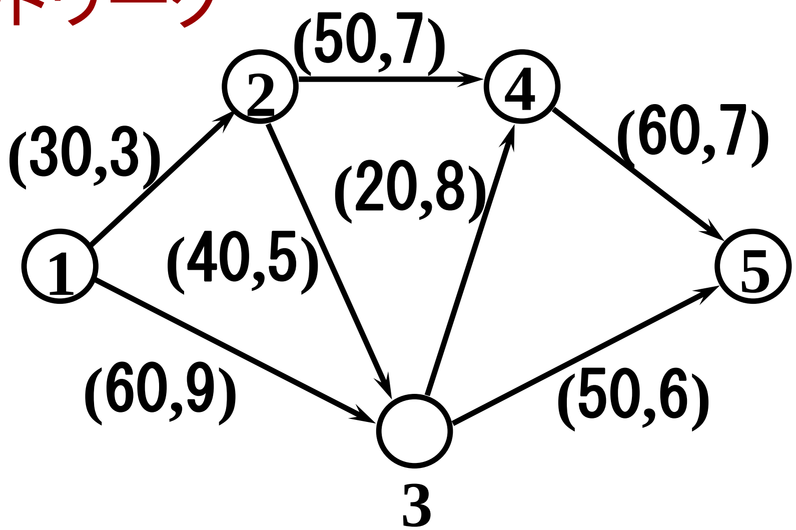
② 最短距離pを算出

③ 改訂残余ネットワーク

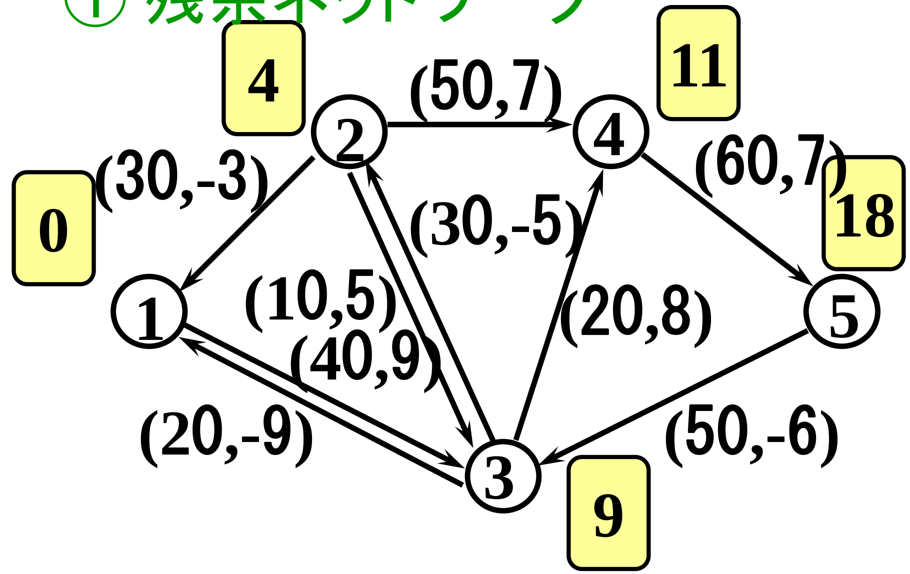


練習 解答例

ネットワーク

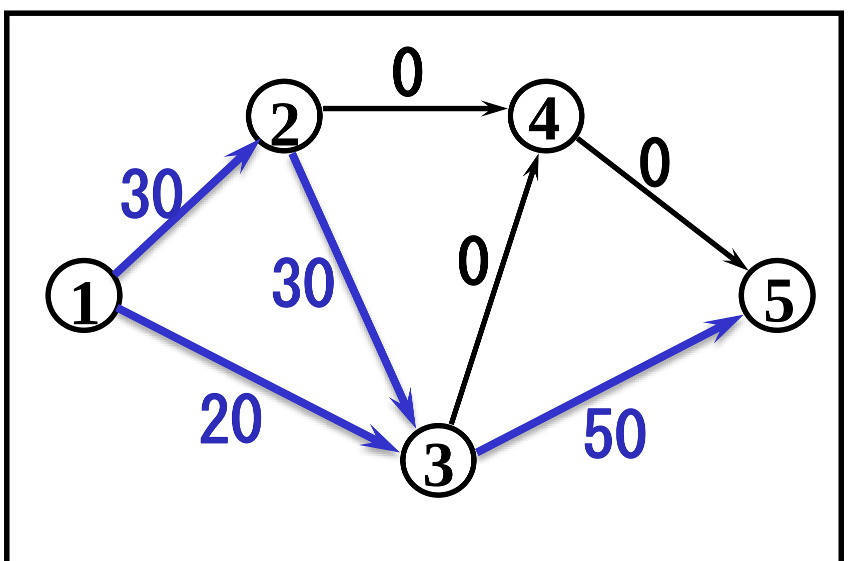


① 残余ネットワーク

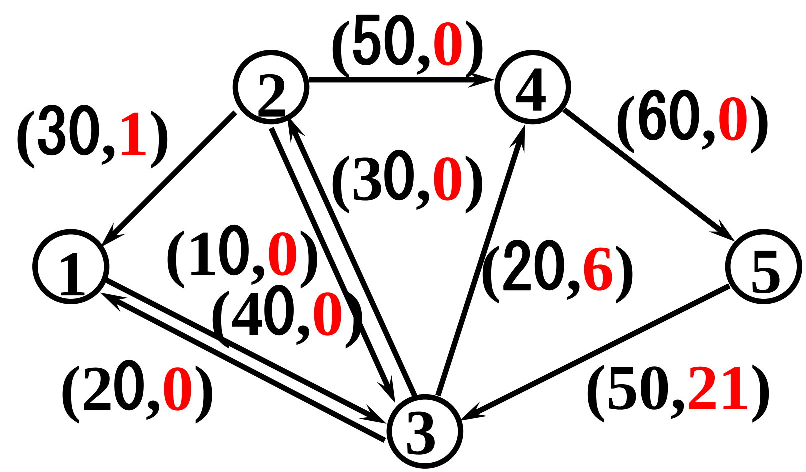


② 最短距離pを算出

③ 改訂残余ネットワーク



フロー（流量=50）



改訂最短路繰り返し法

手順1:全枝のフローを0, 各点での$p(v)$を0とおく.

手順2:以下を指定流量が得られるまで繰返す.

（1）改訂残余ネットワークを作る.

① 現在のフローに対するネットワークの構造を作る

② 現在のpに対する残余費用を定める

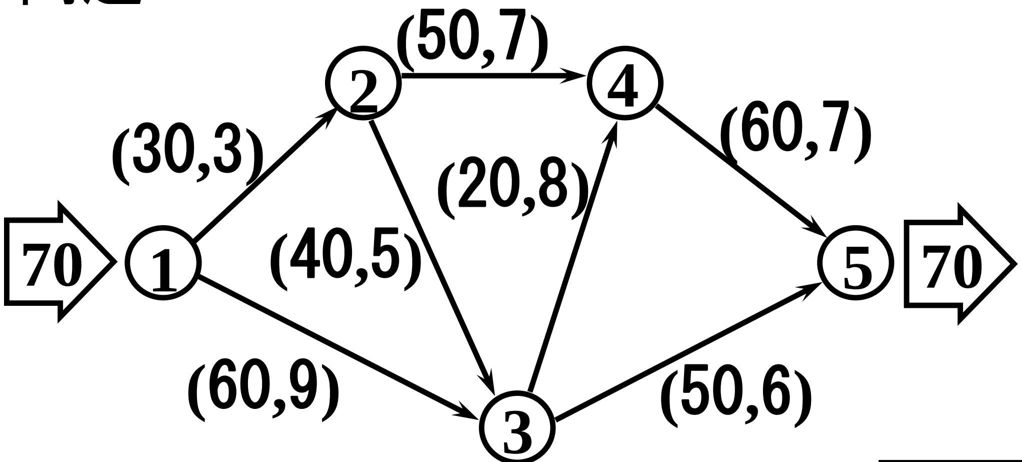
③ 供給点から各点への最短距離$d(v)$ を求める.

（2）供給点から需要点への最短路に沿って流せるだけフローを流す.

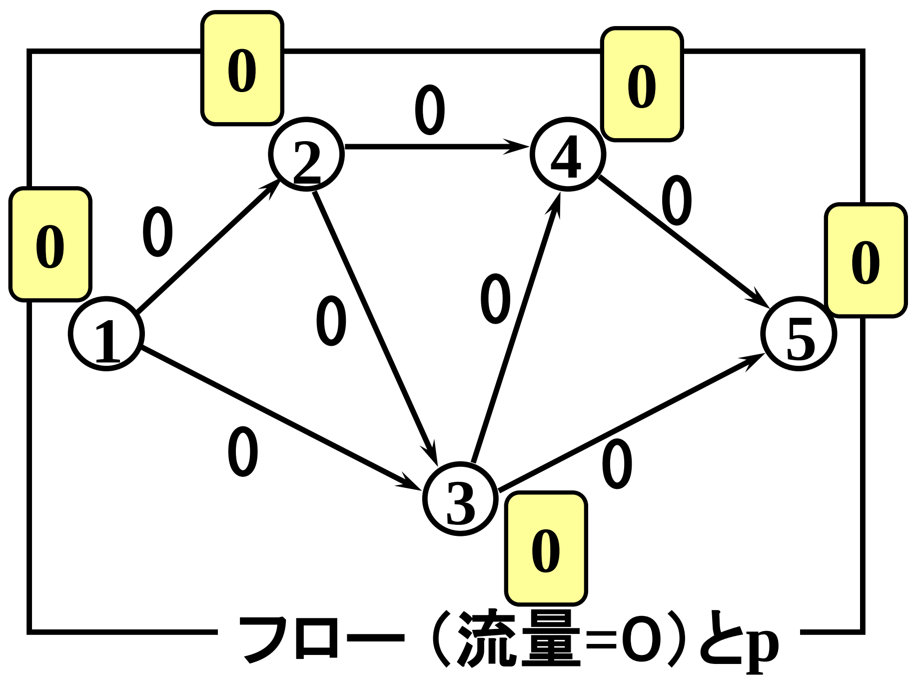
（3）各点において$p(v) \leftarrow p(v)+d(v)$とおく.

例題3 改訂最短路繰返し法

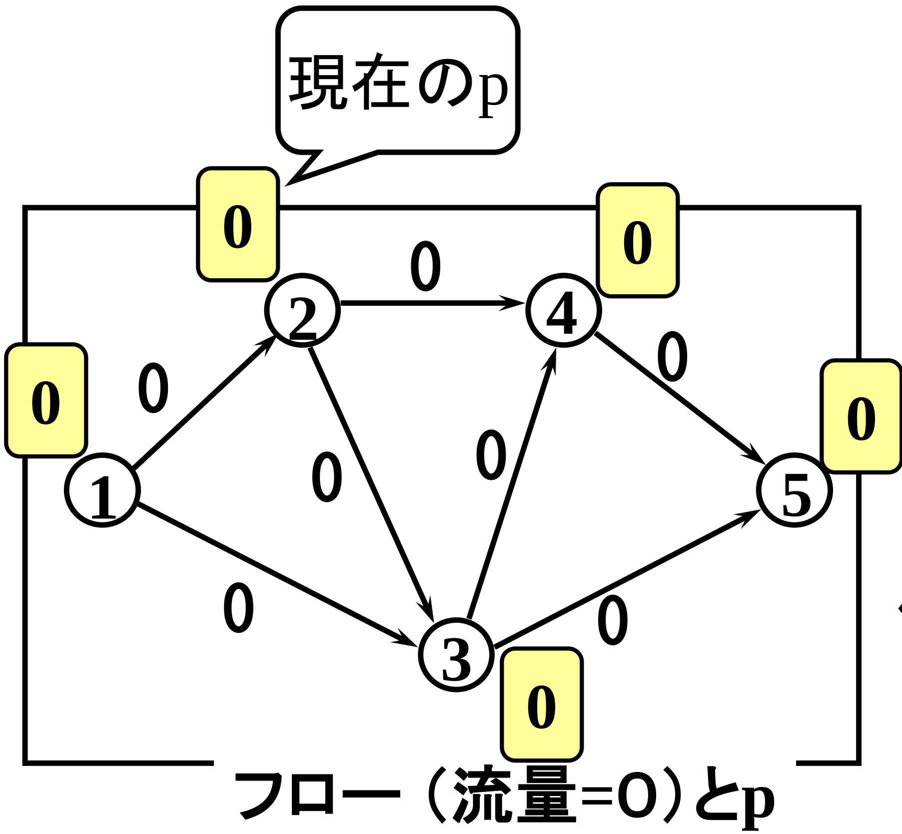
問題



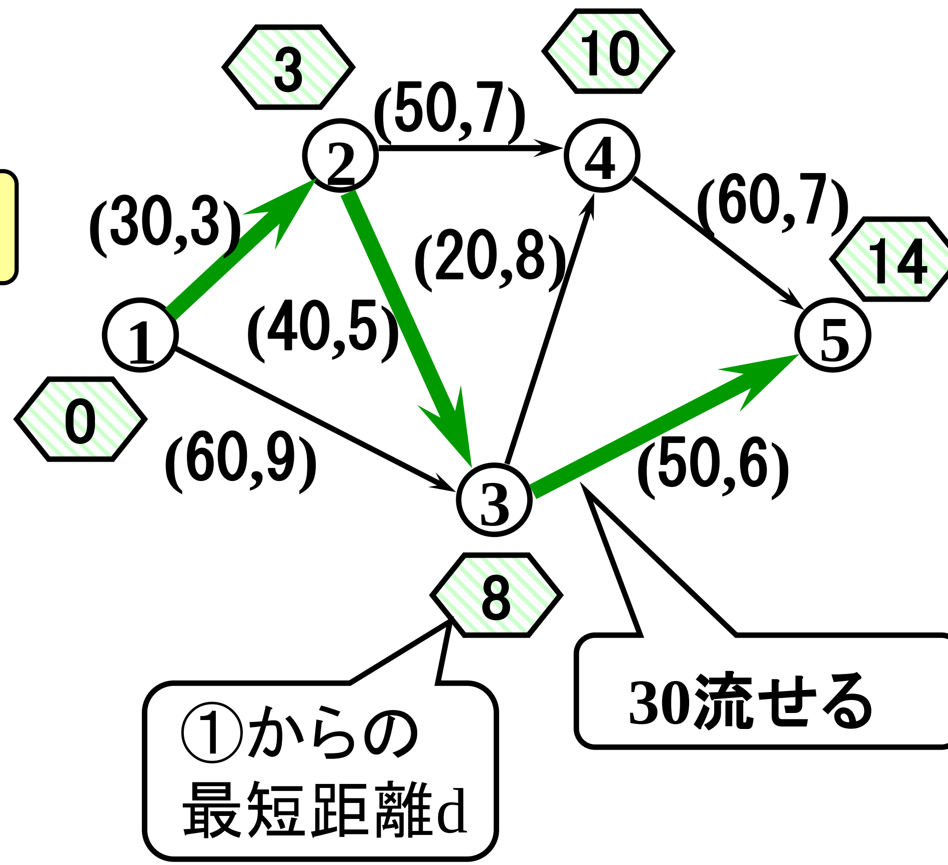
手順1 初期設定



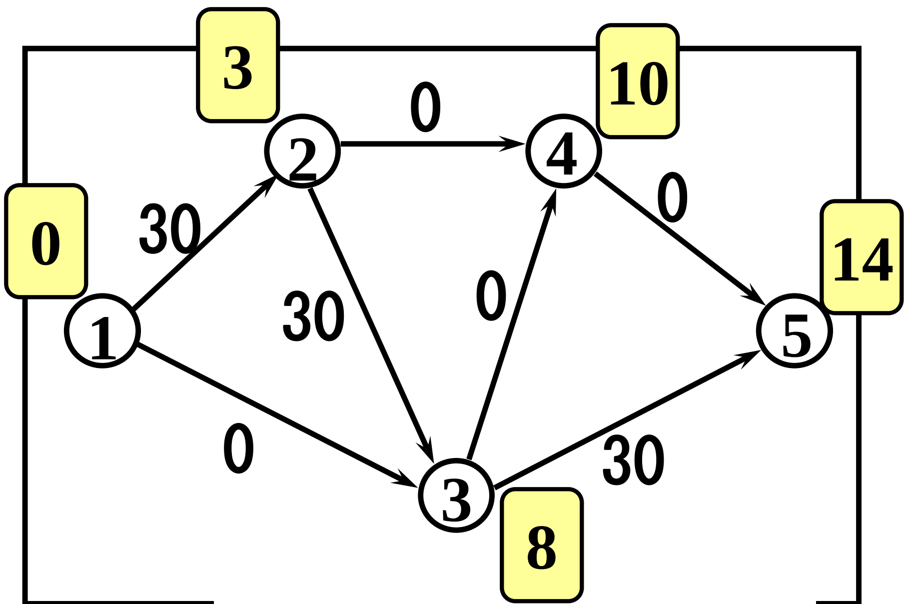
手順2 繰り返し1回目前半



左図のフローとpに対する
改訂残余ネットワーク

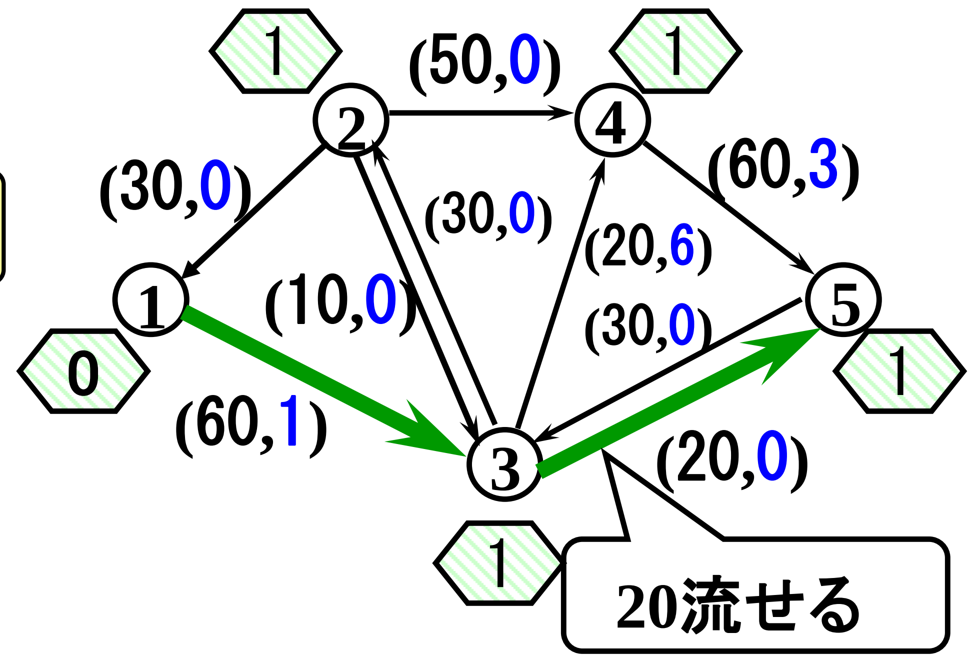


手順2 繰り返し1回目後半+2回目前半

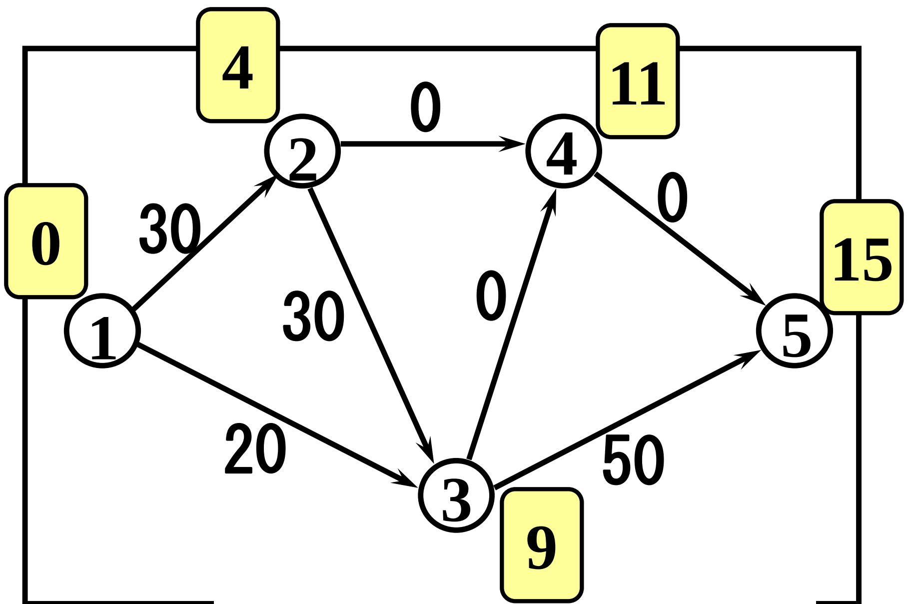


フロー（流量=30）とp

左図のフローとpに対する
改訂残余ネットワーク

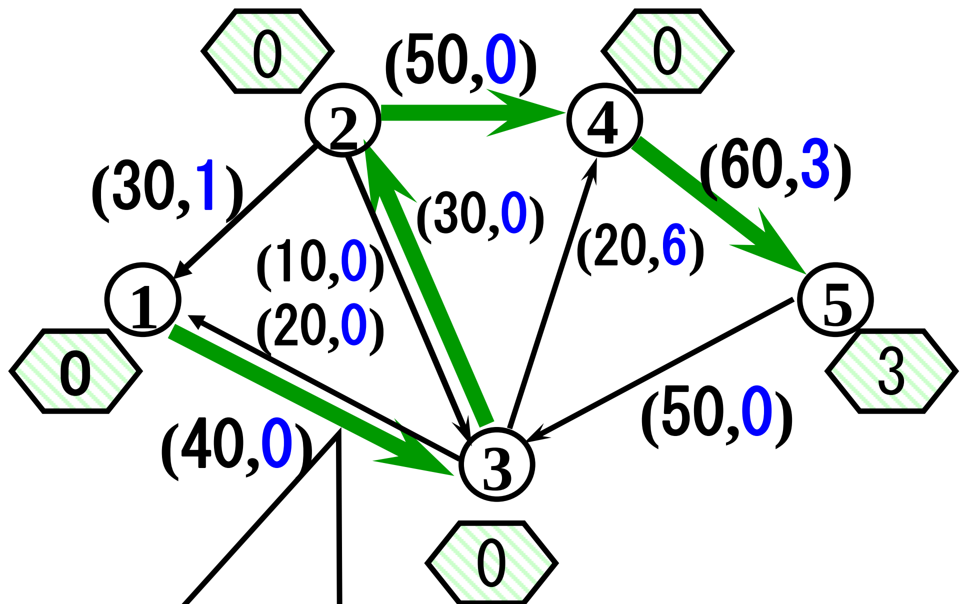


手順2 繰り返し2回目後半+3回目前半



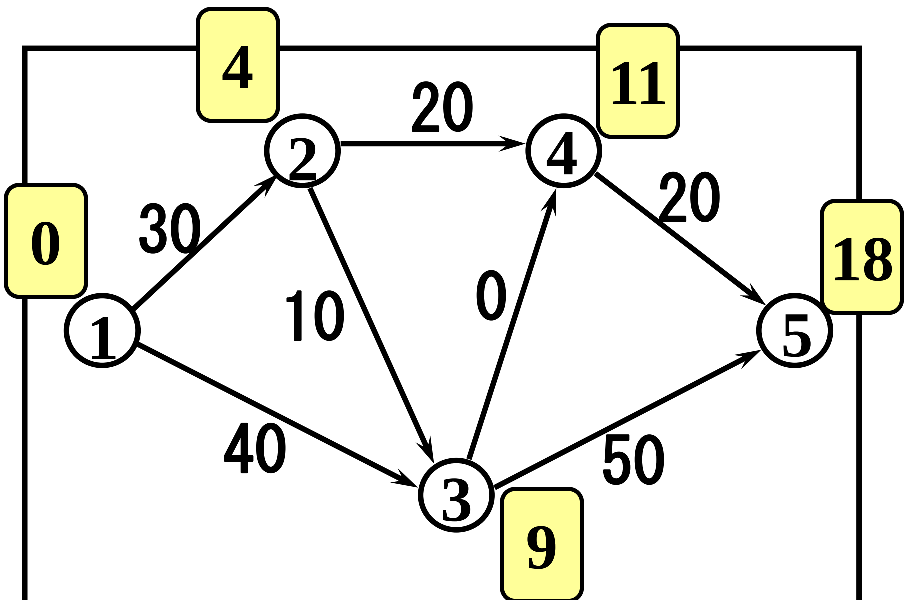
フロー（流量=50）とp

左図のフローとpに対する
改訂残余ネットワーク



30流せるが，20流せば
流量70を満たす

手順2 繰り返し3回目後半+4回目前半



フロー（流量=70）とp

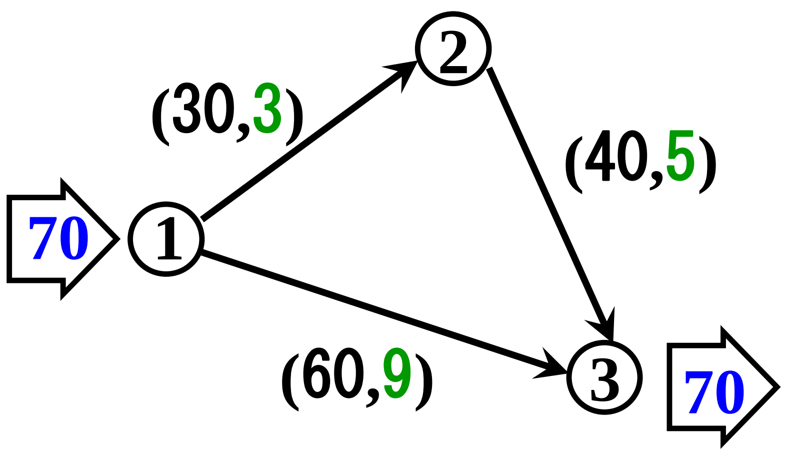
流量が70に到達したので終了

流量70の最小費用フロー

演習8-2

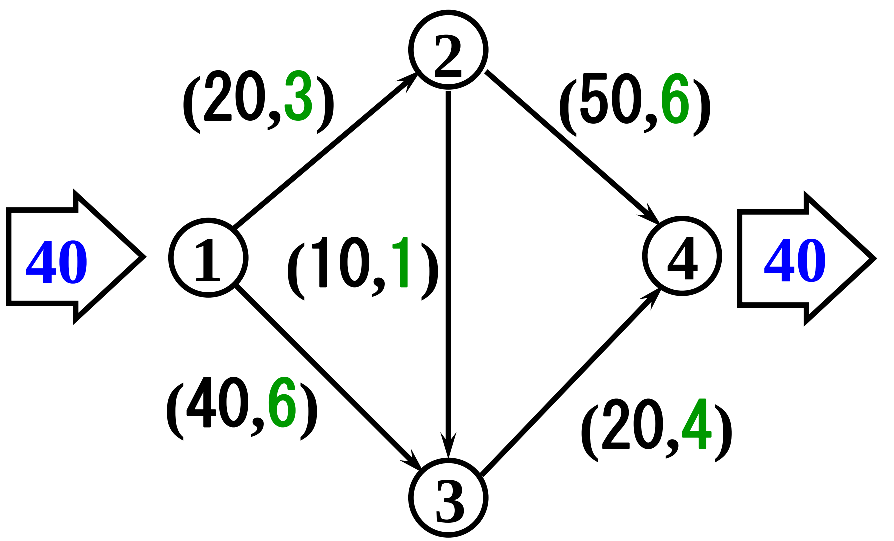
演習8-1において，改訂最短路繰り返し法を用いて最小費用フローを求めてみよう.

練習　2



演習2

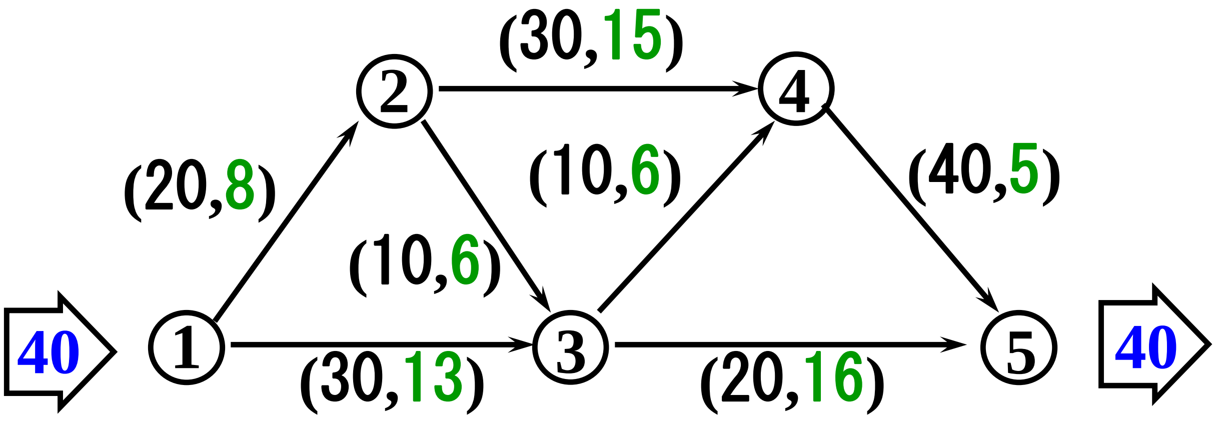
流量40の最小費用フローを「改訂最短路繰り返し法」にて求めよ.



（容量, 1単位当たりの費用）

演習3

流量40の最小費用フローを求めよ．また，その時の総費用も示せ．



（容量，フロー1単位当たりの費用）

例題4

文教商事では5つの支社へ一人ずつの人員補強を計画している．５人が希望している任地と，その任地へ赴く際に予想される費用は以下のようにまとめられた．

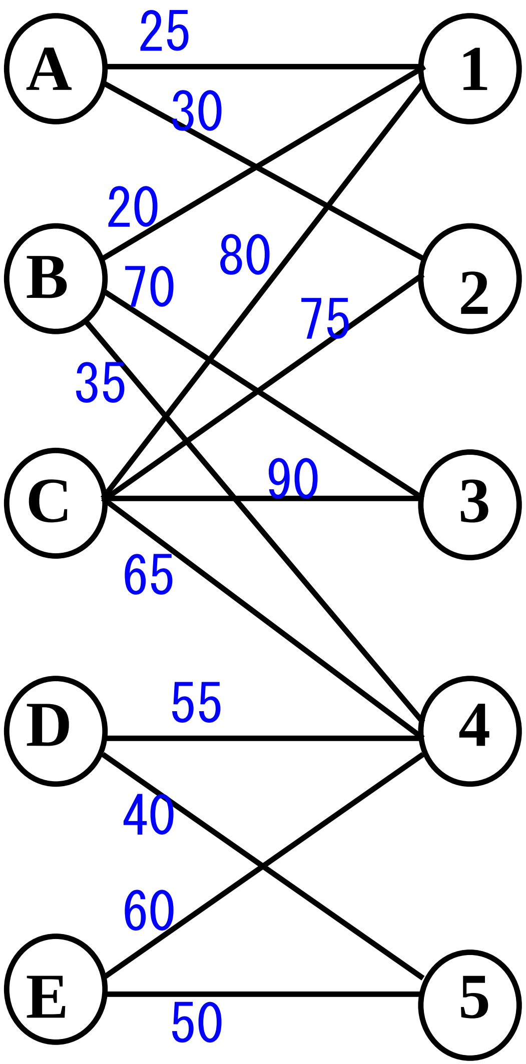
	支社①	支社②	支社③	支社④	支社⑤
Aさん	25	30			
Bさん	20		70	35	
Cさん	80	75	90	65	
Dさん				55	40
Eさん				60	50

空白は希望しない支社

さて，誰をどの支社に配属すれば最も費用が安く済むか?

関連問題：５人を各支社に割り当てることはできるか?

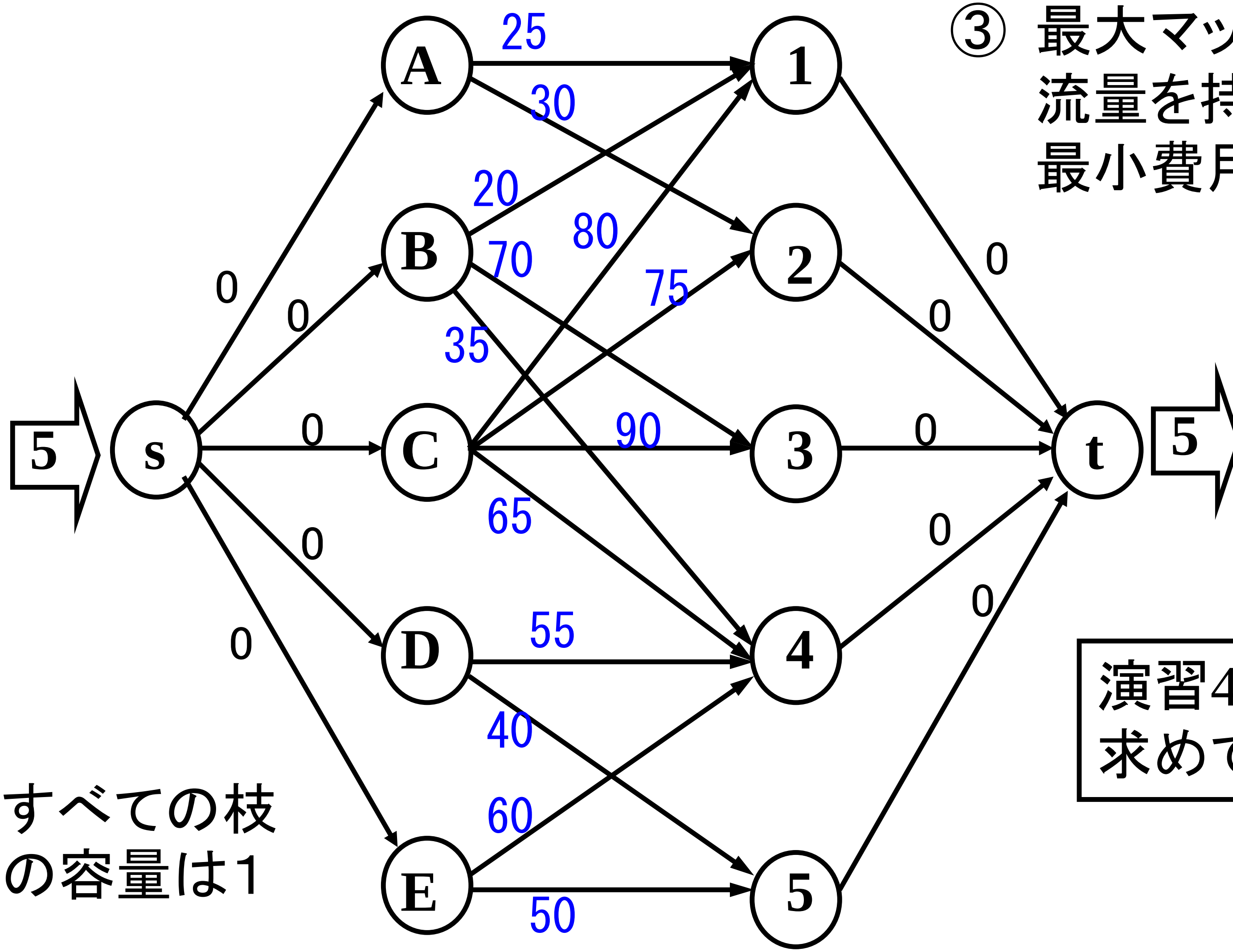
割当問題



完全マッチングの中で
（最大マッチングの中で）
重みの和が最小のマッチングを求める問題

割当問題の一解法

① 最大マッチング数導出
② 左図のように変形
③ 最大マッチング数の流量を持つ最小費用フロー導出



すべての枝の容量は1

演習4
求めてみよう!!

例題5　輸送問題

ある会社では，倉庫A,B，Cにそれぞれ30(千個)，20(千個)，40(千個)の製品を保管しているが，これをP町，Q町，R町にそれぞれ30(千個)，15(千個)，45(千個)ずつ発送したい.

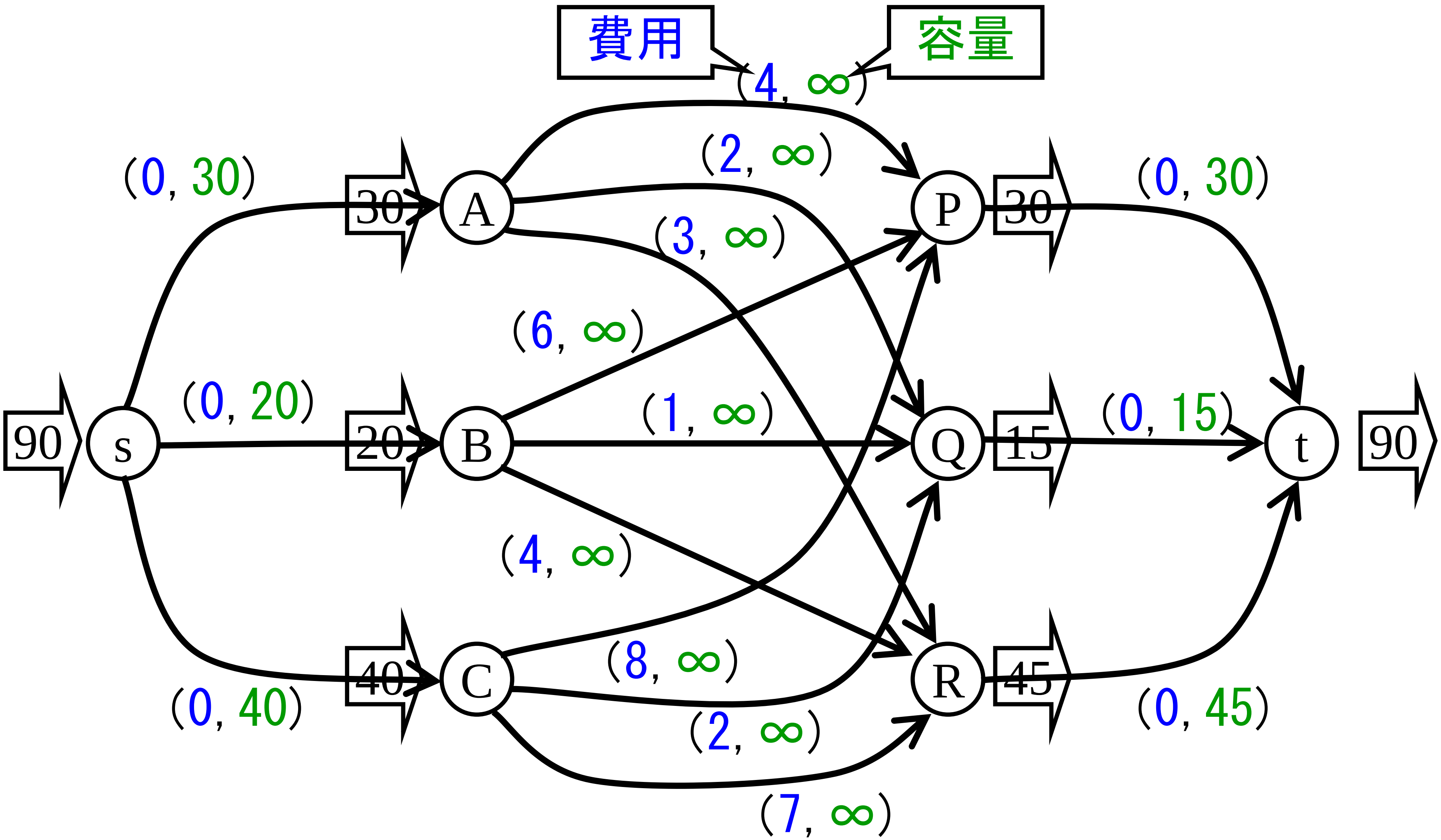
輸送費			（万円/千個）
	P町	Q町	R町
倉庫A	4	2	3
倉庫B	6	1	4
倉庫C	8	2	7

輸送費総額が最小になる輸送プランを提示せよ.

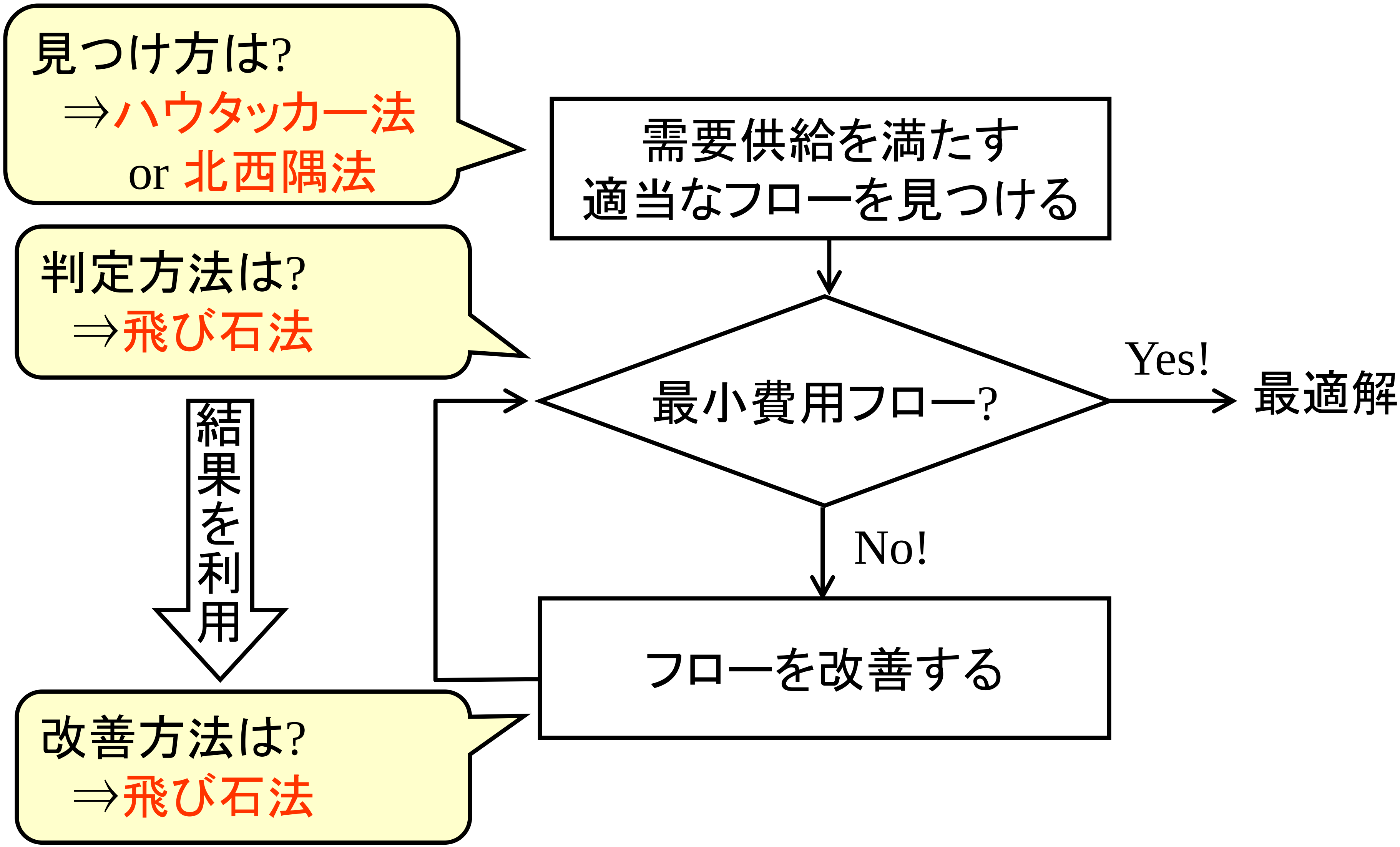
ハンガリアン法 等　　飛び石法 等　　最短路繰り返し法 等

割当問題 ⊆ 輸送問題 ⊆ 最小費用フロー問題

輸送問題の図示



輸送問題に特化した解法



需要・供給を満たすフローを見つける方法
ハウタッカー法

費用の安い順に
流していく

	P	Q	R	供給量
A	4 / 0	2 / 0	3 / 30	30
B	6 / 0	1 / 15	4 / 5	20
C	8 / 30	2 / 0	7 / 10	40
需要量	30	15	45	

初期フローが得られた！

最小費用かを判定する 飛び石法

現在「0」の部分にフローを流したら費用が改善するかをチェック

例：CQを増やしてみよう

	P	Q	R
A	4 0	2 0	3 30
B	6 0	1 − 15	4 + 5
C	8 30	2 + 0	7 − 10

変更可能な最大量は?
⇒10

サイクル（閉路）

$+2-7+4-1$
$=-2$

⇨ サイクルに沿ってフロー変更すると，費用は下がる

⇔ 現在のフローは最小費用フローではない

フロー更新⇒飛び石法の繰り返し

更新後のフロー

例：APを増やしてみよう

	P	Q	R
A	4 ＋ 0	2 0	3 − 30
B	6 0	1 − 5	4 ＋ 15
C	8 − 30	2 ＋ 10	7 0

サイクル

$+4-8+2-1+4-3$
$=-2$

⇩

最小費用でない

⇩

サイクルに沿って

5変更可能 ⇨ フロー更新

最小費用フローの判定

AQ増加

更新後のフロー

+2−2+8−4=+4

BP増加

+BP(6)-BR(4)
+AR(3)-AP(4)=+1

BQ増加

+BQ(1)-CQ(2)
+CP(8)-AP(4)
+AR(3)-BR(4) =+2

	P		Q		R	
A	4	−	2	+	3	
		5		0		25
B	6		1		4	
		0		0		20
C	8	+	2	−	7	
		25		15		0

CR増加

+CR(7)-AR(3)+AP(4)-CP(8)=0

すべて更新できない
⇒最小費用フロー

需要・供給を満たすフローを見つける方法（2）
北西隅法

左上から埋めていく

	P	Q	R	供給量
A	4 30	2 0	3 0	30
B	6 0	1 15	4 5	20
C	8 0	2 0	7 40	40
需要量	30	15	45	

初期フローが得られた！

飛び石法で時々出会うトラブル：退化

北西隅法で得た初期解

	P	Q	R	供給量
A	4 30	2 ? 0	3 ＋ 0	30
B	6 0	1 ＋ 15	4 － 5	20
C	8 0	2 ? 0	7 40	40
需要量	30	15	45	

退化は
なぜ起きる？

A.　正フローの数が不足

通常は，正フロー数=(需要点)＋(供給点)-1

退化時の対処法

	P	Q	R	供給量
A	4 / 30	2 − / ε ~~0~~	3 + / 0	30 +ε
B	6 / 0	1 + / 15	4 − / 5	20
C	8 / 0	2 / 0	7 / 40	40
需要量	30	15 +ε	45	

判定可能

0をほんのちょっと(＝ε)増やす

イプシロン

最小費用輸送案の導出(1)

AR増加

+AR(3)-AQ(2)
+BQ(1)-BR(4)=−2

	P	Q	R	供給量
A	4 30	2 − ε ~~0~~	3 + 0	30 +ε
B	6 0	1 + 15	4 − 5	20
C	8 0	2 0	7 40	40
需要量	30	15 +ε	45	

最小費用輸送案の導出(2)

	P	Q	R	供給量
A	4 30	2 0	3 ε	30 +ε
B	6 0	1 − 15+ε	4 + 5-ε	20
C	8 0	2 + 0	7 − 40	40
需要量	30	15 +ε	45	

CQ増加

+CQ(2)-CR(7)
+BR(4)-BQ(1)=-2

(15+ε)の変更

最小費用輸送案の導出(3)

更新できる箇所が無い
⇒最小費用輸送案の発見

	P	Q	R	供給量
A	4 30	2 0	3 0 ~~−ε~~	30 ~~+ε~~
B	6 0	1 0	4 20	20
C	8 0	2 15~~+ε~~	7 25~~−ε~~	40
需要量	30	15 ~~+ε~~	45	

εを0にリセットする

演習5　輸送問題

	P	Q	R	供給量
A	2	3	1	30
B	4	1	2	20
需要量	25	10	15	

倉庫A,Bから，町P,Q,Rへの最小費用輸送プランを提示せよ

演習6 輸送問題

文教サイクルは，３つの工場と4つの販売店を有している．各工場の週間製造台数，工場から販売店への輸送費，各販売店の週間需要は以下の通りである．

	販売店①	販売店②	販売店③	販売店④	週間製造台数
工場A	6千円/台	7千円/台	3千円/台	7千円/台	100台
工場B	8千円/台	3千円/台	6千円/台	5千円/台	250台
工場C	5千円/台	4千円/台	5千円/台	6千円/台	150台
週間需要台数	80台	160台	60台	200台	

総輸送費を最小にするには，各工場から各販売店へどのように製品を輸送すれば良いか．