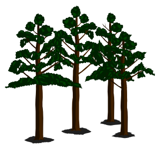
Network programming I

Minimum spanning tree problem

最適に繋げる方法



1

ネットワーク上に生じる様々な問題

- 安価なネットワークの構築(**最小木問題**)
- 最短ルートの探索(最短路問題)
- 物の効率的な流し方(フロー問題)
  - なるべく多く流す(最大流問題)
  - 格安に流す(最小費用流問題)
- どこに倉庫を配置するか(施設配置問題)

⇒事例は数限りない

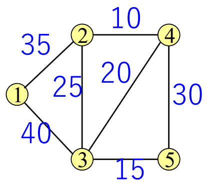
→システム的アプローチが有効!

2

例題4-1 文教町のガス管配置

5件の家にガス管を引く.

どのようにガス管を設置すれば費用最小??



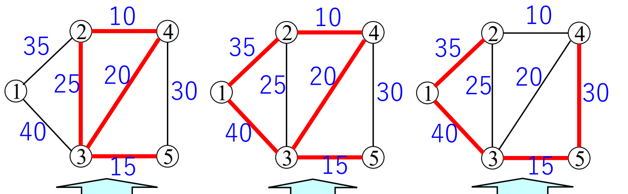
枝:設置可能路線

数字:設置費用

3

経済的でない例

なぜ最小費用でないのか？



条件を満たしていない　自明な無駄がある　他に良いプランがある

改善策

実行不能

閉路は無駄
×閉路上の最大重み枝

非連結部分を繋げる
○最小重み枝

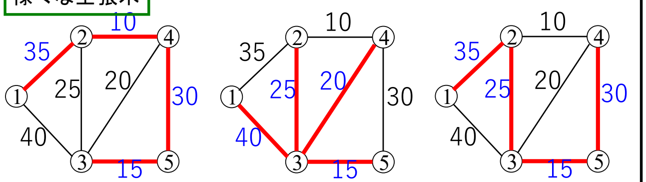
4

答えが持つ性質

閉路は無駄 ⇒ 閉路の無いグラフ＝木
全点を結ぶ ⇒ 全張(spanning;スパンする)

全張木
spanning tree

様々な全張木



35+10+30+15=90　40+25+20+15=100　35+25+30+15=105

問題の本質 重み和最小の全張木(最小木)を見つけよ
⇔ 最小木問題
Minimum spanning tree problem

5

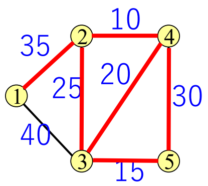
最小木の見つけ方：アイディア(1)

閉路⇒最大重みの枝を消去

実現方法例

重みの小さい順に枝を選択し
閉路になる時は選ばない
全点がつながったら終了

クラスカル法
(Kruskal)



6

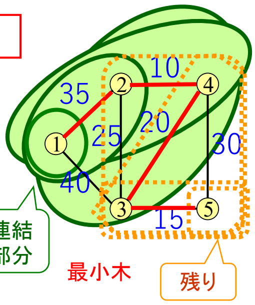
最小木の見つけ方：アイディア(2)

非連結⇒最小重みの枝で結べ

実現方法例

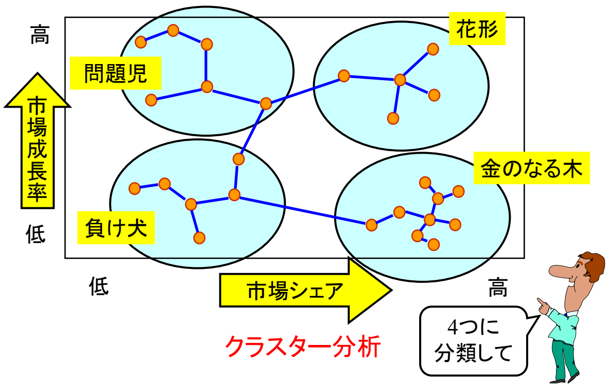
1点から連結部分を1点ずつ
最小重みの枝で増やす
全点が連結になったら終了

プリム法
(Prim)



7

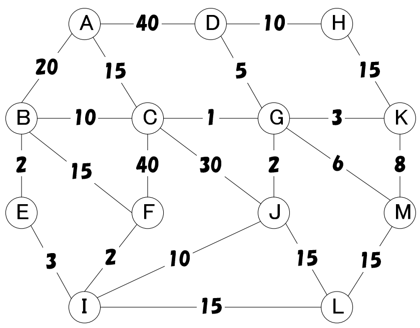
最小木問題の利用例



8

練習1

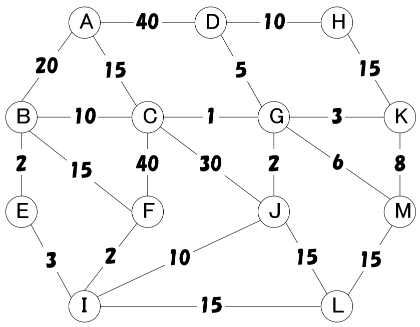
クラスカル法で最小木を求めよ



9

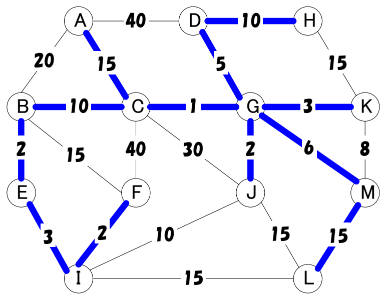
練習2

プリム法で最小木を求めよ



10

練習1，練習2　解答例



※ 最小木は他にも存在する

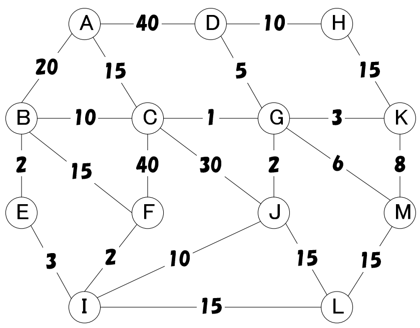
重み和：74

11

練習3

重み和が最大の全張木

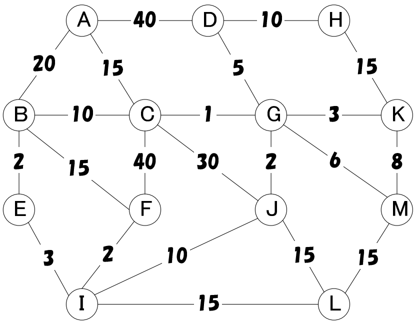
クラスカル法で最大木を求めよ



12

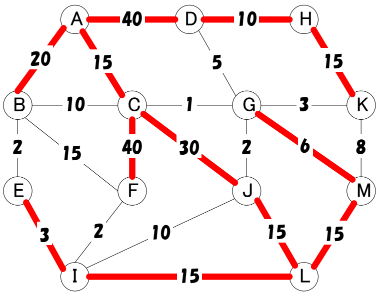
練習4

プリム法で最大木を求めよ



13

練習3，練習4　解答例



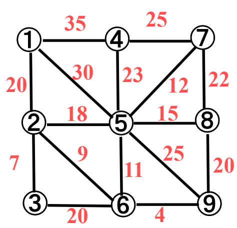
※ 最大木は他にも存在する

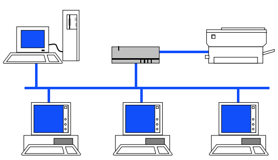
重み和：224

14

演習5-1 文教中LAN設置計画

文教中にLANを敷設する．
設置に用いるケーブル総延長を最短にしたい．
どこにケーブルを設置？





点：部屋
枝：設置可能路線
数字：設置に必要なケーブル長

15

演習5-2 Arc additions and deletions

あるネットワーク上で最小木T*が得られている.

(1) ある枝(i,j)が除去された.
（素朴な対処法）最小木を再計算する
質問：素朴な対処法以外の最小木再構築方法は？

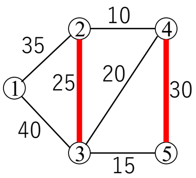
(2) 重みc_{ij}を持つ枝(i,j)が付加された.
質問：素朴な対処法以外の最小木の再構築方法は？

ヒント:既知の最小木T*の情報を有効に活かそう

16

演習5-3 Spanning tree containing specific arcs

- 閉路でない何本かの枝が指定
- 指定枝を含む最小木を求めたい
  ⇒適切な解法を提案せよ.



17

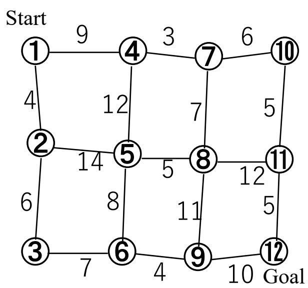
演習5-4 砂漠横断

砂漠を横断したい.

安全面からの要請
オアシス間の最大距離が最短の道を通ること.

どこを通っていく?

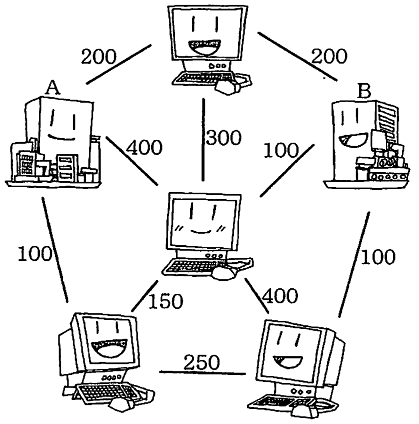
(Minimax path 問題)



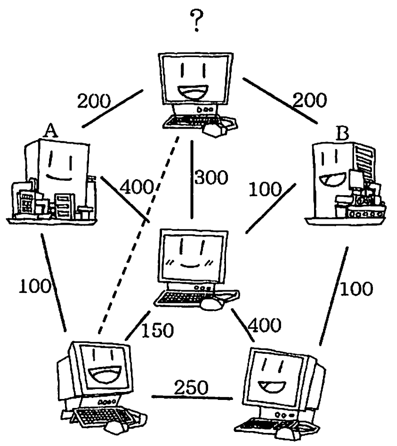
点：オアシス，枝：道，数字：距離

18

14.4 ある会社でコンピュータネットワークを作ろうとしています．それぞれのコンピュータをつなぐ回線の使用料金は図の通りです．なるべく安くネットワークを作りたいので，このネットワークの最小木を求めなさい．



14.5 問題 14.4 で求めたネットワークを作りました．そして，今度はこのネットワークの信頼性を高めたくなってきました．さて，「どの線を一本切っても，ネットワークがつながっている」ようにするためには，どこをつなげればよいでしょうか．本数の最も少なく，費用の安いつなぎ方を求めなさい．



14.6 今度は，他の安いケーブル会社が参入してきました．上図の点線部分に，安い回線を引いてくれるそうなのですが，値段についてはまだ交渉できるようです．さて，それぞれがいくら以下で引いてもらえば，今よりも安くなるでしょうか．

(松井・根本・宇野 入門オペレーションズ・リサーチ，東海大学出版会 (2008年)，第14章より)

合格対策ゼミ

判断・数的推理を解くOR塾

Operations Research

【第3回】ネットワーク計画（最大木・最小木）

文教大学情報学部助教授 **根本 俊男**

今月のテーマ 最大収入でのつなげ方を見つけよう

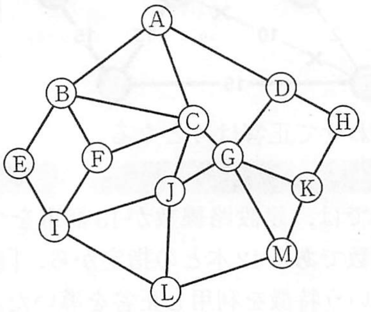
前回に引き続き以下のOR（オペレーションズ・リサーチ）分野からの問題に取り組んでみよう。

【出題例2】 図のようにA～Mの13都市を結ぶ高速道路を建設する計画があり，各路線を開通させたときの2都市間の所要時間と1日当たりの収入は表のように見積もられている。

すべての路線を開通させたとき，EからHへの最短所要時間は何分になるか。

次に，いずれの都市からも他のすべての都市へ高速道路を通じて行けるようにするという条件を満たしつつ，合計12路線を建設したときの1日当たりの最大収入はいくらになるか。

それぞれの答えの組合せとして正しいのはどれか。（国家Ⅰ種・平成13年度）



路線	所要時間（分）	収入（百万円）	路線	所要時間（分）	収入（百万円）
AB	50	20	EI	30	3
AC	30	15	FI	20	2
AD	60	40	GJ	30	2
BC	60	10	GK	10	3
BE	20	2	GM	20	6
BF	30	15	HK	30	15
CF	30	40	IJ	50	10
CG	30	1	IL	20	15
CJ	20	30	JL	20	15
DG	20	5	KM	40	8
DH	20	10	LM	20	15

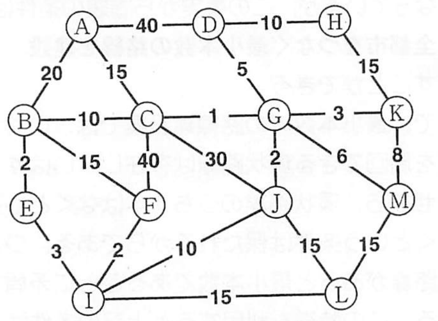
	最短所要時間（分）	最大収入（百万円）
1	140	224
2	140	223
3	140	222
4	130	224
5	130	223

▶前回のあらすじ：出題例2は2つの小問題からなっている。前回は最短のルートを見つける前半の小問題に取り組んだ。ORの基本的な技法の一つである**ダイクストラ法**を利用することで，EからHへ130分で移動できる最短ルート（E→I→L→M→G→K→H）を簡単に発見できた。

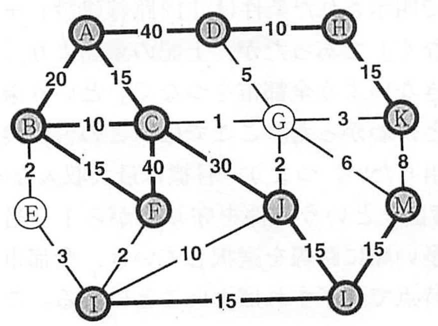
前回の結果から，正答枝は4か5のどちらかのはずだ。残念ながら（出題者の立場からは当然ながら），4と5の最大収入の数字は似た値で，数字から逆に正答を推定するのは難しそうだ。やはりここもORの基本的な手法を用いて正答を導いたほうが確実で時間のロスも少ない。今回もORの基本的手法の知識をひとつ増やしてみよう。

問題を理解しよう

問題の舞台は道路建設計画である。次の図は問題文の図の変形図に，各路線を開通させたときの1日当たりの収入を書き加えたものだ。図の作成は面倒かもしれないが，問題把握には大切な作業だ。この種の問題では必ず図を描き正答導出の道具にしよう。



さて，問題では1日当たりの総収入を話題にしている。路線建設費用は考えなくてよく，また，収入が赤字になる予定の路線もないので，全路線を建設するのが総収入を最大にする案になる。ただ，問題では12本の路線建設しか許していない。そこで，とりあえず1日当たりの収入の多い上位12路線を建設してみよう。下図の太線がその12路線である。収入の多い順に選んでいくと，収入11番目に3つの道（収入10〔百万円〕）が候補になる。とりあえずその



中からBCとDHの２つの路線を選び作成した。この建設案は収入の総額は多いが，残念ながら問題の要求するもうひとつの条件「いずれの都市からも他のすべての都市へ高速道路を通じて行けるようにする」を満たしていない。たとえば，都市Eや都市Gからはどこの都市にも行けない事実が観察できる。

ところで，この「いずれの都市からも他のすべての都市へ行ける」という条件は，言い換えれば，「すべての都市が高速道路でつながっている」ということである。つまり，この問題は，

条件：全都市（13都市）をつなぐ12路線を建設

を満たしつつ最も収入の多い建設案を見つける問題ととらえることができる。

寄り道◎すべての都市をつなぐ路線の最小数

ここで本題から少し離れ，13都市をつなぐ道路の本数について考えてみよう。すべての都市をつなぐためには路線を多く建設すれば比較的容易だろう。それでは，最小では何本の路線建設が必要だろう？　都市数が２の場合は，１本の路線で結ぶことができる。３都市の場合は，２都市の場合にさらに１本の路線を増やし２本でよい。この論法を繰り返していけば，13都市をつなぐ道路の最小本数は12本であることがわかる。問題の条件で「12路線を建設」となっているが，この事実から問題の条件は，

条件：全都市をつなぐ最小本数の路線を建設

と言い直すことができる。

ところで，最小本数での路線建設案では，いくつかの都市を周回できる環状路線は存在しないはずである。なぜなら，環状路線のうち１本はなくとも都市をつなぐという条件は保たれるからである。つまり，環状路線があると最小本数であることに矛盾するのである。この特徴を利用すると上記の条件は，

条件：全都市をつなぐ環状部分のない路線を建設

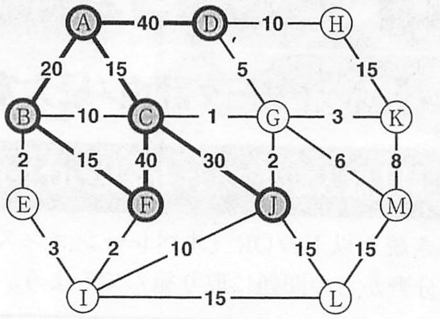
ととらえ直すこともできる。前のページの収入の多い順に12本の建設路線を選んだ図を見てほしい。建設道路は12本だが，環状の部分が何か所かある。これでは，全都市を結んでいないはずである。

問題にアタック

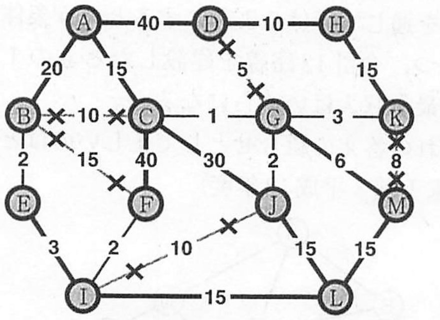
▶最大収入でのつなげ方

問題文で明示された条件は「12路線建設」＋「全都市をつなぐ」であったが，上記の議論より「環状部分ができないよう全都市をつなぐ」という条件でもよいことがわかった。ここでは，この言い換えた条件を利用したい。つまり，目標は最大収入なので，「環状は禁止」という条件を守りながら１日当たりの収入の多い順に路線を選択していき，全都市がつながった時点で終了すればよいことになる。この考え方に添って，具体的に解を導いてみよう。

まず，収入の多い路線から順に建設路線に決定して太線にしていく。同じ収入の路線が複数ある場合は適当に順を付け決定していけばよい。ここでは，接続する都市のアルファベット順で選択していく。途中で環状部分が出てきたらそれは路線建設案には加えない。



たとえば，収入15〔百万円〕の道路を順に選んでいくと，路線BFを選択した時点で環状部分（ABFC）が発生する。上の図がそのときの様子だ。環状道路は許されていないので，路線BFの建設はあきらめる。下の図では，路線上に×印を置き，建設断念を示した。この調子で，全都市がつながるまで繰り返すと，環状になる部分のない全都市をつないだ12路線が確定する。



図より，建設路線の総収入は224〔百万円〕となり，これが最大収入であり，前半と合わせて正答は**4**となる。

まとめ

ここでは，建設路線数が13都市をつなぐ必要最小路線数である12本との指定から，「環状路線は禁止」という特徴を利用し正答を導いた。

この問題を一般的な枠組みからとらえてみよう。グラフ上で環状の部分を**閉路**という。全点が結ばれ閉路のないグラフは**木**（き）と呼ばれる。木上の枝のコストの合計をその木の重みとしたときに，重み最大の木を求める最適化問題は**最大木**（き）**問題**と呼ばれ，通信や水道などさまざまなネットワークの設計時に利用されるORの基本問題の一つである。**【出題例２】**の後半はこの最大木問題だったのだ。多くのORの文献では，重み最小の木を求める問題として**最小木**（き）**問題**とも呼ばれている。求める目標が異なるだけで解き方の本質は同じである。この問題に対しては**クラスカル法**と**プリム法**と呼ばれる２つの解法が知られている。ここでは，閉路ができない限り有利な順に枝を選ぶルールで解を見つけるクラスカル法をもとに説明した。