




グラフと最適化

点と線で考える世界

1

ここで学ぶこと

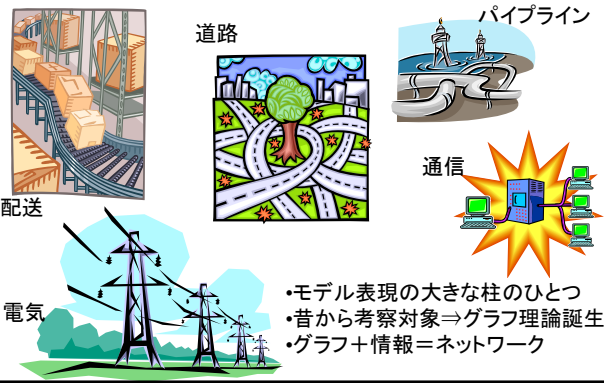


- グラフ・ネットワーク上の問題の紹介
 - 材料: 枝巡回路問題
- 数学の理論から問題の解決へ
 - 理論から応用はとてもスマート
- テキストの問題 vs 実際の問題
 - 実際の問題解決は面白い

⇒ オペレーションズ・リサーチの主な手法のひとつ
最適化の手法に触れる

2

点と線での表現



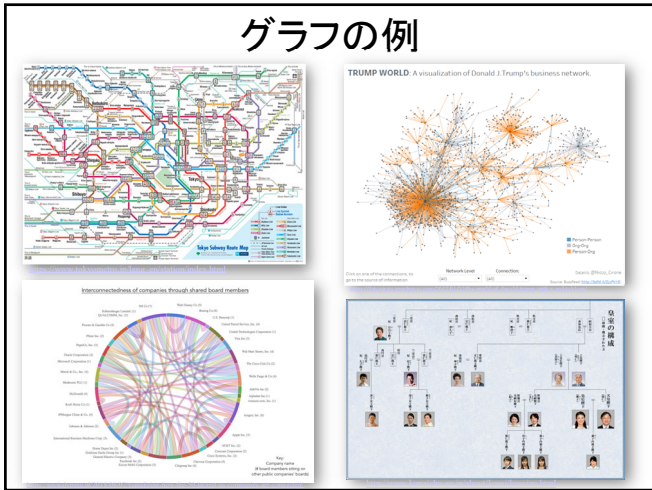
配送 道路 パイプライン 通信

電気

- モデル表現の大きな柱のひとつ
- 昔から考察対象⇒グラフ理論誕生
- グラフ+情報=ネットワーク

5

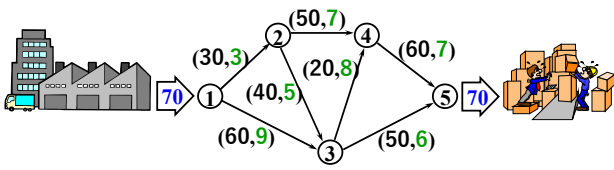
グラフの例



6

グラフとネットワーク

graph network



(道路の許容台数, 1台当たりの通行料)

構造部分: **グラフ** + (点, 枝上の情報) = **ネットワーク**

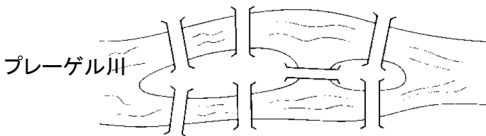
点とそれらのつながり(枝)

node(, vertex)

edge(, link)

7

グラフ



Konigsbergの橋

ある地点から出発し
全ての橋を一度だけ渡り
出発地点に戻れるか？



一筆書きは可能？

8

準備運動：一筆書き

一筆書きは可能？ ※2つのバージョン
 ◎出発点に戻ってくる必要があるバージョン
 ⇔戻ってこなくてもよいバージョン

(1)

(2)

(3)

可能⇒一筆書きを具体的に示せばよい
 不可能⇒???できないことを示すには???

9

一筆書きができる・できない

点に接続する枝数(次数)に注目

偶数本(偶点)の場合

奇数本(奇点)の場合

示唆▶ 奇点があると一筆書きはできない
 疑問▶ 全ての偶点なら一筆書き可能?
 答え▶ できるよ! オイラーの定理

グラフ論のはじまり

10

オイラーの主張の正当性

アルゴリズムで示そう

全点の次数が偶数のグラフ
 呼称: オイラーグラフ

性質

なぞり後の残りも偶点は偶点
 (※始・終点以外)

奇点が2つのグラフ

発展▶

もどってこなくても良い一筆書きの方法は?

11

振り返り 一筆書きは可能？

(1) (2) (3)

問題設定	奇点が2か所	奇点が4か所以上	奇点無し
出発点に戻る	一筆書き不可	一筆書き不可	一筆書き可能
出発点に戻らない	一筆書き可能	一筆書き不可	(出発点に必ず戻る)

12

ワーク1

(1) ある点から始まり、各枝をちょうど一回だけ通り、出発した点に戻ることができるグラフはどれか。

(2) ある点から始まり、各枝をちょうど一回だけ通ることができる(出発点に戻る必要は無い)グラフはどれか。

[ア] [イ] [ウ] [エ]

13

ワーク2

同じ長さの線68本で構成された図形がある。この図形から何本かの線を取り除いて一筆書きを可能とすると、取り除く線の最小の本数は何本か。(特別区2010)

始・終点が異なってよい

14

例題1 道路の点検ルート

事務所(点X)から出発し、
全ての道を点検し
事務所に戻ってくる

質問 総移動距離最短の点検ルートは？

15

「走行ルート」=「一筆書き」

道路の総距離: 114km 114kmで点検可(無駄無) ⇔ 一筆書き可能

質問 一筆書きは可能？
答え 不可能
⇒ 無駄な走行が不可避
⇓
無駄な走行(=回送)を最小化
質問 どこを回送する？
一筆書き可能
⇕
すべて偶点

16

一筆書きができるように枝を増やす

枝を増やして一筆書き可能状態を作る ⇒ 走行ルート完成

無駄な走行に対応 奇点をなくす

少ない方が好ましい

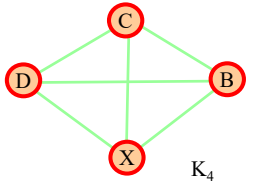
28kmの回送で走行ルート作成可能
□ 他のパターンは？

解説 全奇点間のグラフ

17

豆知識 U

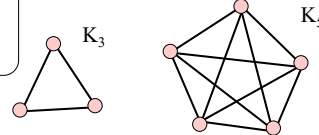
グラフの種類:完全(完備)グラフ



奇点のすべてのペアに枝をつける
 ↓ 全点間に枝のあるグラフ

- 完全グラフ or 完備グラフ (complete graph)
- n点の完全グラフの記号: K_n

最大マッチング
 K_n で枝数最大のマッチングを見つけるのは簡単

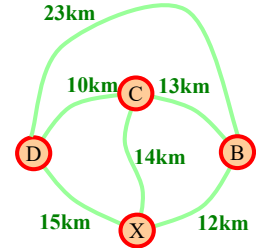


18

回送距離の少ない枝の増やし方は?

奇点の次数を「1」増やす枝の付け方

同じ点に2枝追加は駄目



マッチング = 点を共有しない枝の集まり

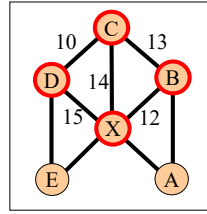
(問1) 最も枝数の多いマッチングは?
最大マッチング問題

(問2) 最大マッチングの中で距離の総和が最小のマッチングは?
最小重みマッチング問題

19

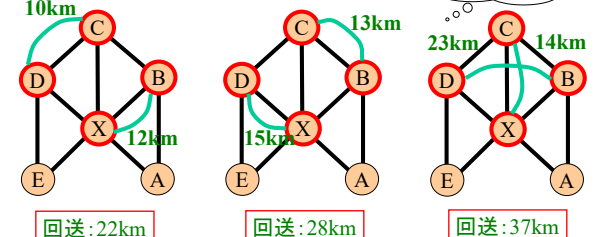
全てのパターン

最適な回送プラン



最適なパターンを見つける問題:
 最小費用完全マッチング問題
 最適化問題

全列挙は面倒



回送: 22km 回送: 28km 回送: 37km

20

参考 実際の郵便配達

地区内配達順序に自由度小

移動コストの算出: 右回り

最適ルートの作り方は?

適用で予想される壁は?

24

参考 実際の宅配便

当社における生産性向上の取り組みとEVの相性①

高効率の宅配サービスへ転換

ロテム集配 (SDプラスCのチーム)

口野先集配 (ワンマン)

物流サービス研究・開発

25

枝巡回路問題に似ている問題

巡回セールスマン問題

traveling salesman problem (TSP)

どんな方法で解く?
その解法の手間は?

3店(B,C,D)を回ってこよう。
どの順番で回ると最短?

26

様々な枝巡回問題

- 郵便配達人問題
 - 無向グラフ上
 - 有向グラフ上
 - 混合グラフ上
- 田舎の郵便配達人問題
 - 必ず通る枝は一部
- 容量制約付きの問題

短時間で求解する解法有

解説
グラフの種類

クラスP

NP完全問題

素朴な方法では求解困難

29

豆知識 グラフの種類(枝での分類)

無向グラフ

undirected graph

混合グラフ

mixed graph

有向グラフ

directed graph

双方向化 ↓

有向グラフ ↓

一方を通ったらもう一方も配達済にしくちゃ

枝巡回問題で双方向化は無力

30

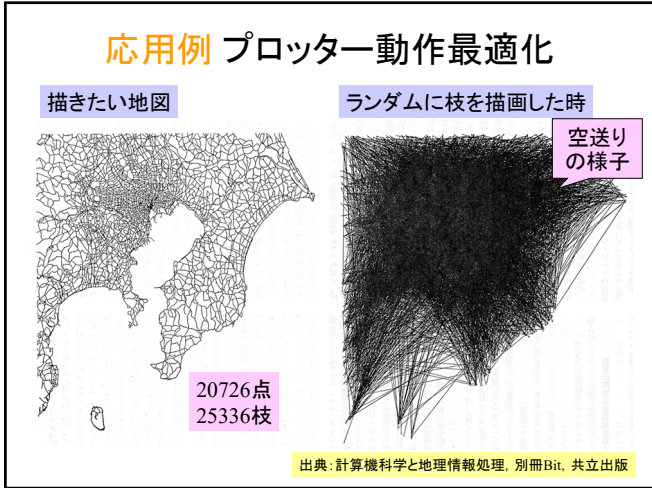
考えられる類似問題

- 道路掃除 + スケジューリング ⇒ N.Y. や D.C. にて事例有
- スクールバス経路
- 除雪の時間短縮 ⇒ 英国や青森で事例有
- ごみ収集 ⇒ 米国・カナダにて事例有
- 電気・ガスメーター検針 ⇒ 米国・イスラエルにて事例有
- スーパーマーケットの床掃除の効率化

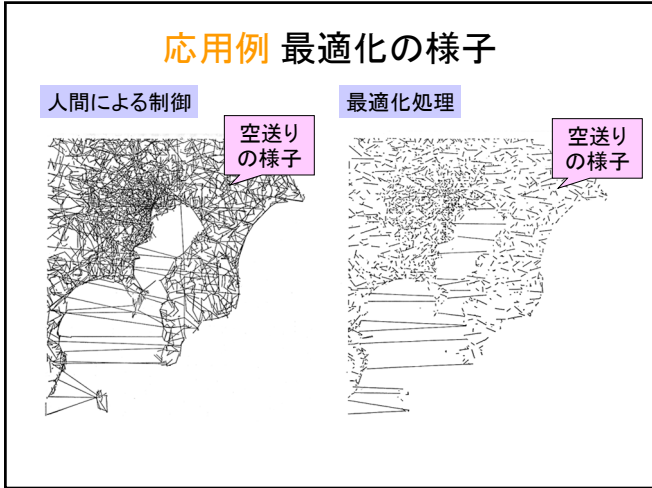
他には？

実際の適用例

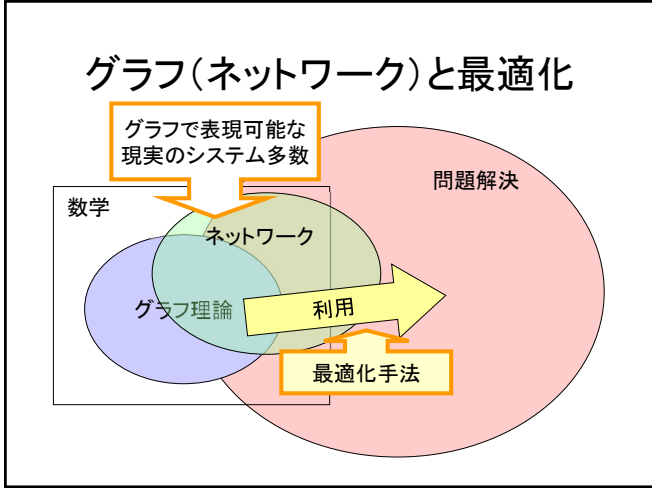
31



32



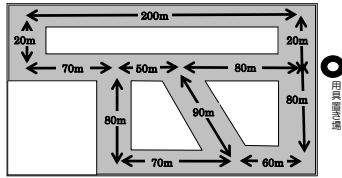
33



34

演習2

あるアミューズメントパークの通路清掃業務を受託した。清掃は掃除用マシンで行い、1分間に通路10メートル清掃可能である。清掃無しの単なる移動でも1分間10メートルしか進めない。この清掃作業は最短何分で終了可能か、また、そのときの通路の清掃順路を示せ。なお、清掃作業は用具置き場から始まり、用具置き場で終了することとする。



パークの概略図

35

演習3 円卓問題

5カ国から各2人の代表が集まり(つまり10人で)円卓会議を開く。各国の代表が残りのすべての国の代表と隣同士に座ることは可能か? 可能ならその配置を示せ。不可能ならその理由を示せ。



36

まとめ:学んだことと



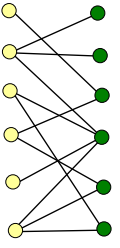
- グラフ・ネットワーク上の問題の紹介
 - 材料: 枝巡回路問題
- 数学の理論から問題の解決へ
 - 理論から応用はとてもスマート
- テキストの問題 vs 実際の問題
 - 実際の問題解決は面白い

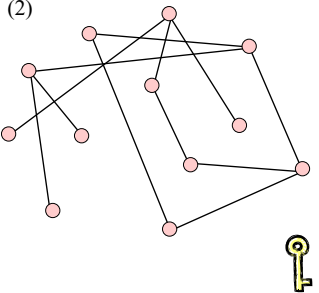
⇒ オペレーションズ・リサーチの主な手法のひとつ
最適化の手法に触れる

37

演習4 最大マッチング

最大マッチングを求めよ

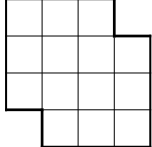
(1) 

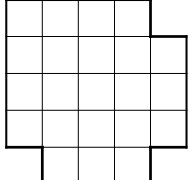
(2) 

38

演習5

畳の敷き詰めプランを作成しよう

201号室(7畳間) 

202号室(11畳間) 

40

課題について

課題は講義内容の理解を確認するためにほぼ毎回課します。
課題への取り組み状況は成績に加味します。

提出方法

1. 課題に取り組む(手書きorデジタル)
2. manabaにて提出。
※手書きの場合はスキャナアプリでデジタル化し提出。
3. 講義に持ってくる→解説→自己採点
4. 自己採点結果をデジタル化しmanabaで提出
※ 2. のコメント欄を利用。点数・コメント記入。
5. 教員からのmanabaでコメント。

42
