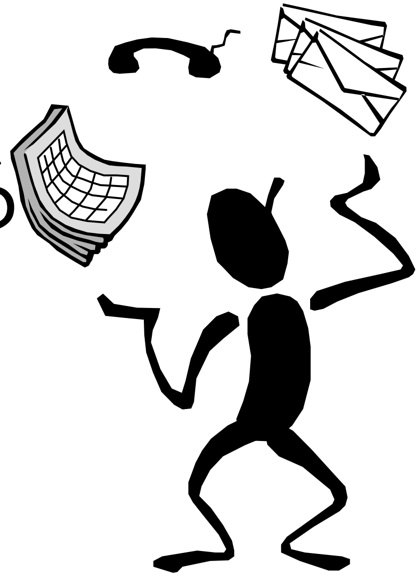
最適化問題の緩和と双対

Relaxation and Duality

別な観点から問題を眺める



ここで学ぶこと

- 最適化問題の最適値の上限･下限
- 最適化問題が持つ裏の顔と表との関係

例題1 生産計画

- 2つの製品Q,Rを製造
- 製品Q,R共，原液A,Bから生産
- 利益最大の生産計画は？

	製品Q 1kg当たり	製品R 1kg当たり	使用可能量
原液A	2(kl)	1(kl)	70(kl/日)
原液B	3(kl)	4(kl)	180(kl/日)
利益	6(千円)	4(千円)	

定式化してみよう！

定式化

製品Qの製造量をx_1，製品Rの製造量をx_2とおく.

$$
\begin{array}{lll}
\max & 6x_1 + 4x_2 & \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \le 70 & \cdots ① \\
 & 3x_1 + 4x_2 \le 180 & \cdots ② \\
 & x_1, x_2 \ge 0 &
\end{array}
$$

最適値はどの程度？見積もってみよう

見積もり例

制約式①×2+制約式②×1: $7x_1+6x_2 \leqq 70\times 2+180=320$

$\leqq$ ← $x_1,x_2 \geqq 0$より

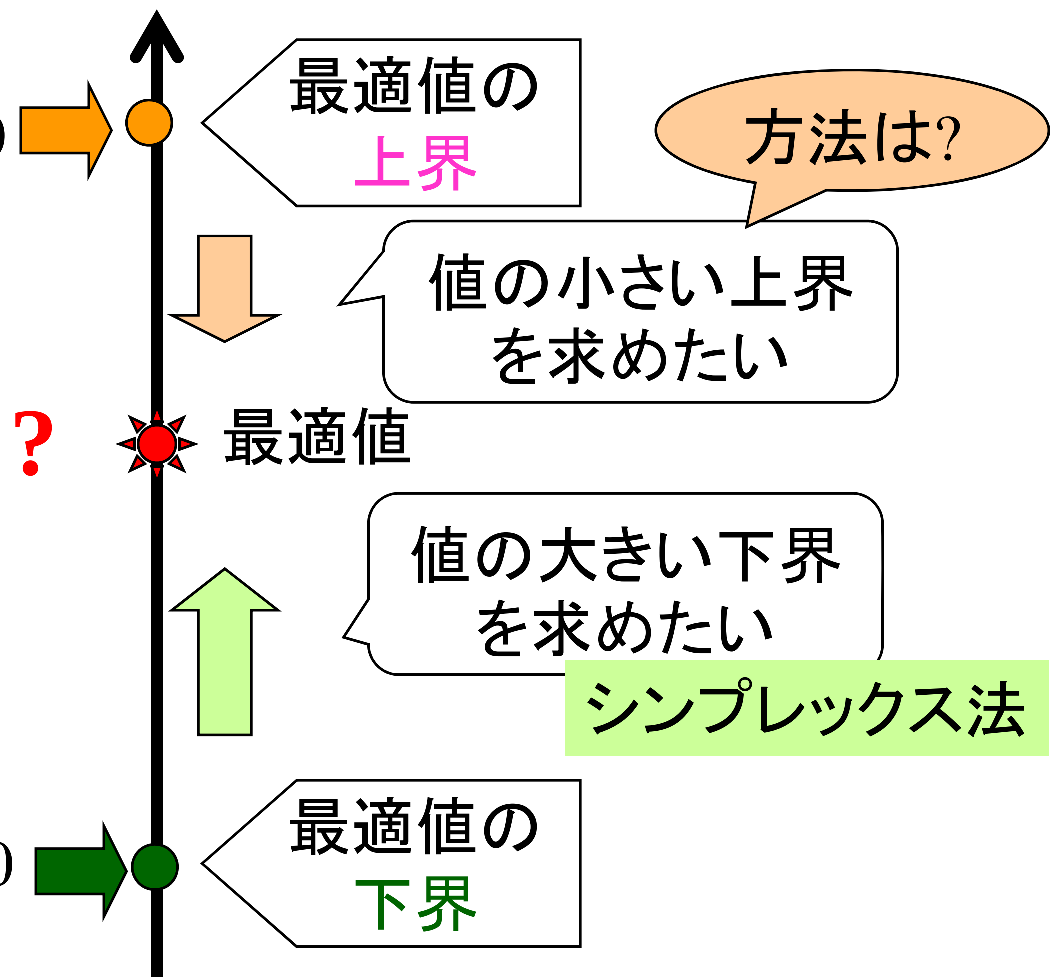
目的関数: $6x_1+4x_2$

⇨ 最適値の上界は**320**

演習1: もっと良い見積もりをしてみよう

最適値の上界･下界

前ページの見積もり 320



$$
\begin{array}{lrl}
\max & 6x_1 + 4x_2 & \\
\text{s.t.} & 2x_1 + \quad x_2 & \leq 70 \\
 & 3x_1 + 4x_2 & \leq 180 \\
 & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

実行可能解

x_1=10, x_2=30

⇒（目的関数値）＝180

より良い上界の見積もり方法

各制約式を何倍するのが適切かを考える

小さくしたい

制約式①×y_1+制約式②×y_2:

$$(2x_1+x_2)\times y_1+(3x_1+4x_2)\times y_2 \leqq 70y_1+180y_2$$

$$\parallel$$

$$(2y_1+3y_2)\times x_1+(y_1+4y_2)\times x_2$$

$$\leqq$$

目的関数: $6x_1+4x_2$

$$2y_1+3y_2 \geqq 6$$
$$y_1+4y_2 \geqq 4$$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & 70y_1+180y_2 \\ \text{s.t.} & 2y_1+3y_2 \geq 6 \\ & y_1+4y_2 \geq 4 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

この問題の最適解が最良の上界を与える

演習2

次の問題の最適値の**より良い下界**を求める
線形計画問題を作ってみよう

$$
\begin{array}{ll}
\min & 70y_1 + 180y_2 \\
\text{s.t.} & 2y_1 + 3y_2 \geq 6 \\
 & y_1 + 4y_2 \geq 4 \\
 & y_1, y_2 \geq 0
\end{array}
$$

どのような線形計画問題が得られるか？

双対な関係

問題(P)

$$\begin{array}{ll} \max & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \le 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \le 180 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

問題(D)

$$\begin{array}{ll} \min & 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} & 2y_1 + 3y_2 \ge 6 \\ & y_1 + 4y_2 \ge 4 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{array}$$

主問題 ⟶ 双対問題

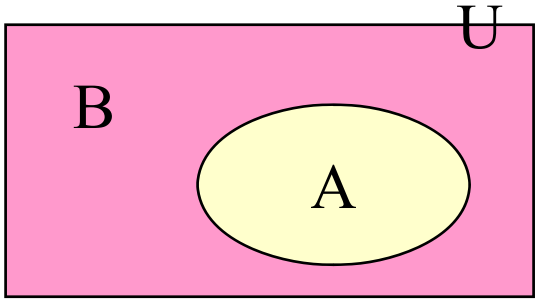
双対問題 ⟵ 主問題

「双対（そうつい）」とは

- あるAに，ある操作αを行ったら，Bを得た．
- Bに，操作αを行ったら，Aを得た．

AとBは（操作αに関し）双対の関係

（例）　集合Uの部分集合A：
集合Aの補集合を集合Bとする．
集合Bの補集合は集合A．



⇒集合Aと集合Bは（補集合という操作に関し）双対．

面白そうな双対の関係

- （射影）幾何学の分野：点と線は双対.
  - 定理「2点を通る直線は1つ」
  - 定理「2直線を通る点は1つ」

  双対性（duality）

- いろいろな数理的な場面で双対の関係が本質的に重要役割を演じることが多い.
- 線形計画（数理計画）の分野にも…

演習3 双対問題を作ろう

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & z = -x_1 + 2x_2 \\
\text{subject to} & 2x_1 + x_2 \geq 8 \quad \cdots ① \\
& x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \quad \cdots ② \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

双対問題を作る別な方法

(P)

$$\begin{array}{lrl} \max & 6x_1 + 4x_2 & \\ \text{s.t.} & 2x_1 + \quad x_2 & \le 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 & \le 180 \\ & x_1, x_2 & \ge 0 \end{array}$$

$70\text{-}(2x_1+x_2) \geqq 0$

$180\text{-}(3x_1+4x_2) \geqq 0$

$y_1 \geqq 0$に対して

$y_1(70\text{-}(2x_1+x_2)) \geqq 0$

$y_2 \geqq 0$に対して

$y_2(180\text{-}(3x_1+4x_2)) \geqq 0$

(P1)

$$\leqq \quad \begin{array}{lrl} \max & 6x_1 + 4x_2 + y_1(70-(2x_1+x_2)) + y_2(180-(3x_1+4x_2)) & \\ \text{s.t.} & 2x_1 + \quad x_2 & \le 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 & \le 180 \\ & x_1, x_2 & \ge 0 \end{array}$$

非負

非負

ラグランジュ緩和

(P1)

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 4x_2 + y_1(70 - (2x_1 + x_2)) + y_2(180 - (3x_1 + 4x_2)) \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \le 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \le 180 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

最適化では
様々な場面で現れる
重要な緩和手法

ラグランジュ緩和(Lagrange Relaxation)

(P2)

$\leqq$

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 4x_2 + y_1(70 - (2x_1 + x_2)) + y_2(180 - (3x_1 + 4x_2)) \\ \text{s.t.} \quad & x_1, x_2 \ge 0, \quad y_1, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

ラグランジュ緩和問題

ラグランジュ緩和問題の構造

ラグランジュ緩和問題

$$\begin{array}{ll} \max & 6x_1 + 4x_2 + y_1(70 - (2x_1 + x_2)) + y_2(180 - (3x_1 + 4x_2)) \\ \text{s.t.} & x_1, x_2 \geq 0, \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

ラグランジュ緩和問題

(P2)の最適値

条件緩和

(P1)の最適値

目的関数に追加

(P)の最適値

整理

非有界にならないための条件

$6\text{-}2y_1\text{-}3y_2 \leqq 0$

$4\text{-}y_1\text{-}4y_2 \leqq 0$

$$\begin{array}{ll} \max & (6 - 2y_1 - 3y_2)x_1 + (4 - y_1 - 4y_2)x_2 + 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} & x_1, x_2 \geq 0, \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

ラグランジュ緩和問題を利用したより良い上界の導出

$6\text{-}2y_1\text{-}3y_2 \leqq 0$

$4\text{-}y_1\text{-}4y_2 \leqq 0$

小さくしたい

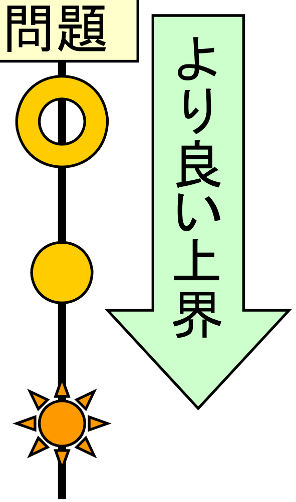
$$\begin{array}{ll} \max & (6-2y_1-3y_2)x_1+(4-y_1-4y_2)x_2+70y_1+180y_2 \\ \text{s.t.} & x_1, x_2 \geq 0, \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

ラグランジュ緩和問題

(P2)の最適値

(P1)の最適値

(P)の最適値



より良い上界を求める問題(D)

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & 70y_1+180y_2 \\ \text{s.t.} & 6-2y_1-3y_2 \leq 0 \\ & 4-y_1-4y_2 \leq 0 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

ラグランジュ緩和問題を利用した双対問題の導出

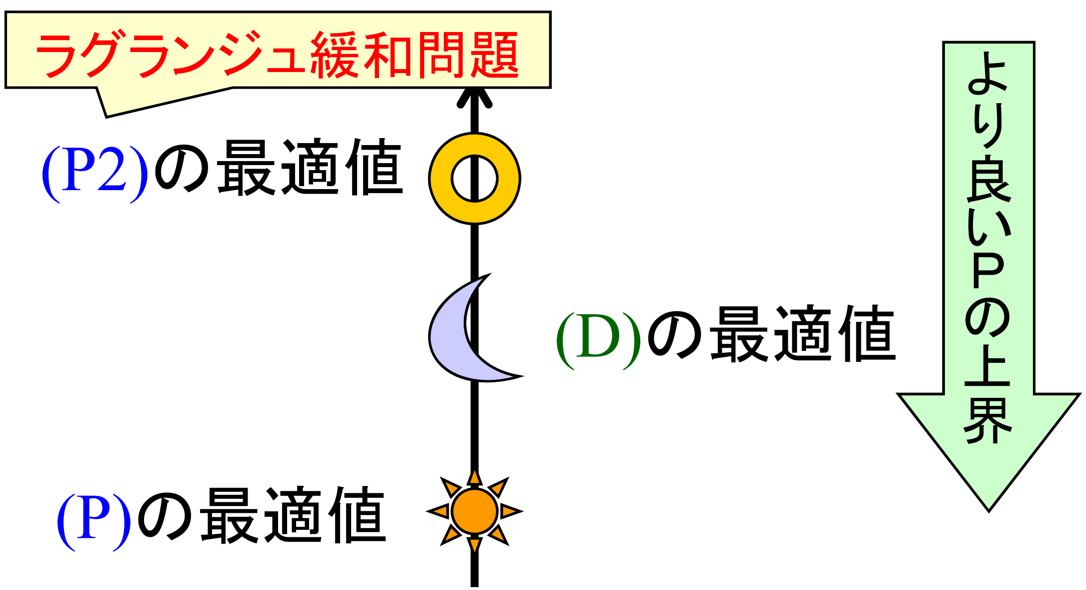
(P)

$$
\begin{array}{lrl}
\max & 6x_1 + 4x_2 & \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 & \le 70 \\
 & 3x_1 + 4x_2 & \le 180 \\
 & x_1, x_2 & \ge 0
\end{array}
$$

双対

(D)

$$
\begin{array}{lrl}
\text{min.} & 70y_1 + 180y_2 & \\
\text{s.t.} & 2y_1 + 3y_2 & \ge 6 \\
 & y_1 + 4y_2 & \ge 4 \\
 & y_1, y_2 & \ge 0
\end{array}
$$



練習 ラグランジュ緩和問題を経由し双対問題を作ろう

$$
\begin{array}{lrl}
\text{maximize} & z = -x_1 + 2x_2 & \\
\text{subject to} & 2x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} \geq 8 & \cdots ① \\
 & x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 & \cdots ② \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0 &
\end{array}
$$

練習 解答例(1)

(P)

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & -x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

$8-(2x_1+x_2) \leqq 0$

$9-(x_1+3x_2+x_3)=0$

$y_1 \leqq 0$に対して

$y_1(8-(2x_1+x_2)) \geqq 0$

y_2（自由変数）に対して

$y_2(9-(x_1+3x_2+x_3))=0$

(P1)

$\leqq$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & -x_1 + 2x_2 + y_1(8-(2x_1+x_2)) + y_2(9-(x_1+3x_2+x_3)) \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ & y_1 \leq 0 \end{array}$$

非負

0

練習 解答例(2)

(P1)

$$\begin{aligned}
\text{max.}\quad & -x_1+2x_2+y_1(8-(2x_1+x_2))+y_2(9-(x_1+3x_2+x_3))\\
\text{s.t.}\quad & 2x_1+x_2 \geq 8\\
& x_1+3x_2+x_3=9\\
& x_1,x_2,x_3\geq 0\\
& y_1\leq 0
\end{aligned}$$

ラグランジュ緩和(Lagrange Relaxation)

(P2)

$\leqq$

$$\begin{aligned}
\text{max.}\quad & -x_1+2x_2+y_1(8-(2x_1+x_2))+y_2(9-(x_1+3x_2+x_3))\\
\text{s.t.}\quad & x_1,x_2,x_3\geq 0\\
& y_1\leq 0
\end{aligned}$$

ラグランジュ緩和問題

練習 解答例(3)

ラグランジュ緩和問題

$$\begin{aligned}\text{max.}\quad & -x_1+2x_2+y_1(8-(2x_1+x_2))+y_2(9-(x_1+3x_2+x_3))\\ \text{s.t.}\quad & x_1,x_2,x_3\ge 0\\ & y_1\le 0\end{aligned}$$

整理

非有界にならないための条件

$-1-2y_1-y_2 \leqq 0$

$2-y_1-3y_2 \leqq 0$

$-y_2 \leqq 0$

$$\begin{aligned}\text{max.}\quad & (-1-2y_1-y_2)x_1+(2-y_1-3y_2)x_2+(-y_2)x_3+8y_1+9y_2\\ \text{s.t.}\quad & x_1,x_2,x_3\ge 0\\ & y_1\le 0\end{aligned}$$

練習 解答例(4)

-1-2y_1-y_2≦0　　2-y_1-3y_2≦0　　-y_2≦0　　小さくしたい

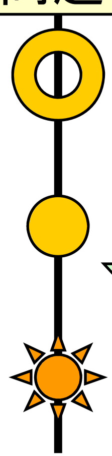
$$\begin{aligned}
\text{max.}\quad & (-1-2y_1-y_2)x_1+(2-y_1-3y_2)x_2+(-y_2)x_3+8y_1+9y_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_1,x_2,x_3 \geq 0 \\
& y_1 \leq 0
\end{aligned}$$

ラグランジュ緩和問題

(P2)の最適値

(P1)の最適値

(P)の最適値



より良い上界

より良い上界を
求める問題(D)

$$\begin{aligned}
\text{min.}\quad & 8y_1+9y_2 \\
\text{s.t.}\quad & -1-2y_1-y_2 \leq 0 \\
& 2-y_1-3y_2 \leq 0 \\
& -y_2 \leq 0 \\
& y_1 \leq 0
\end{aligned}$$

練習 解答例(5)

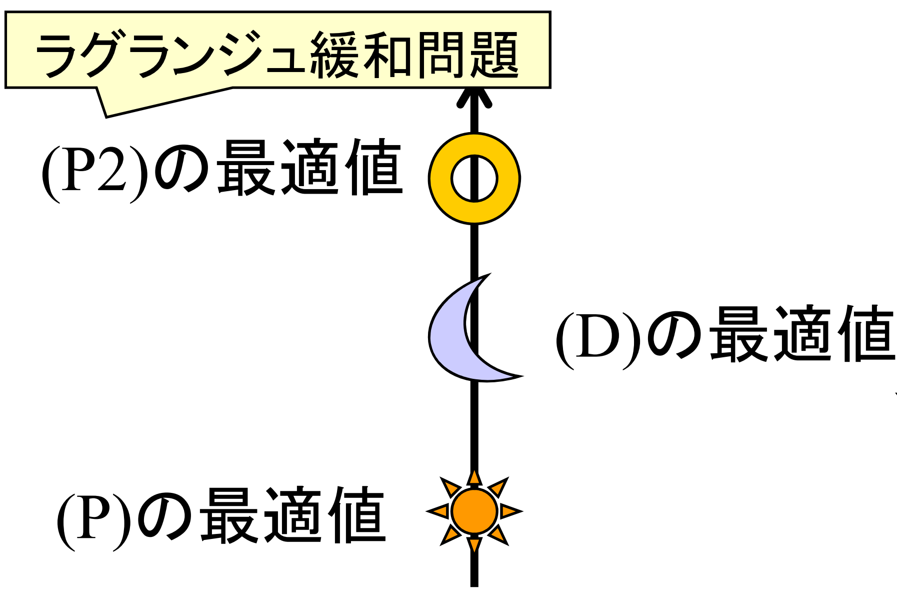
(P)

$$\begin{array}{lrl} \text{max.} & -x_1 + 2x_2 & \\ \text{s.t.} & 2x_1 + \quad x_2 & \geq 8 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 & = 9 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

双対

(D)

$$\begin{array}{lrl} \text{min.} & 8y_1 + 9y_2 & \\ \text{s.t.} & 2y_1 + \quad y_2 & \geq -1 \\ & y_1 + 3y_2 & \geq 2 \\ & y_1 & \leq 0 \\ & y_2 & \geq 0 \end{array}$$



より良いPの上界

演習4

ラグランジュ緩和問題を経由し,
(D)の双対問題が(P)になることを確認せよ

(D)

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & 70y_1 + 180y_2 \\
\text{s.t.} \quad & 2y_1 + 3y_2 \geq 6 \\
& y_1 + 4y_2 \geq 4 \\
& y_1,\ y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

⇒

(P)

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 6x_1 + 4x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 70 \\
& 3x_1 + 4x_2 \leq 180 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

演習5

ラグランジュ緩和問題を経由し,
(D)の双対問題が(P)になることを確認せよ

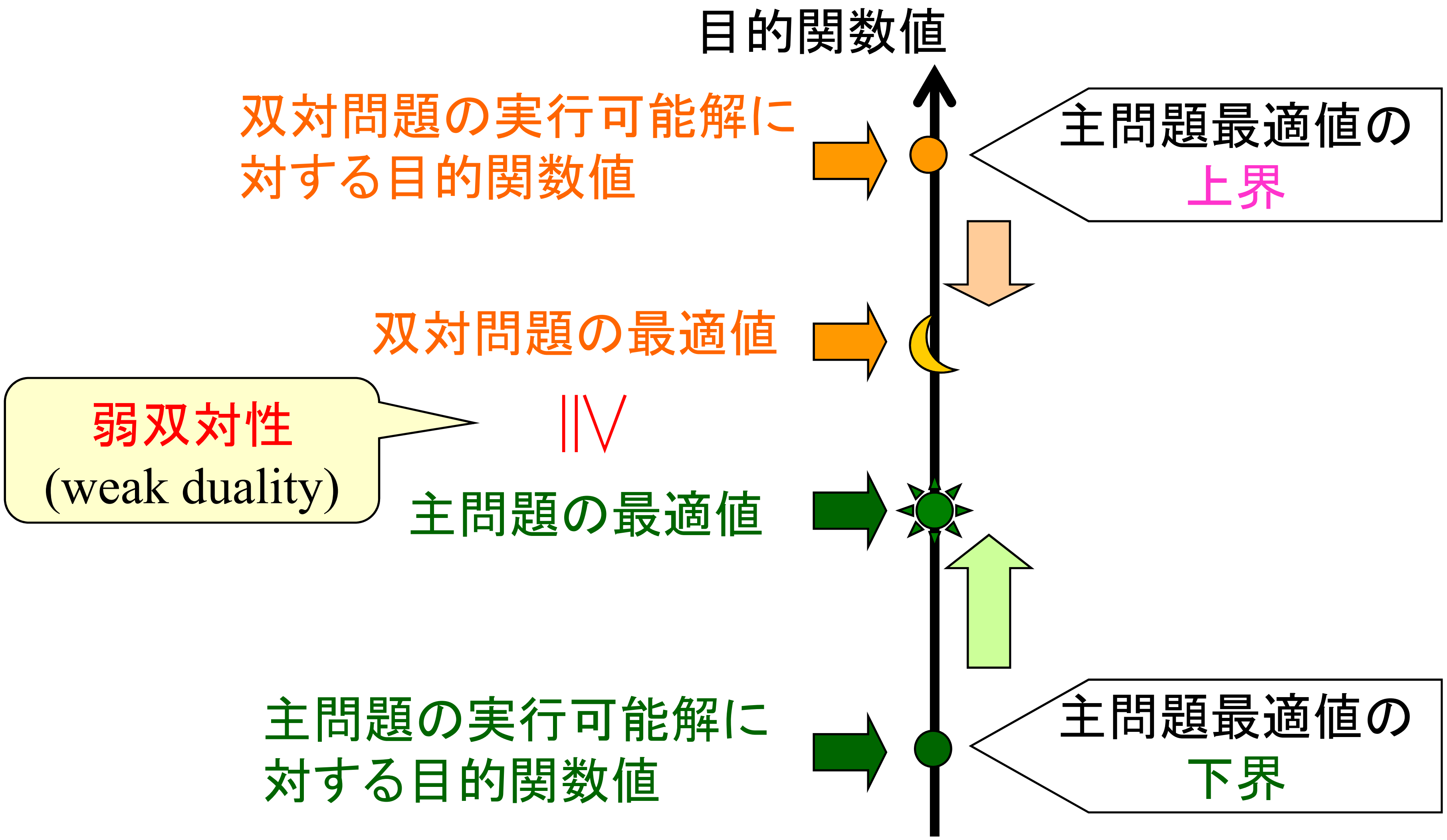
(D)

$$
\begin{array}{lrl}
\text{min.} & 8y_1 + 9y_2 & \\
\text{s.t.} & 2y_1 + y_2 & \geq -1 \\
 & y_1 + 3y_2 & \geq 2 \\
 & y_1 & \leq 0 \\
 & y_2 & \geq 0
\end{array}
$$

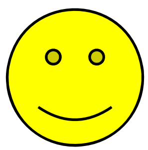
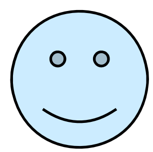
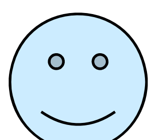
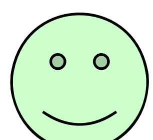
(P)

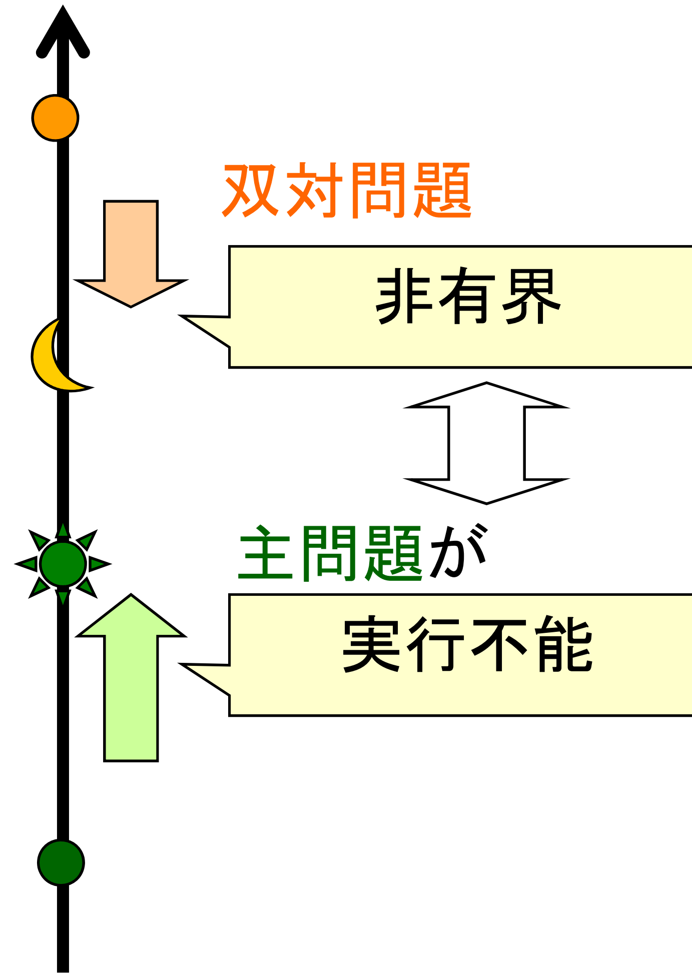
$$
\begin{array}{lrl}
\text{max.} & -x_1 + 2x_2 & \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} & \geq 8 \\
 & x_1 + 3x_2 + x_3 & = 9 \\
 & x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

主問題と双対問題の関係(1)

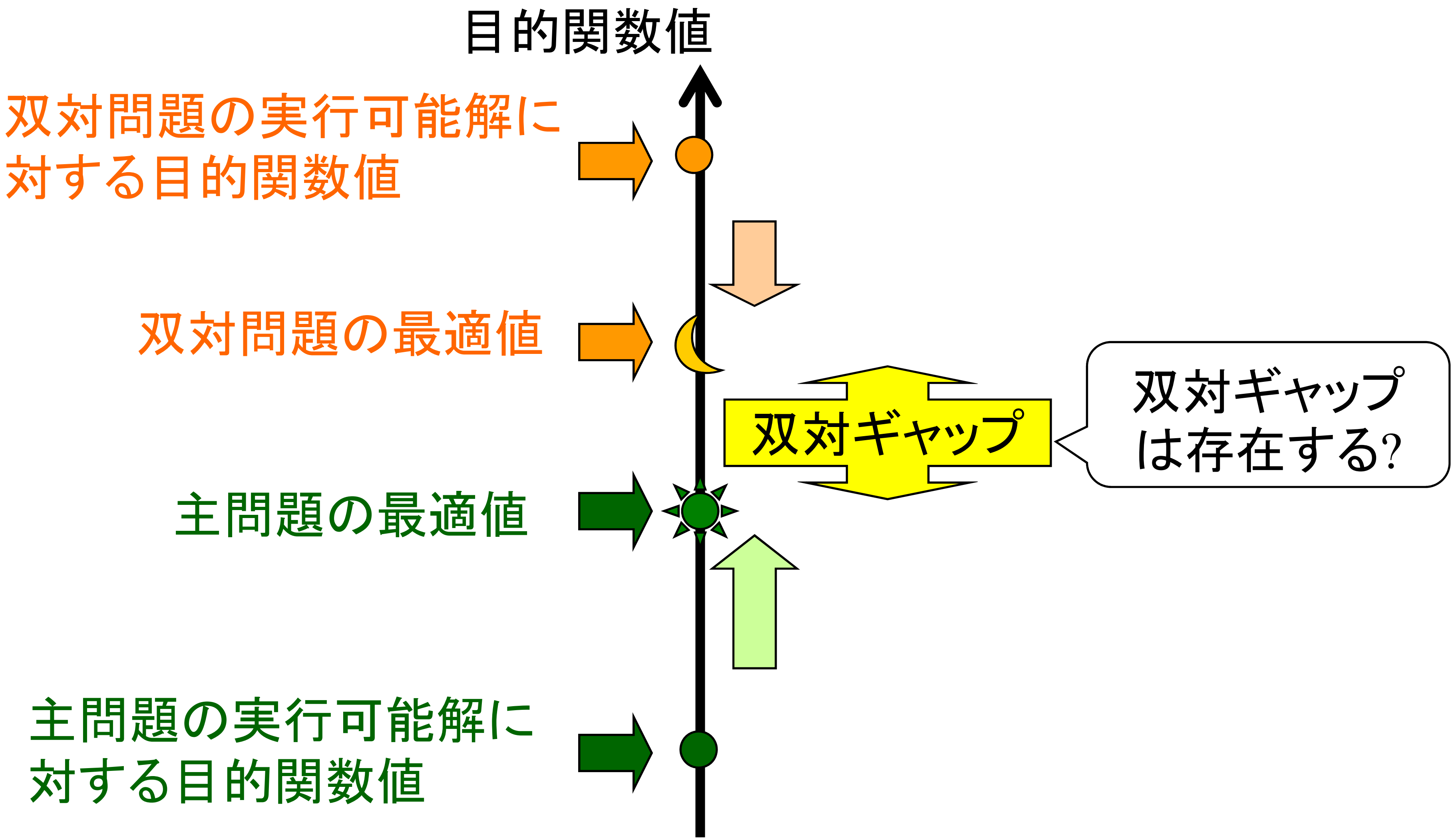


主問題と双対問題の関係(3)

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="3">どの組合せがあり得る?</td><td colspan="3">双対問題</td></tr>
<tr><td colspan="2">実行可能</td><td rowspan="2">実行不能</td></tr>
<tr><td>最適解</td><td>非有界</td></tr>
<tr><td rowspan="3">主問題</td><td rowspan="2">実行可能</td><td>最適解</td><td></td><td>×</td><td>×</td></tr>
<tr><td>非有界</td><td>×</td><td>×</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">実行不能</td><td>×</td><td></td><td></td></tr>
</table>



主問題と双対問題の関係(2)



主問題と双対問題の解

シンプレックス法で最適解と最適値を求めてみる

主問題(P)

$$
\begin{array}{ll}
\max & 6x_1 + 4x_2 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \le 70 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \le 180 \\
 & x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

双対問題(D)

$$
\begin{array}{ll}
\min & 70y_1 + 180y_2 \\
\text{s.t.} & 2y_1 + 3y_2 \ge 6 \\
 & y_1 + 4y_2 \ge 4 \\
 & y_1, y_2 \ge 0
\end{array}
$$

各々の最終的なシンプレックス表を比較⇒

主問題

製品Qの製造量: x_1

製品Rの製造量: x_2

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 6x_1 + 4x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 70 \\
& 3x_1 + 4x_2 \leq 180 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

シンプレックス法で解く

シンプレックス表
（最終）

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
x1	0	1	0	4/5	-2/5	20
x2	0	0	1	-3/5	2/5	30
z	1	0	0	12/5	2/5	240

最適解 $x_1 = 20$, $x_2 = 30$

双対問題

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 70y_1 + 180y_2 \\
\text{s.t.} \quad & 2y_1 + 3y_2 \geq 6 \\
& y_1 + 4y_2 \geq 4 \\
& y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & (-z) = -70y_1 - 180y_2 \\
\text{s.t.} \quad & 2y_1 + 3y_2 - s_1 = 6 \\
& y_1 + 4y_2 - s_2 = 5 \\
& y_1, y_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

2段階シンプレックス表(最終)

基底変数	(−z)	y1	y2	s1	s2	定数項
y1	0	1	0	−4/5	3/5	12/5
y2	0	0	1	1/5	−2/5	2/5
(−z)	1	0	0	20	30	−240

比較

主問題

$$\max \quad 6x_1 + 4x_2$$
$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 \le 70$$
$$3x_1 + 4x_2 \le 180$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
x1	0	1	0	4/5	−2/5	20
x2	0	0	1	−3/5	2/5	30
z	1	0	0	12/5	2/5	240

双対問題

$$\min \quad 70y_1 + 180y_2$$
$$\text{s.t.} \quad 2y_1 + 3y_2 \ge 6$$
$$y_1 + 4y_2 \ge 4$$
$$y_1, y_2 \ge 0$$

基底変数	(−z)	y1	y2	s1	s2	定数項
y1	0	1	0	−4/5	3/5	12/5
y2	0	0	1	1/5	−2/5	2/5
(−z)	1	0	0	20	30	−240

主問題の最適値⇔双対問題の最適値

主(双対)問題の最適解⇔双対(主)問題の限界価値

偶然？

主問題

$$
\begin{aligned}
\max.\ & \mathbf{c}^t\mathbf{x} \\
\text{s.t.}\ & \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

双対問題

$$
\begin{aligned}
\min.\ & \mathbf{b}^t\mathbf{y} \\
\text{s.t.}\ & \mathbf{A}^t\mathbf{y} \ge \mathbf{c} \\
& \mathbf{y} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

LPでの主問題と双対問題の重要な関係

◆（主問題の最適値）＝（双対問題の最適値）

（双対ギャップ）＝０

強双対性

(strong duality)

強双対性から得られる性質

$$\begin{aligned} \text{min.}\ & (70-2x_1-x_2)y_1+(180-3x_1-4x_2)y_2+6x_1+4x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1,x_2\ge 0,\ \ y_1,y_2\ge 0 \end{aligned}$$

$$(70-2x_1-x_2)y_1+(180-3x_1-4x_2)y_2=0$$

(P)

$$\begin{aligned} \max\ & 6x_1+4x_2 \\ \text{s.t.}\ & 2x_1+x_2\le 70 \\ & 3x_1+4x_2\le 180 \\ & x_1,x_2\ge 0 \end{aligned}$$

強双対性

双対ギャップ＝0

相補性条件

(D)

$$\begin{aligned} \text{min.}\ & 70y_1+180y_2 \\ \text{s.t.}\ & 2y_1+3y_2\ge 6 \\ & y_1+4y_2\ge 4 \\ & y_1,\ y_2\ge 0 \end{aligned}$$

$$(6-2y_1-3y_2)x_1+(4-y_1-4y_2)x_2=0$$

$$\begin{aligned} \max\ & (6-2y_1-3y_2)x_1+(4-y_1-4y_2)x_2+70y_1+180y_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1,x_2\ge 0,\ \ y_1,y_2\ge 0 \end{aligned}$$

ラグランジュ緩和問題

相補性条件

(Complementary slackness condition)

x_1,x_2が(P)の実行可能解，y_1,y_2が(D)の実行可能解

$$\boxed{\begin{aligned}(70-2x_1-x_2)y_1+(180-3x_1-4x_2)y_2&=0\\(6-2y_1-3y_2)x_1+(4-y_1-4y_2)x_2&=0\end{aligned}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}(70-2x_1-x_2)y_1&=0\\(180-3x_1-4x_2)y_2&=0\\(6-2y_1-3y_2)x_1&=0\\(4-y_1-4y_2)x_2&=0\end{aligned}}$$

条件に余裕
↓
対応双対変数＝0

x_1,x_2が(P)の最適解 ⟷ y_1,y_2が(D)の最適解

双対定理

- 主問題に有界な最適解が存在

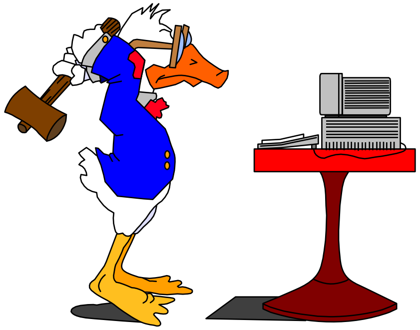
相補性条件

- 双対問題にも有界な最適解が存在
- それぞれの目的関数値は一致

●双対問題が主問題の最適解の証拠を提供

●双対問題から間接的に主問題の情報が得られる

●最適化アルゴリズムの開発に応用



演習6

以下の線形計画問題を解きなさい.

(1)
$$\begin{aligned} \min\ & 10x_1 + 20x_2 + 30x_3 \\ \text{s.t.}\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} \min\ & 30x_1 + 10x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_2 \ge 4 \\ & 5x_1 + x_2 \ge 5 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

双対問題を作り，双対定理を利用することにより

上記の問題を解きなさい

演習7

粉製品P,Q,Rは職人A,Bの手作業で完成する.

（例：製品P1kgは，職人Aが3h，職人Bが2h加工し完成）

（１）利益を最大にする生産計画を求める問題を定式化せよ.

（２）双対問題を作成せよ.

（３）双対変数の意味を自由に発想し解釈せよ.

	製品P 1kg	製品Q 1kg	製品R 1kg	労働制限
職人A	3時間	2時間	4時間	40時間/週
職人B	2時間	4時間	3時間	42時間/週
利益	8千円	7千円	10千円	

さて，この後は

- 双対定理を利用したアルゴリズム開発法
  - ネットワーク計画
- 緩和を用いたアルゴリズムの開発法
  - 整数計画問題