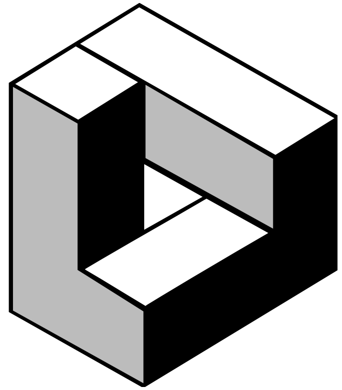


Linear Programming II

Simplex method

効率よく実行可能領域の端点を辿る方法

総当たり法の欠点の克服

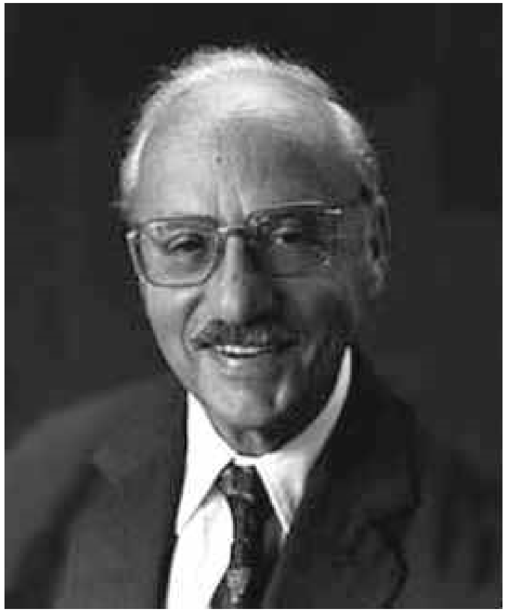
1回の走査の手間＝
連立方程式を解く手間

総当たり法の欠点

- 端点の候補をすべて走査
- 実行可能でない交点は破棄

結果的に無駄な計算

なんとかならない?


数理計画の巨人
George Dantzig

できます！

実行可能領域の端点だけを発見
⇒シンプレックス法
(単体法，simplex method)

Koopmans
Kantrovich
Leontief

線形計画問題に対する歴史上初の実用的解法
- 1947年 Dantzig

改良を重ね，現在でも強力な解法

写真:http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Dantzig_George.htmlより

アイディア：基本解と端点

max. $z=6x_1+5x_2$

s.t. $3x_1+x_2 \leqq 45$

$x_1+2x_2 \leqq 40$

$x_1, x_2 \geqq 0$

標準形（制約部のみ）

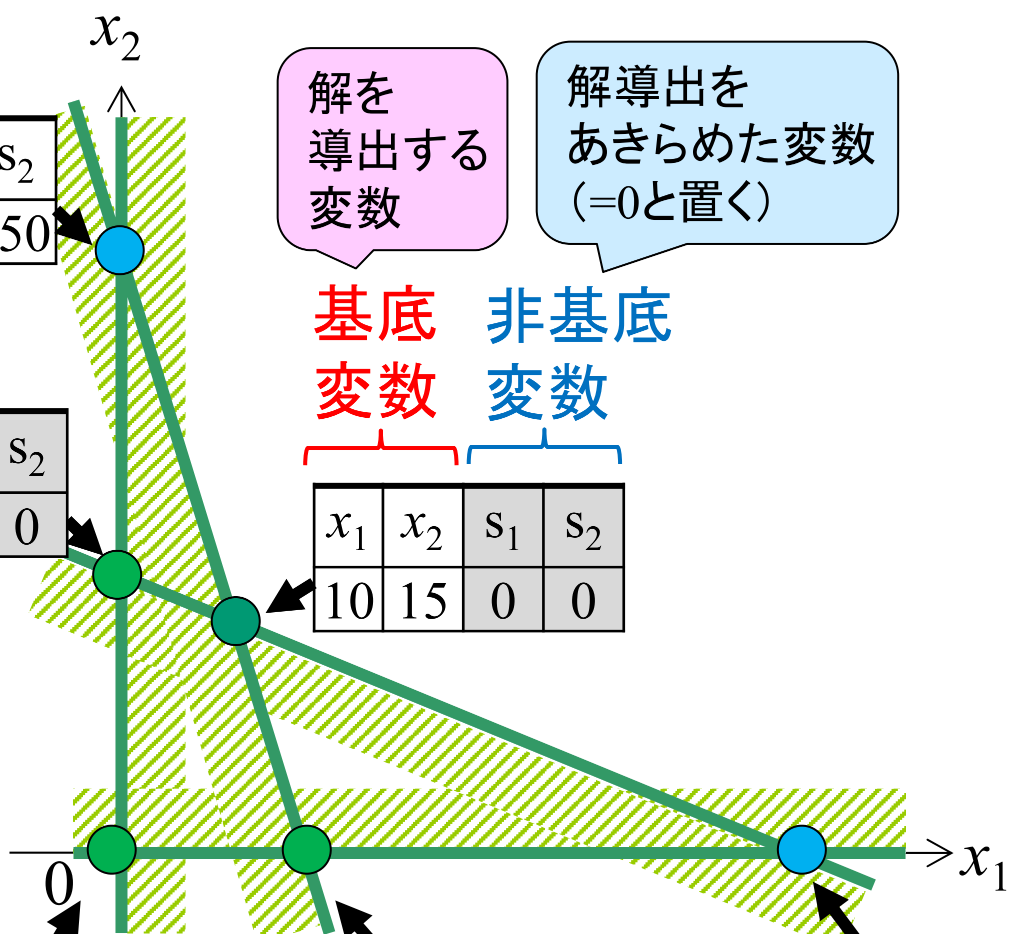
$3x_1+x_2+s_1=45$

$x_1+2x_2+s_2=40$

すべての基本解

4変数から2つを基底に選ぶ

⇒6パターン（$={}_4C_2$）



解を導出する変数

解導出をあきらめた変数（=0と置く）

基底変数　非基底変数

x_1	x_2	s_1	s_2
0	40	0	-50

x_1	x_2	s_1	s_2
0	20	25	0

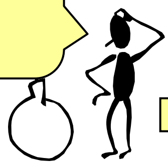
x_1	x_2	s_1	s_2
10	15	0	0

x_1	x_2	s_1	s_2
0	0	45	40

x_1	x_2	s_1	s_2
15	0	0	25

x_1	x_2	s_1	s_2
40	0	-75	0

直線上の基本解どんな関係？



⇒基底変数が1つだけ異なる ⇒ ピボット選択＋掃き出し操作

イメージ：基底変数の入替

$$3x_1 + x_2 + s_1 = 45$$
$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 40$$

変数：4個
方程式：2本

基底変数2個

$$3x_1 + x_2 + s_1 = 45$$
$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 40$$

$x_1 = 0$ $s_1 = 45$
$x_2 = 0$ $s_2 = 40$

基底変数の入替

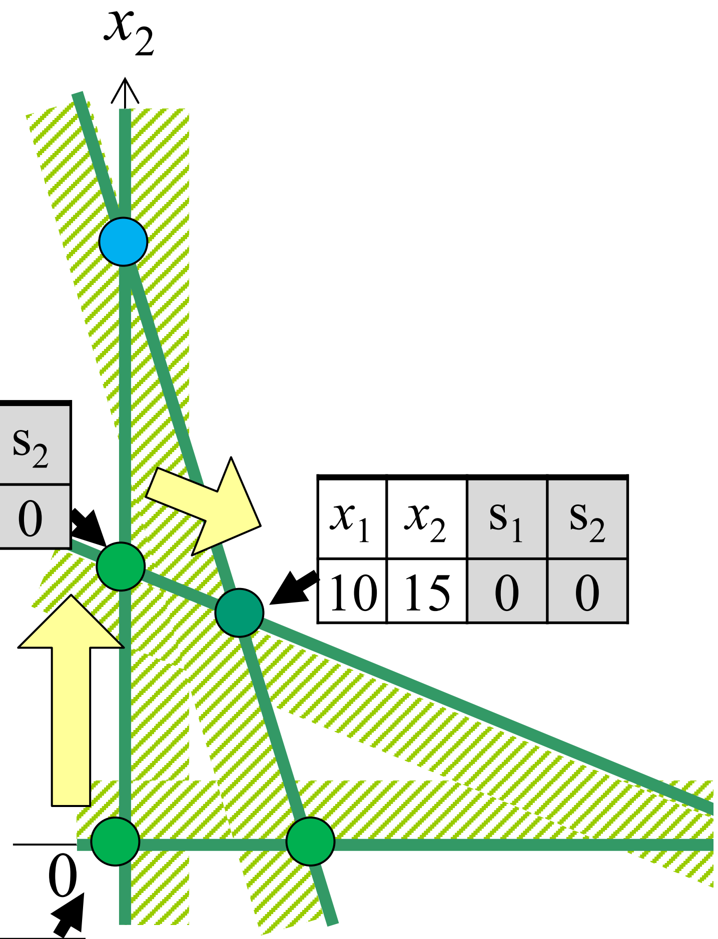
$$3x_1 + x_2 + s_1 = 45$$
$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 40$$

$x_1 = 0$ $s_1 = 25$
$x_2 = 20$ $s_2 = 0$

基底変数の入替

$$3x_1 + x_2 + s_1 = 45$$
$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 40$$

$x_1 = 10$ $s_1 = 0$
$x_2 = 15$ $s_2 = 0$



x_1	x_2	s_1	s_2
0	20	25	0

x_1	x_2	s_1	s_2
10	15	0	0

x_1	x_2	s_1	s_2
0	0	45	40

イメージ：基底変数の入替

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + s_1 &= 45 \\ x_1 + 2x_2 + s_2 &= 40 \end{aligned}$$

変数：4個
方程式：2本

ピボット選択をうまくやれば…

基底変数2個

連立方程式>>ガウスの消去法

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + s_1 &= 45 \\ x_1 + 2x_2 + s_2 &= 40 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 0 & s_1 &= 45 \\ x_2 &= 0 & s_2 &= 40 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 45 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 40 \end{pmatrix}$$

ピボット選択＋掃き出し

基底変数の入替

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + s_1 &= 45 \\ x_1 + 2x_2 + s_2 &= 40 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 0 & s_1 &= 25 \\ x_2 &= 20 & s_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 5/2 & 0 & 1 & -1/2 & 25 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 20 \end{pmatrix}$$

ピボット選択＋掃き出し

基底変数の入替

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + s_1 &= 45 \\ x_1 + 2x_2 + s_2 &= 40 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 10 & s_1 &= 0 \\ x_2 &= 15 & s_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/5 & -1/5 & 10 \\ 0 & 1 & -1/5 & 3/5 & 15 \end{pmatrix}$$

シンプレクス法（単体法）の流れ

simplex method

大枠

Step1: 端点を1つ見つける

原点が端点なら
すぐみつかる

Step2: 端点の最適性をチェック?→最適なら終了

目的関数値が大きな
隣の端点が存在
↓
最適ではない

Step3: 隣の端点を1つ見つける

基底変数の組の変更
（掃き出し操作）で可能

繰り返し

目的関数値が大きな
隣の端点を見つける

隣の端点を見つける度に
より良い解が得られる

最適解

例題

生産計画

- 2つの液体製品P,Qは機械A,Bを用いて加工される
- 利益が最大になる1週間の製品P,Qの加工量は？

	液体P 1ml	液体Q 1ml	使用可能量
機械A	3(h)	1(h)	45(h/週)
機械B	1(h)	2(h)	40(h/週)
利益	6(万円)	5(万円)	

⇨ シンプレックス法で最適解と最適値を求めてみよう.

x_1 : 液体Pの生産量

x_2 : 液体Qの生産量

定式化

$$\begin{aligned}
\text{max. } & z = 6x_1 + 5x_2 \\
\text{s.t. } & 3x_1 + x_2 \leqq 45 \\
& x_1 + 2x_2 \leqq 40 \\
& x_1, x_2 \geqq 0
\end{aligned}$$

標準形に変形

$$\begin{aligned}
\text{max. } & z \\
\text{s.t. } & 3x_1 + x_2 + s_1 = 45 \\
& x_1 + 2x_2 + s_2 = 40 \\
& z - 6x_1 - 5x_2 = 0 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geqq 0
\end{aligned}$$

※目的関数を制約へ

準備：シンプレックス表（単体表）

基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項	増加限界
s_1	0	3	1	1	0	45	
s_2	0	1	2	0	1	40	
z	1	-6	-5	0	0	0	

⇧ 初期の基底変数の決定

例題(続)

①
(z行に)負の数
⇒最適でない

基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項	増加限界
s_1	0	3	1	1	0	45	15
s_2	0	1	2	0	1	40	40
z	1	-6	-5	0	0	0	

② 負の中から新基底とする変数選択

$\dfrac{\text{定数項}}{\text{新基底の係数}}$

③増加限界計算
最小値選択
※負数除く

④ピボット確定
→掃き出し

x_1	0	1	1/3	1/3	0	15	45
s_2	0	0	5/3	-1/3	1	25	15
z	1	0	-3	2	0	90	

x_1	0	1	0	2/5	-1/5	10	
x_2	0	0	1	-1/5	3/5	15	
z	1	0	0	7/5	9/5	135	

最適

最適解$(x_1,x_2)=(10,15)$, 最適値 135

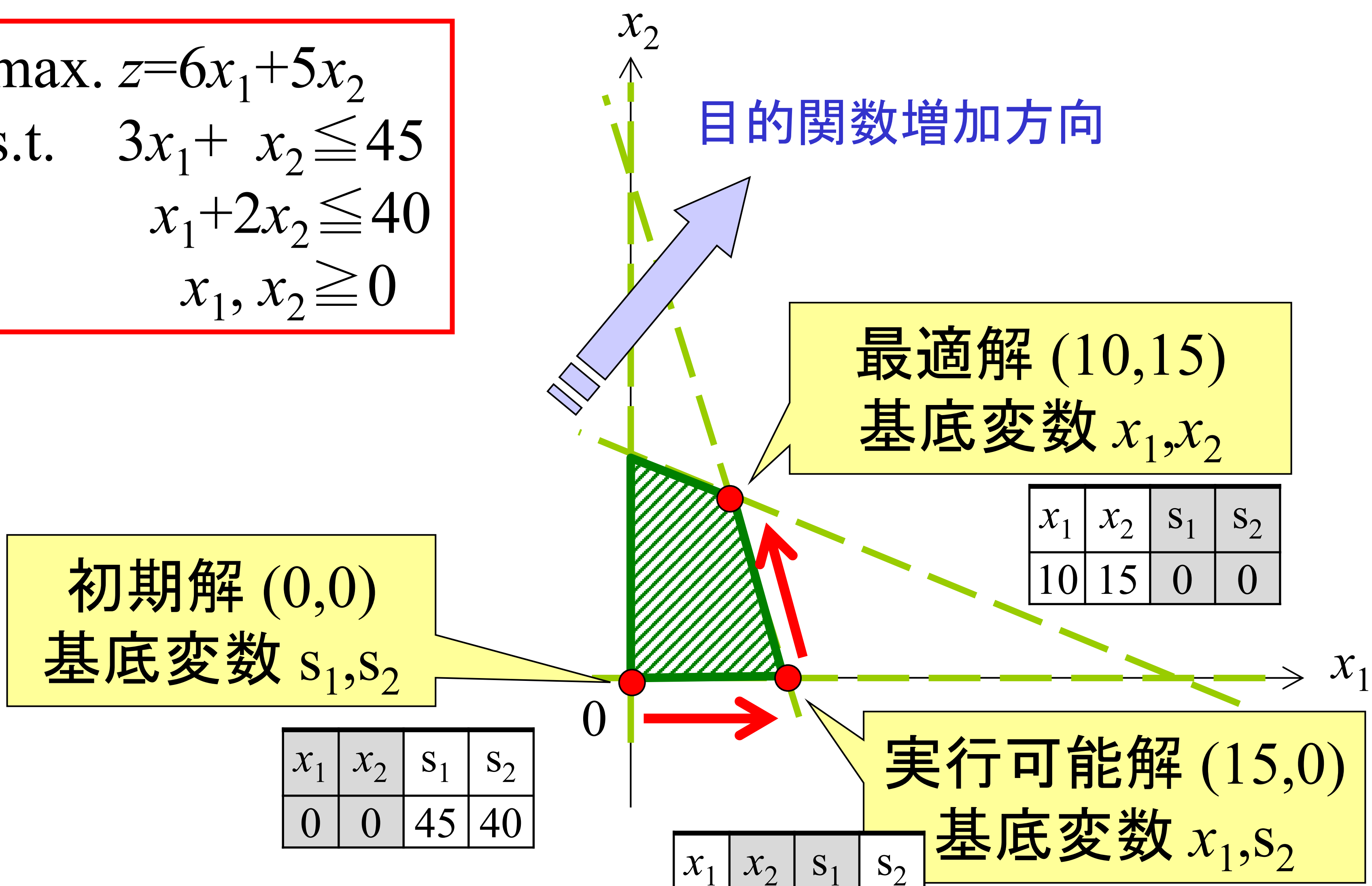
例題(続) シンプレクス法の動き

max. $z=6x_1+5x_2$

s.t. $3x_1+x_2 \leqq 45$

$x_1+2x_2 \leqq 40$

$x_1, x_2 \geqq 0$



x_1	x_2	s_1	s_2
0	0	45	40

x_1	x_2	s_1	s_2
15	0	0	25

x_1	x_2	s_1	s_2
10	15	0	0

練習1
シンプレックス法

最適解と最適値を導け

$$
\begin{aligned}
\text{max. } & z=30x_1+20x_2 \\
\text{s.t. } & x_1+3x_2 \leqq 150 \\
& 2x_1+x_2 \leqq 160 \\
& x_1, x_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

① 標準形に変形

② シンプレックス表の操作

基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項	増加限界
s_1							
s_2							
z							

z							

z							

③ 最適解・最適値の提示

最適解 $(x_1, x_2) = (\quad , \quad)$

最適値

練習2
シンプレクス法

(1)最適解と最適値を導け

$$
\begin{aligned}
\text{max. } & z = 20x_1 + 30x_2 \\
\text{s.t. } & x_1 + 2x_2 \leqq 800 \\
& 3x_1 + 4x_2 \leqq 1800 \\
& 3x_1 + x_2 \leqq 1500 \\
& x_1, x_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

① 標準形に変形

② シンプレクス表の操作

基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	定数項	増加限界
s_1								
s_2								
s_3								
z								

z								

z								

③ 最適解・最適値の提示

最適解 $(x_1, x_2) = (\quad , \quad)$

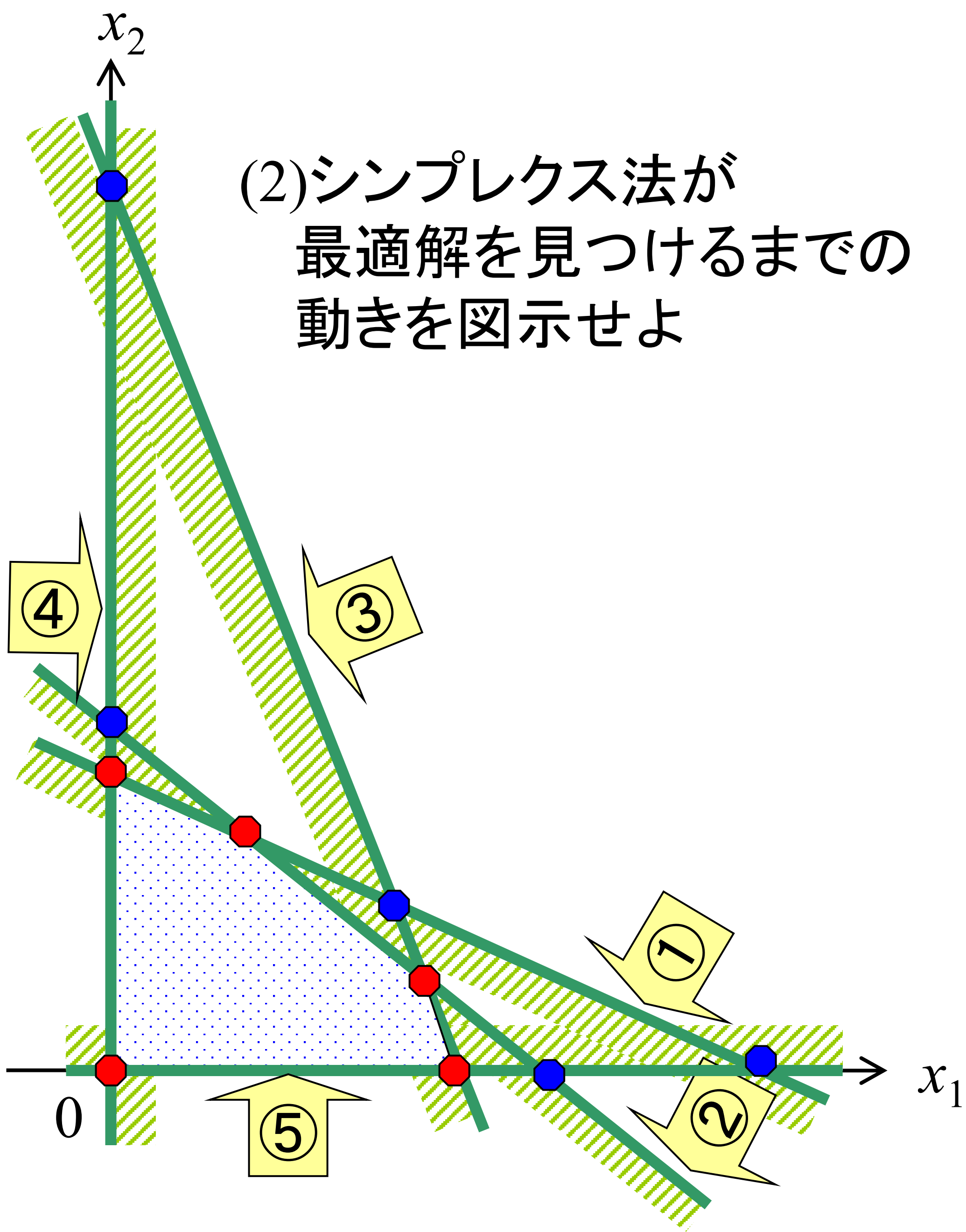
最適値

練習2 端点と交点

max. $z=20x_1+30x_2$

s.t.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leqq 800 & ① \\ 3x_1 + 4x_2 &\leqq 1800 & ② \\ 3x_1 + x_2 &\leqq 1500 & ③ \\ x_1 &\geqq 0 & ④ \\ x_2 &\geqq 0 & ⑤ \end{aligned}$$

(2)シンプレクス法が
最適解を見つけるまでの
動きを図示せよ



● :端点
(最適解の候補)
● :実行不能な交点

実行中のトラブル

あれ？

- 増加限界が0だ
- 目的関数値が増えない
- 初期解が見つからない

シンプレクス法が
無限ループに･･･

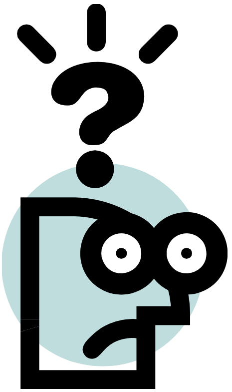
対処法は？

退化に出会った

初期解を探そう

探し方は？

シンプレクス法を
開始できない･･･



また次回以降に