Linear Programming III

Simplex method(2)

効率よく実行可能領域の端点を辿る方法

復習

シンプレックス法

生産計画

- 2つの液体製品P,Qは機械A,Bを用いて加工される
- 利益が最大になる1週間の製品P,Qの加工量は？

	液体P 1ml	液体Q 1ml	使用可能量
機械A	3(h)	1(h)	45(h/週)
機械B	1(h)	2(h)	40(h/週)
利益	6(万円)	5(万円)	

シンプレックス法で最適解と最適値を求めてみよう.

x_1 : 液体Pの生産量

x_2 : 液体Qの生産量

定式化

$$
\begin{aligned}
\text{max. } & z=6x_1+5x_2 \\
\text{s.t. } & 3x_1+x_2 \leqq 45 \\
& x_1+2x_2 \leqq 40 \\
& x_1, x_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

標準形に変形

$$
\begin{aligned}
\text{max. } & z \\
\text{s.t. } & 3x_1+x_2+s_1 = 45 \\
& x_1+2x_2+s_2 = 40 \\
& z-6x_1-5x_2 = 0 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

※目的関数を制約へ

準備 : シンプレックス表（単体表）

基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項	増加限界
s_1	0	3	1	1	0	45	
s_2	0	1	2	0	1	40	
z	1	-6	-5	0	0	0	

初期の基底変数の決定

例題(続)

①
(z行に)負の数
⇒最適でない

基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項	増加限界
s_1	0	3	1	1	0	45	15
s_2	0	1	2	0	1	40	40
z	1	-6	-5	0	0	0	

② 負の中から新基底とする変数選択

増加限界 = 定数項 / 新基底の係数

③増加限界計算
最小値選択
※負数除く

④ピボット確定
→掃き出し

x_1	0	1	1/3	1/3	0	15	45
s_2	0	0	5/3	-1/3	1	25	15
z	1	0	-3	2	0	90	

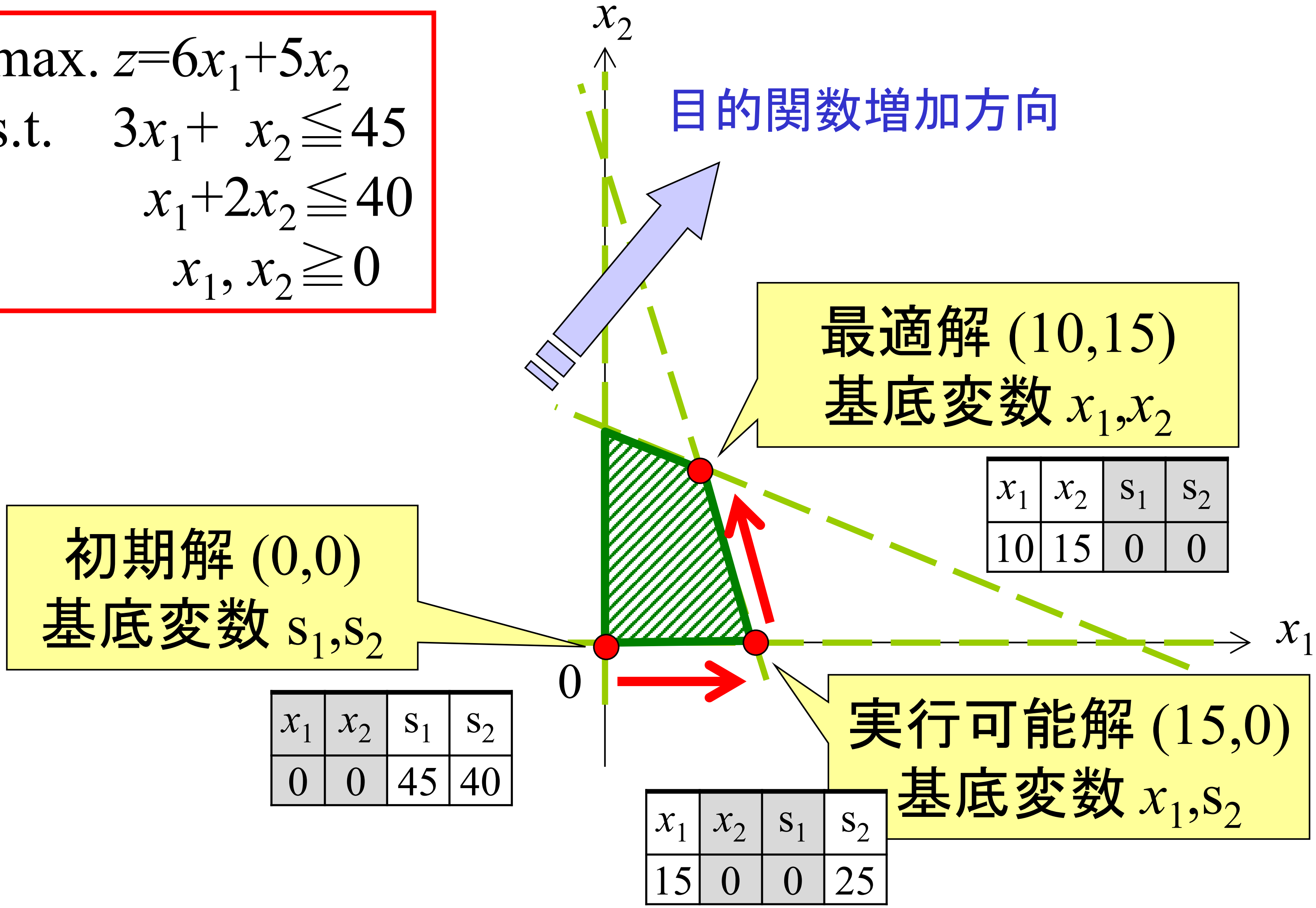
x_1	0	1	0	2/5	-1/5	10	
x_2	0	0	1	-1/5	3/5	15	
z	1	0	0	7/5	9/5	135	

最適

最適解 $(x_1, x_2) = (10, 15)$, 最適値 135

例題(続) シンプレクス法の動き

$$
\begin{aligned}
\text{max. } & z=6x_1+5x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1+\ x_2 \leqq 45 \\
& x_1+2x_2 \leqq 40 \\
& x_1,\ x_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$



x_1	x_2	s_1	s_2
0	0	45	40

x_1	x_2	s_1	s_2
15	0	0	25

x_1	x_2	s_1	s_2
10	15	0	0

実行中のトラブル

あれ？

シンプレクス法が無限ループに・・・

対処法は？

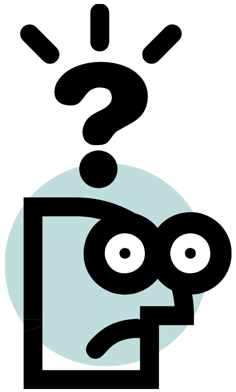
- 増加限界が0だ
- 目的関数値が増えない
- 初期解が見つからない

退化に出会った

初期解を探そう

シンプレクス法を開始できない・・・

探し方は？



退化のトラブル

準備 冗長な制約式の存在

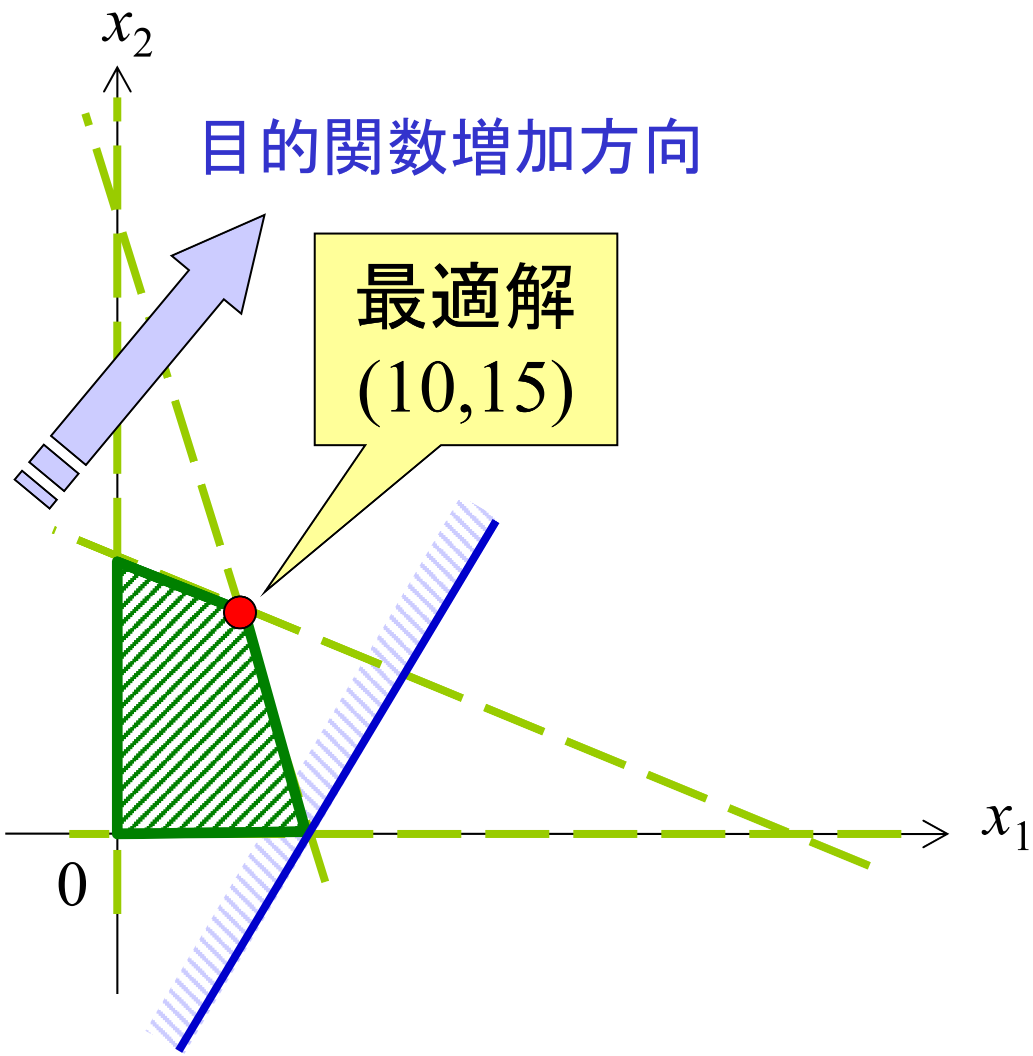
max. $z=6x_1+5x_2$

s.t. $3x_1+\ x_2 \leqq 45$

$x_1+2x_2 \leqq 40$

$3x_1-2x_2 \leqq 45$

$x_1, x_2 \geqq 0$



退化現象

$$\max.\ z=6x_1+5x_2$$
$$\text{s.t.}\quad 3x_1+x_2 \leqq 45$$
$$x_1+2x_2 \leqq 40$$
$$3x_1-2x_2 \leqq 45$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

標準形に変形

$$\max.\ z$$
$$\text{s.t.}\quad 3x_1+x_2+s_1=45$$
$$x_1+2x_2+s_2=40$$
$$3x_1-2x_2+s_3=45$$
$$z-6x_1-5x_2=0$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geqq 0$$

基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	定数項	増加限界
s_1	0	3	1	1	0	0	45	15
s_2	0	1	2	0	1	0	40	40
s_3	0	3	-2	0	0	1	45	15
z	1	-6	-5	0	0	0	0	
s_1	0	0	3	1	0	-1	0	0
s_2	0	0	8/3	0	1	-1/3	25	3/8
x_1	0	1	-2/3	0	0	1/3	15	-
z	1	0	-9	0	0	2	90	
x_2	0	0	1	1/3	0	-1/3	0	-
s_2	0	0	0	-8/9	1	9/5	25	125/9
x_1	0	1	0	2/9	0	9/5	15	75/9
z	1	0	0	3	0	-1	90	

基底変数の値が0⇔退化

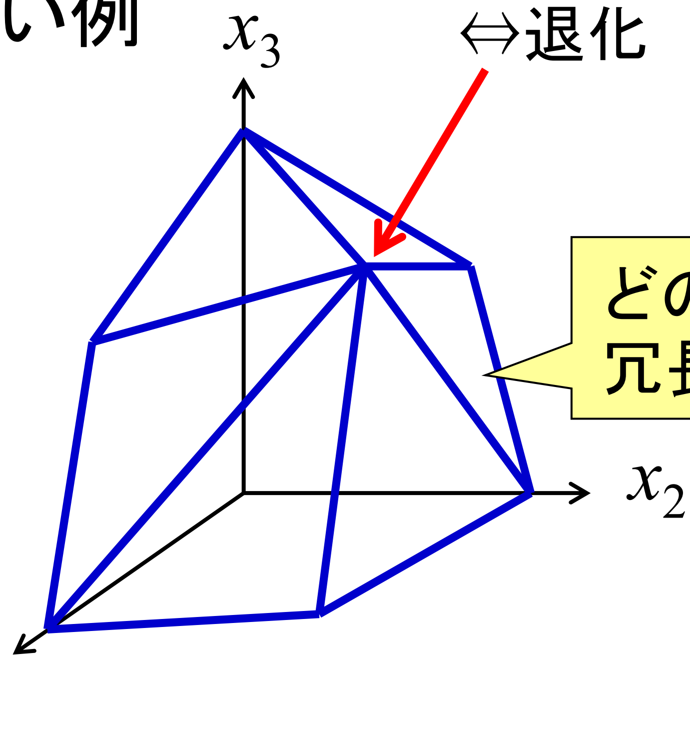
変化無し

退化のトラブル

不等式が1本消えても
端点の位置は不動
⇔退化

退化しているが冗長でない例

$$
\begin{aligned}
\text{max. } & z=\mathrm{f}(x_1, x_2, x_3) \\
\text{s.t. } & 2x_1 - x_2 \leqq 1 \\
& 2x_1 - x_3 \leqq 1 \\
& -x_1 + 2x_2 \leqq 1 \\
& 2x_2 - x_3 \leqq 1 \\
& -x_1 + 2x_3 \leqq 1 \\
& -x_2 + 2x_3 \leqq 1 \\
& x_1, x_2, x_3 \geqq 0
\end{aligned}
$$



どの制約も
冗長でない

退化の悪戯

→巡回する場合有
→解法が終わらない
(困った…)

巡回の回避法

※適用すると遅い

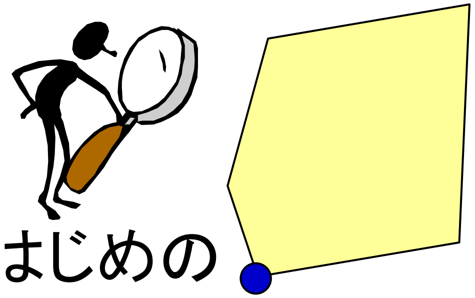
（最小添字規則；Blandの選択規則）

（準備）変数に順を付与
（規則）自由度有→順に選択

初期解が見つからないトラブル

初期解の見つけ方

- 原点が端点の場合⇒原点を初期解
- 原点が端点でないときは?



主な方法

- Big-M法（罰金法）
- 2段階シンプレクス法

アイディア

原点が端点になる問題を作ってしまえ

例

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\quad & z = x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 + x_2 = 8 \\
& -x_1 + x_2 \le 5 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

標準形 原点が端点でない

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\quad & z = x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 + x_2 = 8 \\
& -x_1 + x_2 + s_2 = 5 \\
& x_1, x_2, s_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

都合の良い変数を導入　人工変数

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\quad & z = x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 + x_2 + t_1 = 8 \\
& -x_1 + x_2 + s_2 = 5 \\
& x_1, x_2, s_2, t_1 \ge 0
\end{aligned}
$$

(1段階目)人工変数を消す問題を解く→(2段階目)原問題を解く

2段階シンプレクス法の概略

(1) 初期解が見つけやすいよう

人工変数の導入

人工変数

$$
\begin{aligned}
\max.\ & z = x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.}\ & 2x_1 + x_2 + t_1 = 8 \\
& -x_1 + x_2 + s_2 = 5 \\
& x_1, x_2, s_2, t_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

(2) 人工変数が0になるよう

人工問題を作る

※初期解発見容易

$$
\begin{aligned}
\max.\ & z = -t_1 \\
\text{s.t.}\ & 2x_1 + x_2 + t_1 = 8 \\
& -x_1 + x_2 + s_2 = 5 \\
& x_1, x_2, s_2, t_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

(3)解く

シンプレクス法で

（1段階目）

場合1：最適値が0

場合2：最適値が0でない

原問題は実行不能

→終了

Point!

原問題に可能解有

初期解に利用

シンプレクス法で

（2段階目）

(4)目的関数を元に戻して

原問題を解く

最適解・最適値を得る

例題 2段階シンプレクス法

$$
\begin{aligned}
\max.\ & z = x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.}\ & 2x_1 + x_2 = 8 \\
& -x_1 + x_2 + s_2 = 5 \\
& x_1, x_2, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

人工問題

$$
\begin{aligned}
\max.\ & z = -t_1 \\
\text{s.t.}\ & 2x_1 + x_2 + t_1 = 8 \\
& -x_1 + x_2 + s_2 = 5 \\
& x_1, x_2, s_2, t_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

（1段階目）

基底変数	z	x_1	x_2	s_2	t_1	定数	増加限界
	0	2	1	0	1	8	
	0	-1	1	1	0	5	
z	1	0	0	0	1	0	

基底変数の役割明確化

基底変数	z	x_1	x_2	s_2	t_1	定数	増加限界
t_1	0	2	1	0	1	8	
s_2	0	-1	1	1	0	5	
z	1	-2	-1	0	0	-8	

例題(続)

基底変数	z	x_1	x_2	s_2	t_1	定数	増加限界
t_1	0	2	1	0	1	8	4
s_2	0	-1	1	1	0	5	-5
z	1	-2	-1	0	0	-8	

t_1=0が最適解

基底変数	z	x_1	x_2	s_2	t_1	定数	増加限界
x_1	0	1	1/2	0	1/2	4	
s_2	0	0	3/2	1	1/2	9	
z	1	0	0	0	1	0	

人工問題の最適値は0

(2段階目)

原問題に可能解有

目的関数復活

基底変数	z	x_1	x_2	s_2		定数	増加限界
x_1	0	1	1/2	0		4	
s_2	0	0	3/2	1		9	
z	1	-1	-2	0		0	

基底変数の役割明確化

基底変数	z	x_1	x_2	s_2		定数	増加限界
x_1	0	1	1/2	0		4	
s_2	0	0	3/2	1		9	
z	1	0	-3/2	0		4	

例題(続)

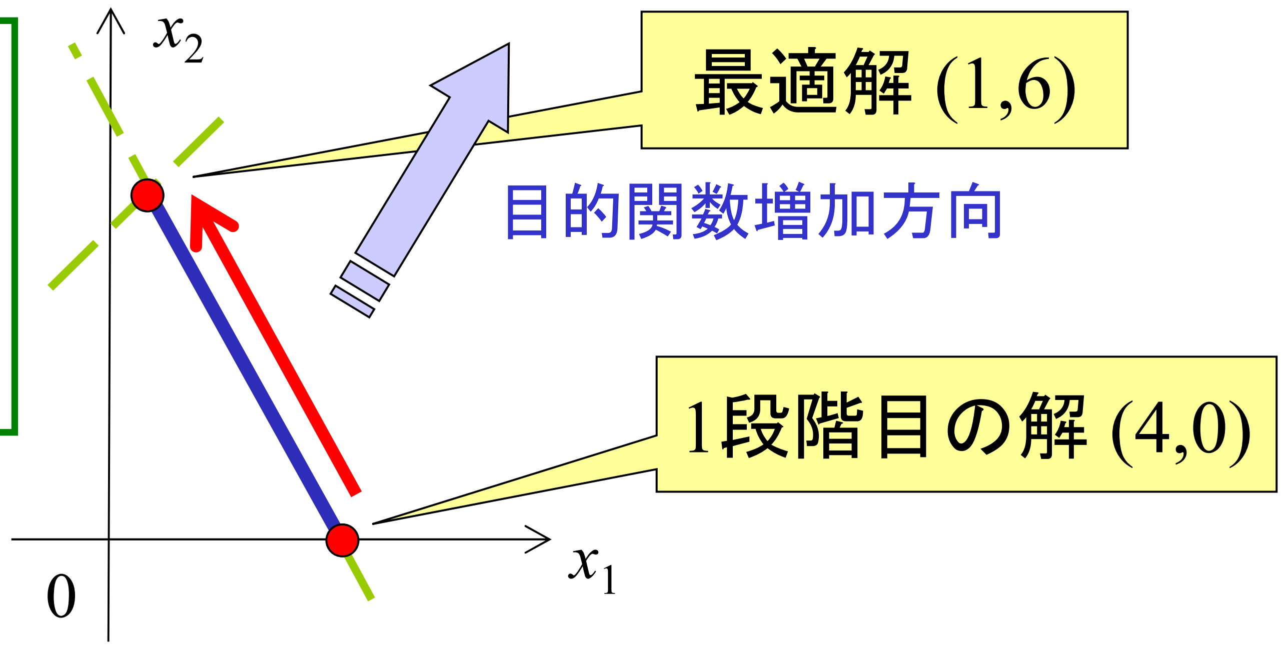
基底変数	z	x_1	x_2	s_2		定数	増加限界
x_1	0	1	1/2	0		4	8
s_2	0	0	3/2	1		9	6
z	1	0	-3/2	0		4	

基底変数	z	x_1	x_2	s_2		定数	増加限界
x_1	0	1	0	-1/3		1	
x_2	0	0	1	2/3		6	
z	1	0	0	1		13	

最適解 $x_1=1, x_2=6$

最適値　$z=13$

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\quad & z = x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 + x_2 = 8 \\
& -x_1 + x_2 \le 5 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



練習 2段階シンプレクス法

原点が
初期解にならない

問題

$$\begin{aligned}\text{min.}\quad & z = 12x_1 + 6x_2 + 10x_3 \\ \text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10 \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 20 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{aligned}$$

標準形

$$\begin{aligned}\text{max.}\quad & (-z) = -12x_1 - 6x_2 - 10x_3 \\ \text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 + 2x_3 - s_1 = 10 \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 - s_2 = 20 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0\end{aligned}$$

人工変数導入で
原点が初期解に

$$\begin{aligned}\text{max.}\quad & (-z) = -12x_1 - 6x_2 - 10x_3 \\ \text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 + 2x_3 - s_1 + t_1 = 10 \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 - s_2 + t_2 = 20 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, t_1, t_2 \geq 0\end{aligned}$$

[第1段階]

人工問題

導入した人工変数の
値が0になるはず！
の問題を解く

$$\begin{aligned}\text{max.}\quad & z = -t_1 - t_2 \\ \text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 + 2x_3 - s_1 + t_1 = 10 \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 - s_2 + t_2 = 20 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, t_1, t_2 \geq 0\end{aligned}$$

練習(続)

[第1段階]

$$\max.\ z = -t_1 - t_2$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - s_1 + t_1 &= 10 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - s_2 + t_2 &= 20 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, t_1, t_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

基底	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	t_1	t_2	定数	増限
?	0	1	1	2	-1	0	1	0	10	
?	0	3	1	1	0	-1	0	1	20	
z	1	0	0	0	0	0	1	1	0	

[準備]基底の明確化

基底	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	t_1	t_2	定数	増限
t_1	0	1	1	2	-1	0	1	0	10	
t_2	0	3	1	1	0	-1	0	1	20	
z	1	-4	-2	-3	1	1	0	0	-30	

ピボット選択＋掃き出し

基底	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	t_1	t_2	定数	増限
t_1	0	0	2/3	5/3	-1	1/3	1	-1/3	10/3	
x_1	0	1	1/3	1/3	0	-1/3	0	1/3	20/3	
z	1	0	-2/3	-5/3	1	-1/3	0	4/3	-10/3	

ピボット選択＋掃き出し

基底	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	t_1	t_2	定数	増限
x_3	0	0	2/5	1	-3/5	1/5	3/5	-1/5	2	
x_1	0	1	1/5	0	1/5	-2/5	-1/5	2/5	6	
z	1	0	0	0	0	0	1	1	0	

[第1段階]最適値＝0

人工問題の最適値は0 ⇒ 原問題に可能解有 [第2段階]へ

練習(続) 原問題 [第2段階]

$$\begin{aligned}
\text{max.}\quad & (-z) = -12x_1 - 6x_2 - 10x_3 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 + 2x_3 - s_1 = 10 \\
& 3x_1 + x_2 + x_3 - s_2 = 20 \\
& x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}$$

[準備]人工変数消去＋目的復活

基底	(-z)	x_1	$x2$	x_3	s_1	s_2	定数
x_3	0	0	2/5	1	-3/5	1/5	2
x_1	0	1	1/5	0	1/5	-2/5	6
(-z)	1	12	6	10	0	0	0

[準備]基底の明確化

基底	(-z)	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	定数
x_3	0	0	2/5	1	-3/5	1/5	2
x_1	0	1	1/5	0	1/5	-2/5	6
(-z)	1	0	-2/5	0	18/5	14/5	-92

ピボット選択＋掃き出し

基底	(-z)	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	定数
x_2	0	0	1	5/2	-3/2	1/2	5
x_1	0	1	0	-1/2	1/2	-1/2	5
(-z)	1	0	0	0	1	3	-90

[第2段階]最適解ゲット！

最適解(x_1,x_2,x_3)=(5,5,0)

最適値 90

※(-z)=-90より

$$\begin{aligned}
\text{min.}\quad & z = 12x_1 + 6x_2 + 10x_3 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10 \\
& 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 20 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

ワーク

(1)2段階シンプレクス法で解こう
(2)実行可能領域を図示し，解法の動きを描け．

$$\begin{aligned} \text{max.}\quad & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.}\quad & x_1 - x_2 \geq 2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

標準形

$$\begin{aligned} \text{max.}\quad & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.}\quad & x_1 - x_2 - s_1 = 2 \\ & 2x_1 + x_2 + s_2 = 16 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

原点が
初期解にならない

$$\begin{aligned} \text{max.}\quad & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.}\quad & x_1 - x_2 - s_1 + t_1 = 2 \\ & 2x_1 + x_2 + s_2 = 16 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, t_1 \geq 0 \end{aligned}$$

人工変数導入で
原点が初期解に

[第1段階]

人工問題

$$\begin{aligned} \text{max.}\quad & z = -t_1 \\ \text{s.t.}\quad & x_1 - x_2 - s_1 + t_1 = 2 \\ & 2x_1 + x_2 + s_2 = 16 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, t_1 \geq 0 \end{aligned}$$

導入した人工変数の
値が0になるはず！
の問題を解く

続きは
自分で

演習6　2段階シンプレクス法を用い解を導け

ある人が成人病予防にビタミンAを少なくとも4千国際単位（千IU），ビタミンB1を少なくとも 6 mgずつ毎日摂取するように医者から命じられた．

その人が身近で購入できる薬品P（1gあたり500円）と薬品Q（1gあたり600円)の2種類がある．

- 薬品Pには，1gにつきビタミンAが2千IU，ビタミンB1が2mg含まれている
- 薬品Qには，1gにつきビタミンAが1千IU，ビタミンB1が3mg含まれている

最低費用で必要量を摂取したい．薬品Pと薬品Qを毎日何グラムずつ取る？

解答

P: ____g, Q:____ g
費用:__________ 円

③問題設定で再表現

最適解 x_1=___, x_2 = ____, 最適値 z= ____.

【変数の設定】　① 定式化

薬品P：x1(g)，　薬品Q：x2(g)

$$
\begin{aligned}
\text{min. } & z=500x_1+600x_2 \\
\text{s.t. } & 2x_1+\ x_2 \geq 4 \\
& 2x_1+3x_2 \geq 6 \\
& x_1, x_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

② 解の導出

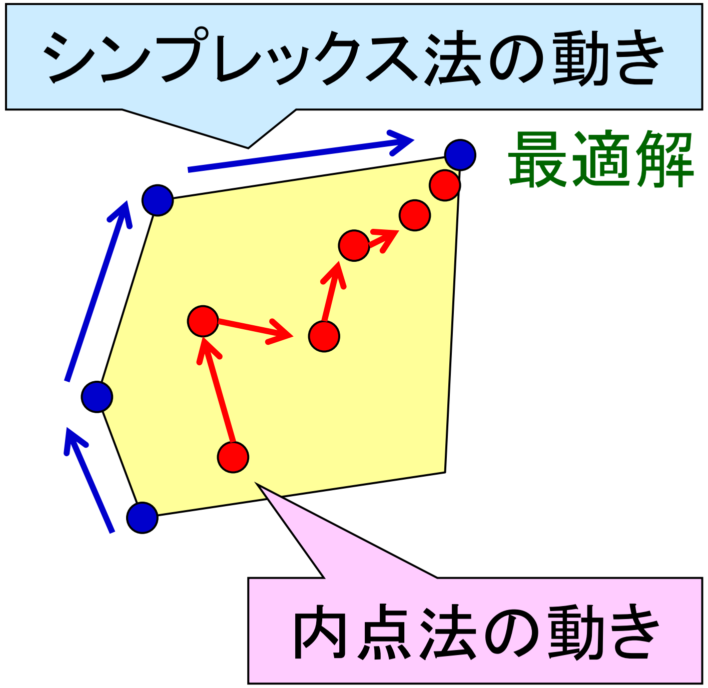
線形計画問題の計算量

- (巡回回避版)シンプレックス法：有限終了
  - 指数時間を要す問題例有⇔多項式時間解法でない!
  - 実際には，高速に解を求める
- 線形計画問題はクラスP?
  - (答)YES!
  - 1979年 Khachiyan 楕円体法
  - 1984年 Karmarkar 内点法

Pかは
未解決

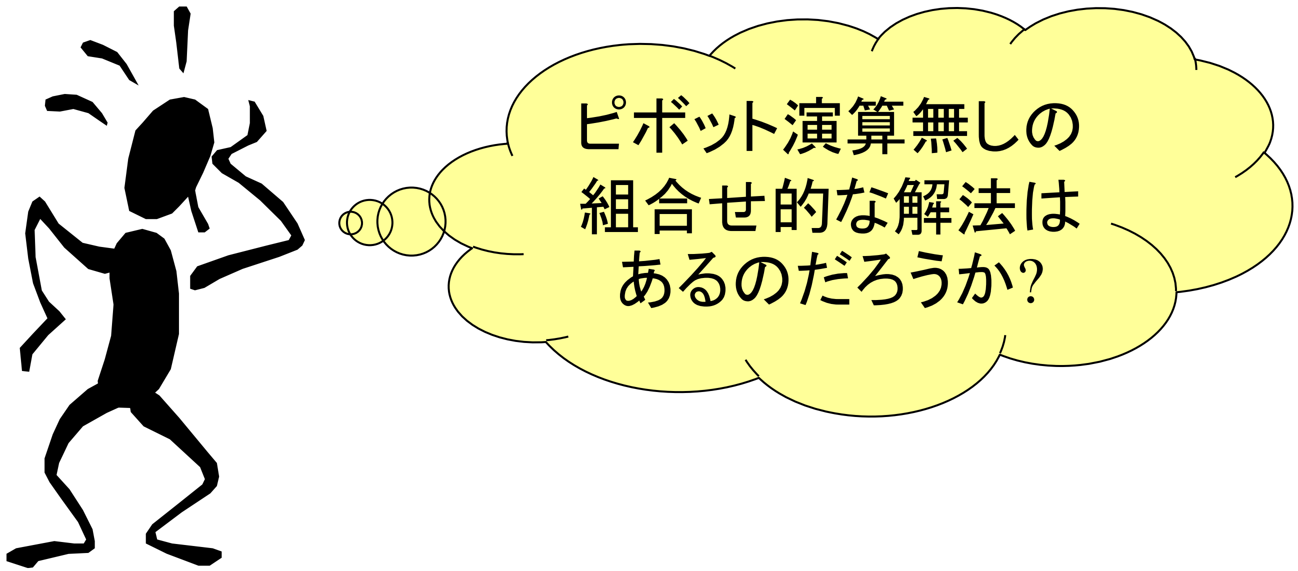
非実用的

現在の
双壁



LPは組合せ最適化問題?

- LPの最適解を求める
  ⇔最適な基底変数の組を見つける
  ⇔組合せの問題＝組合せ最適化問題



シンプレクス法の進化

改訂シンプレクス法 revised simplex method

- 計算速度の高速化
- メモリー節約
- 反復による計算誤差回避

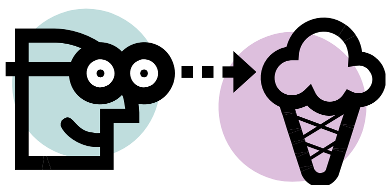
他にも，双対シンプレクス法等様々存在

⇒ 線形計画問題に対する解法の進化が
数理計画全体に影響を与え続けている

まとめ

線形計画問題はシンプレクス法で解ける

このあとは



シンプレクス法で得た最適解は
様々なおいしい情報も提供してくれる

線形計画問題の感度分析