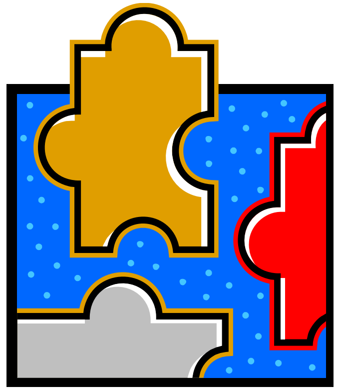


Mathematical Programming

数理モデル化とその表現

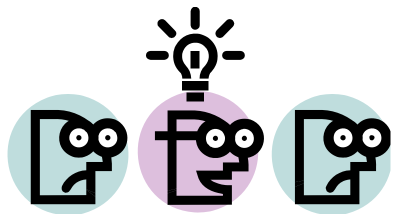
ここで学ぶこと

前半

- 数理計画とは
- システム的アプローチによる問題解決

後半

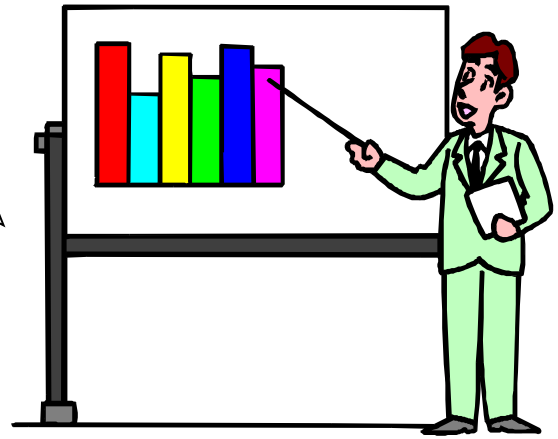
- 数理モデル化と表現方法（定式化）
- 数理計画問題の用語と分類



数理計画とは
Mathematical Programming

与えられた**制約式のもと**で,
ある**関数を最大化**する応用数学の問題
（最小化）

•数理計画＝数理計画問題
(－ problem)
•数理計画問題とそれを解く手法全般を「**数理計画法**」とよぶ.



数理計画とORの深い関係

Operations Research

数理計画（問題）

与えられた**制約式のもとで**，
ある**関数を最大**（**最小**）にする

比較

ORとは？

対象を数学的にモデル化し
有用な解決策を導く方法

ORの例：経営の問題

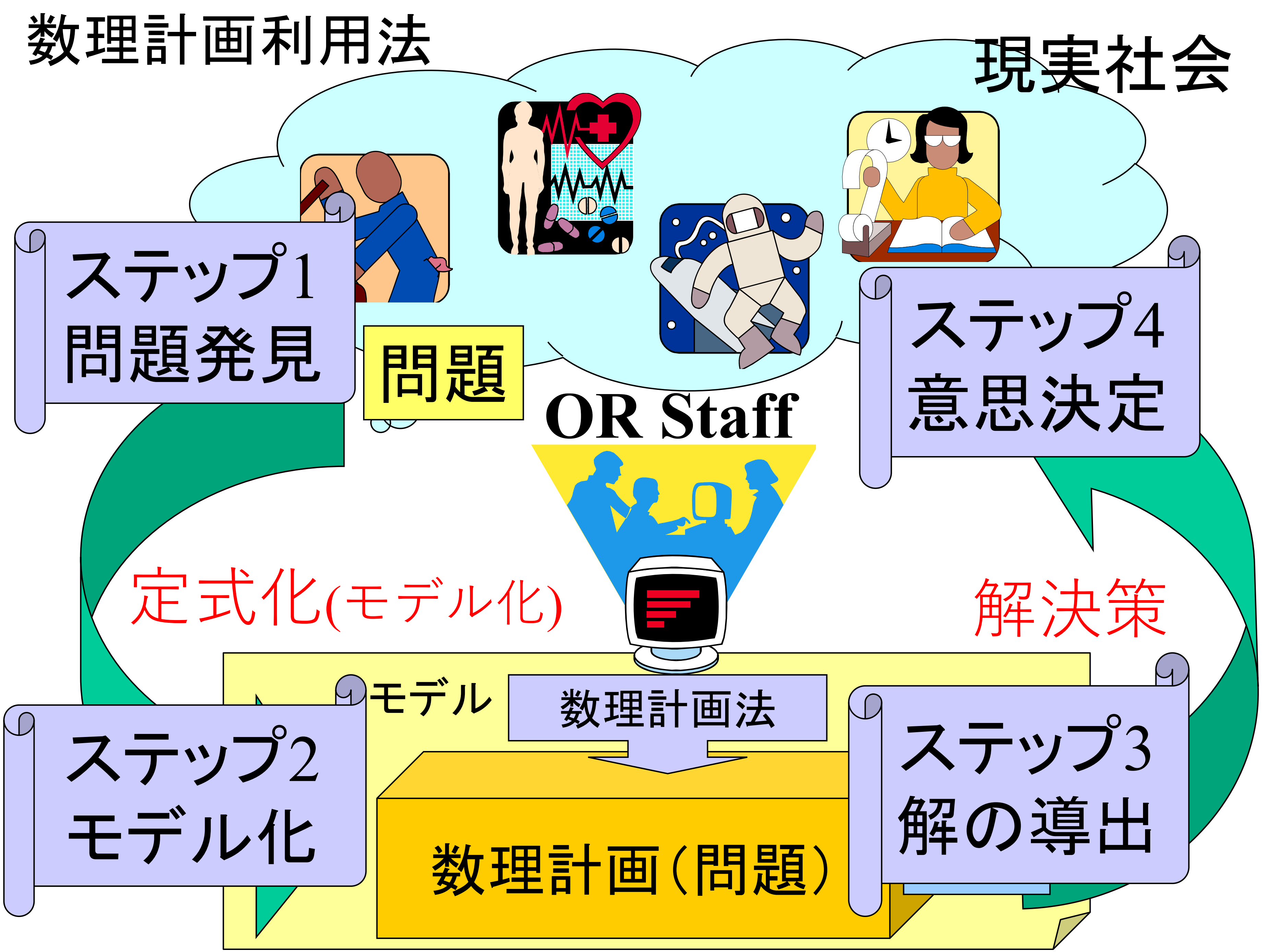
与えられた**資源内**で
利益を最大（**費用・リスクを最小**）にする

ORは解決策を
導く手法の宝庫

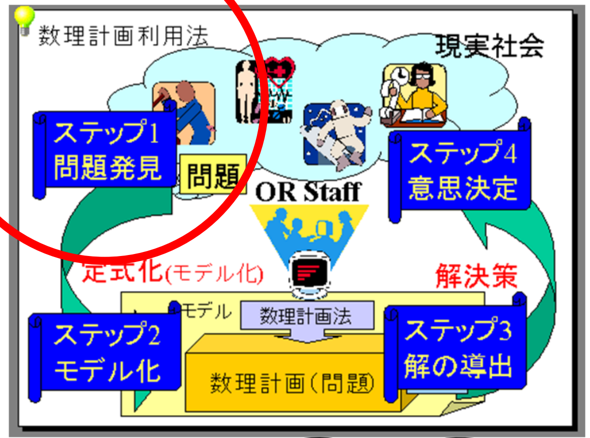
⇒数理計画は科学的な問題解決（OR）の中心的な技法として定着

ORの仕組み

現実社会
問題
OR Staff
定式化(モデル化)
解決策
モデル
実験
シミュレーション
観察結果
数理計画法
数理計画(問題)
最適解
その他の技法
解


数理計画利用法
現実社会
ステップ1
問題発見
問題
OR Staff
ステップ4
意思決定
定式化(モデル化)
解決策
モデル
数理計画法
ステップ2
モデル化
数理計画(問題)
ステップ3
解の導出

ステップ1　問題発見



何が問題？
因果関係は？

問題発見技法

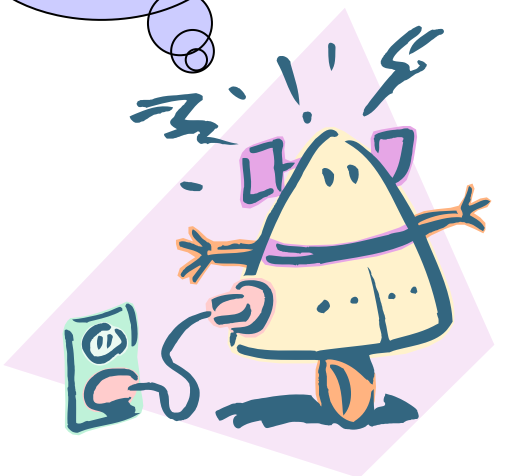
問題は与えられることも多いが，発見することも重要！

•ブレーンストーミング法

•KJ法 

•QC7つ道具，新QC7つ道具 など

Quality Control［品質管理］



問題の舞台を**システム**で把握

ステップ2
モデル化（定式化）

- 関係部分のみ抽出
- 抽出したシステムを抽象的な記号で表現

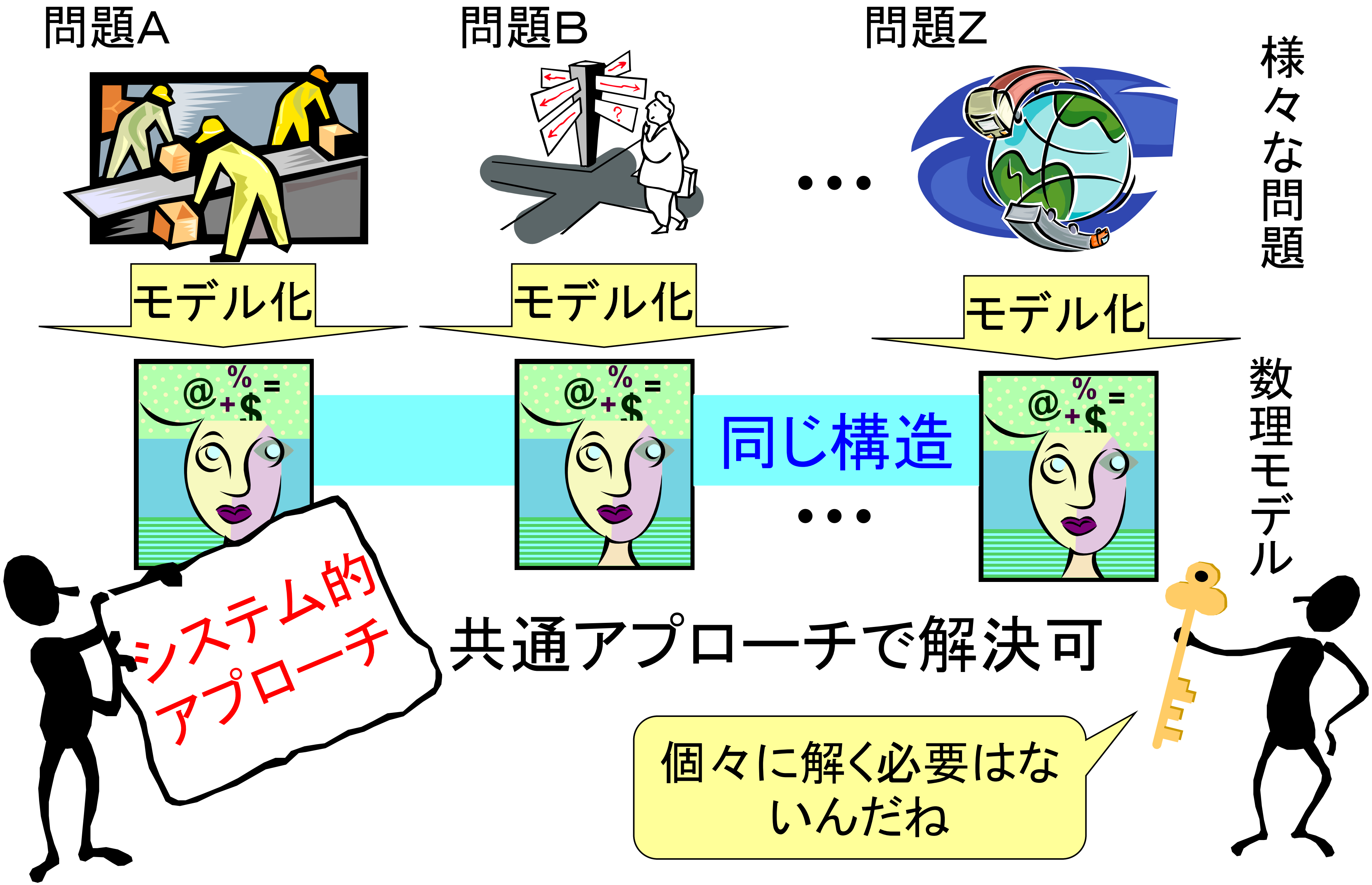
•尺度変換表現
•自然言語表現
•絵・図表現
•記号表現

数理モデル

現実の問題から離脱
↓
汎用性

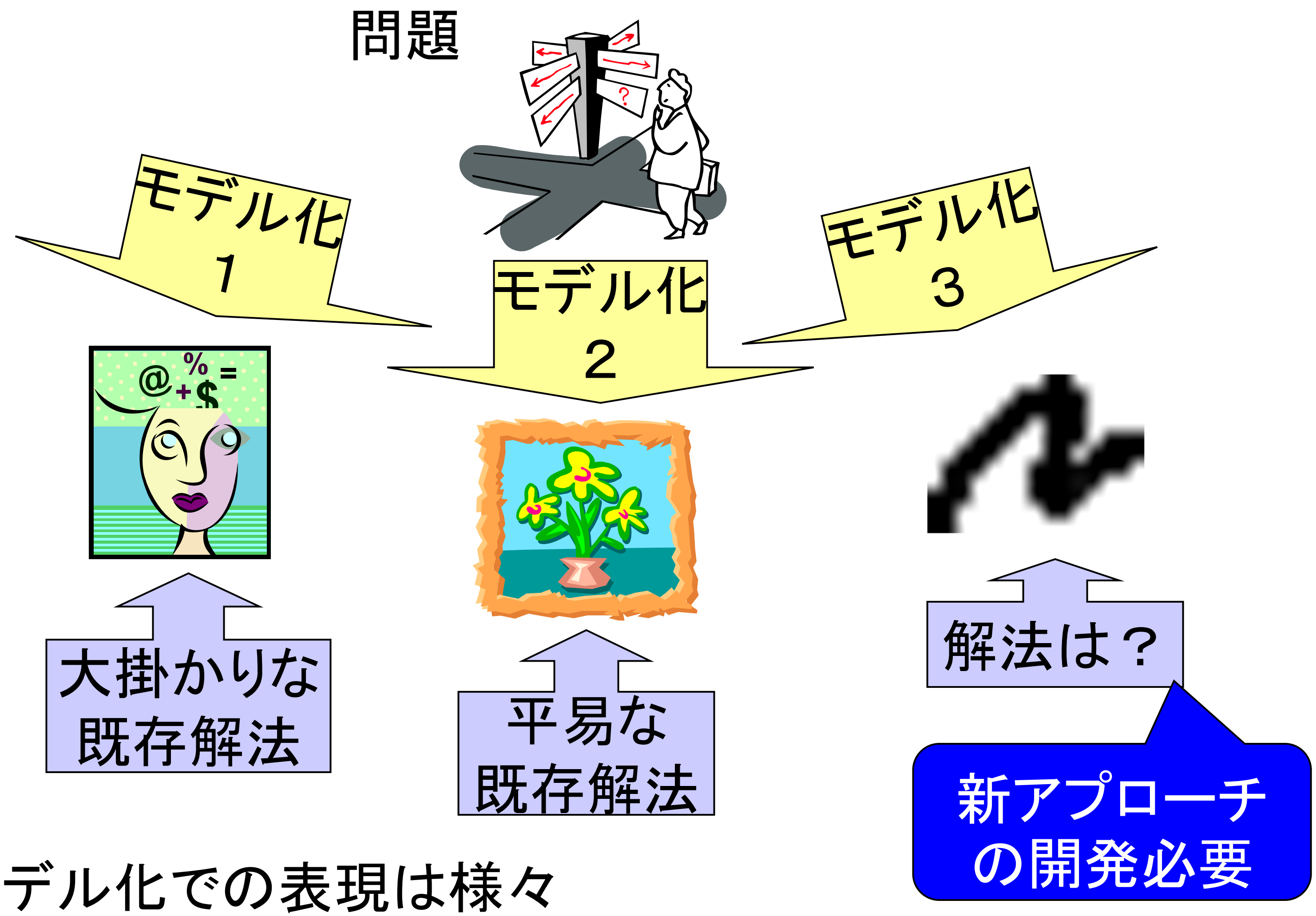
記号とシステムの対応を
忘れないように！

数理モデルは便利！



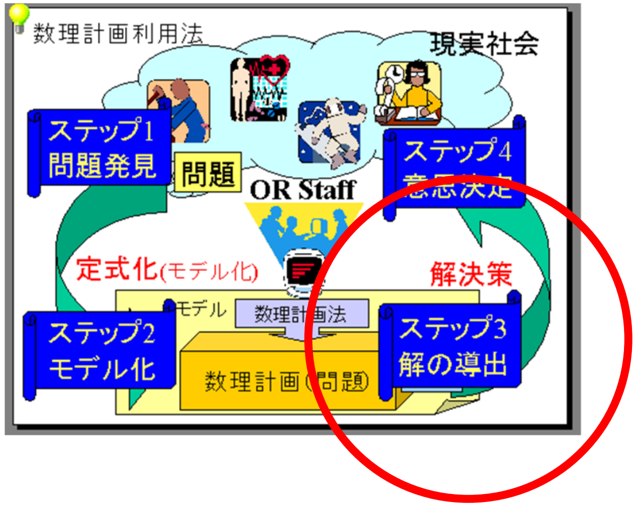
問題A
問題B
問題Z
…
様々な問題
モデル化
モデル化
モデル化
同じ構造
…
数理モデル
システム的アプローチ
共通アプローチで解決可
個々に解く必要はないんだね

モデル化は芸術



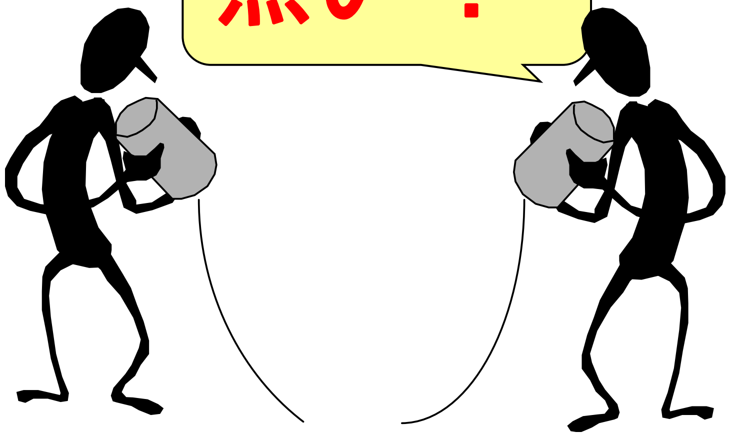
モデル化での表現は様々
⇒表現に応じて解き易い、解きにくい

ステップ3
最適解の導出



数理モデル化された
どんな問題でも解く
万能な方法を教えて

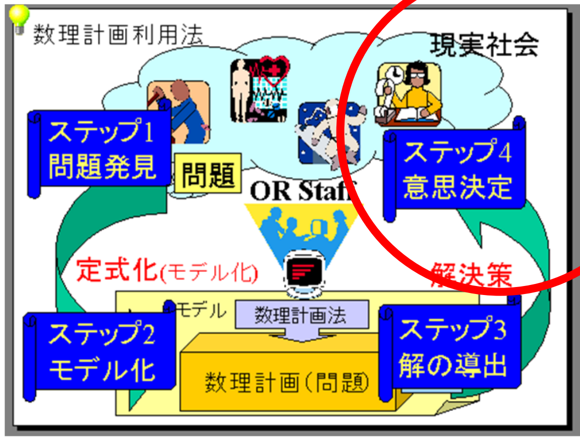
無い！



問題タイプ別の解法
- やさしい手法
- 難しい手法
- 手間のかかる手法
- 効率良い手法　等

数理計画法

ステップ4 意思決定



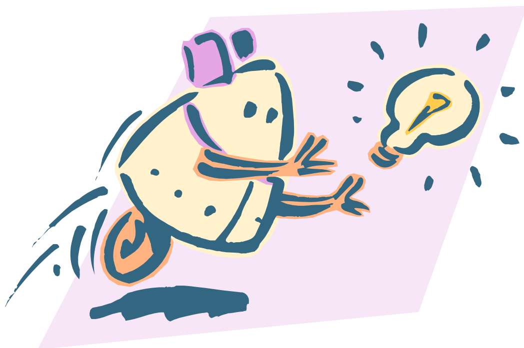
数理モデルの最適解

≠

問題解決の最良案

（∵ 元の問題⊇数理モデル）

ギャップがある
場合が多い

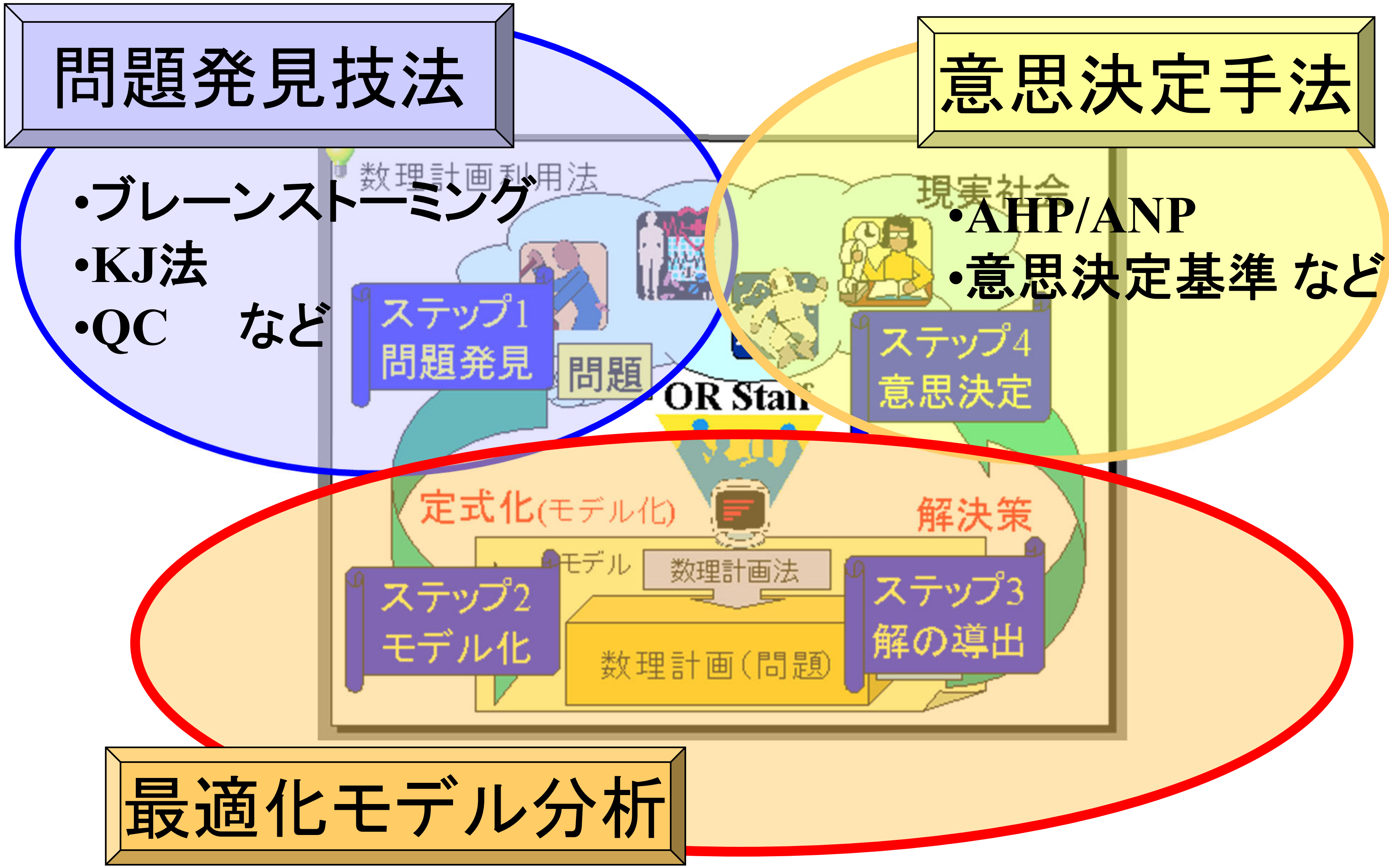


実際の解決策提案には
意思決定が必要

意思決定法

- AHP/ANP
- 意思決定基準 など

講義「最適化モデル分析」での守備範囲



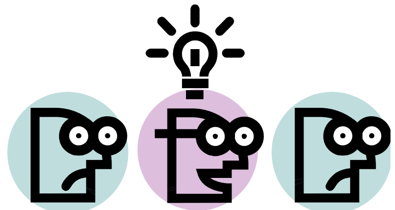
この先で学ぶこと

- 数理計画とは

学習済

- システム的アプローチによる問題解決

- 数理モデル化と表現方法（定式化）
- 数理計画問題の用語と分類



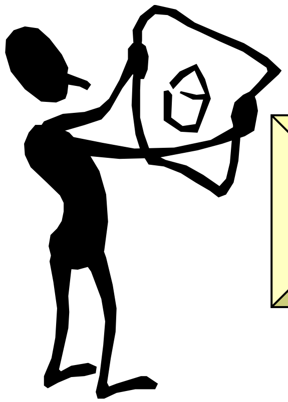
例題1　数式での表現

3種類の原液A,B,Cから,
2つの粉末製品P,Qを製造

	製品P 1(kg)	製品Q 1(kg)	使用可能量
原液A	15(kl)	11(kl)	1650(kl/日)
原液B	10(kl)	14(kl)	1400(kl/日)
原液C	9(kl)	20(kl)	1800(kl/日)
利益	5(万円)	4(万円)	

利益が最大になる製品P,Qの1日の生産量は？
問題を数理モデル化しなさい.

数理モデル作成　2つの段階



数理モデル化 → 定式化 formulation

問題理解 → **問題表現**

観察力･言語理解力

システムとしての把握

- 構成要素は？
  - コントロール可能な要素
  - コントロールできない要素
- 相互関係は？
- コントロール結果の評価方法は？

変数として表現
例：x_1, x_2

定数として表現

数式として表現
例：等式，不等式

関数として表現

例題1(続) 定式化してみよう

単位が重要

・コントロールできる要素 ⇒製品P,Qの生産量

変数で表現 → 製品Pの生産量: x_1(kg), 製品Qの生産量: x_2 (kg)

・コントロールの制約⇒原液A,B,Cの使用可能量

	製品P 1(kg)	製品Q 1(kg)	使用可能量
原液A	15(kl)	11(kl)	1650(kl/日)
原液B	10(kl)	14(kl)	1400(kl/日)
原液C	9(kl)	20(kl)	1800(kl/日)
利益	5(万円)	4(万円)	

不等式で表現 → $15x_1+11x_2 \leqq 1650$

不等式で表現

不等式で表現

練習

制約を書いてみよう

・コントロール結果の評価⇒利益

関数で表現 → 利益をzで表して

$z=5x_1+4x_2$

例題1(続) 定式化の書き方

目的関数　Objective function

最大化
(最小化の時はminimize)

maximize $z=5x_1+4x_2$
subject to $15x_1+11x_2 \leqq 1650$
$10x_1+14x_2 \leqq 1400$
$9x_1+20x_2 \leqq 1800$
$x_1 \geqq 0$
$x_2 \geqq 0$

又は制約条件式
subject to:〜の条件の下で

制約式　Constraints

省略表記

max.　$5x_1+4x_2$
s.t.　$15x_1+11x_2 \leqq 1650$
$10x_1+14x_2 \leqq 1400$
$9x_1+20x_2 \leqq 1800$
$x_1, x_2 \geqq 0$

目的関数の$z=$も
省略される時あり

練習 生産計画

- 2つの液体製品P,Qは機械A,Bを用いて加工される
- 利益が最大になる1週間の液体P,Qの加工量は？

	液体P 1ml	液体Q 1ml	使用可能時間
機械A	3(h)	1(h)	45(h/週)
機械B	1(h)	2(h)	40(h/週)
利益	6(万円)	5(万円)	

定式化してみよう

練習 解答例

練習を定式化

x_1(ml)：液体Pの加工量
x_2(ml)：液体Qの加工量

$$\begin{aligned}\text{max. } & z=6x_1+5x_2 \\ \text{s.t. } & 3x_1+x_2 \leqq 45 \\ & x_1+2x_2 \leqq 40 \\ & x_1, x_2 \geqq 0\end{aligned}$$

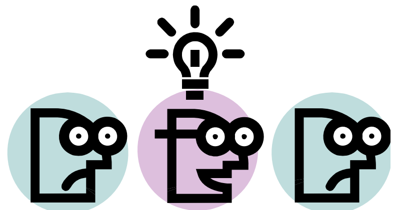
演習 ⇨

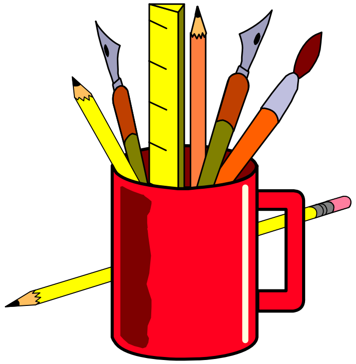
この先で学ぶこと

- 数理計画とは
  学習済
- システム的アプローチによる問題解決

↓

- 数理モデル化と表現方法（定式化）
  学習済
- **数理計画問題の用語と分類**





用語：実行可能解と最適解

optimal solution

最適解：最適値を達成する実行可能解

max. $z=5x_1+4x_2$

s.t. $15x_1+11x_2 \leqq 1650$

$10x_1+14x_2 \leqq 1400$

$9x_1+20x_2 \leqq 1800$

$x_1, x_2 \geqq 0$

最適値：目的関数の最大値

optimal value

feasible solution

実行可能解：制約式を満たす(x_1,x_2)

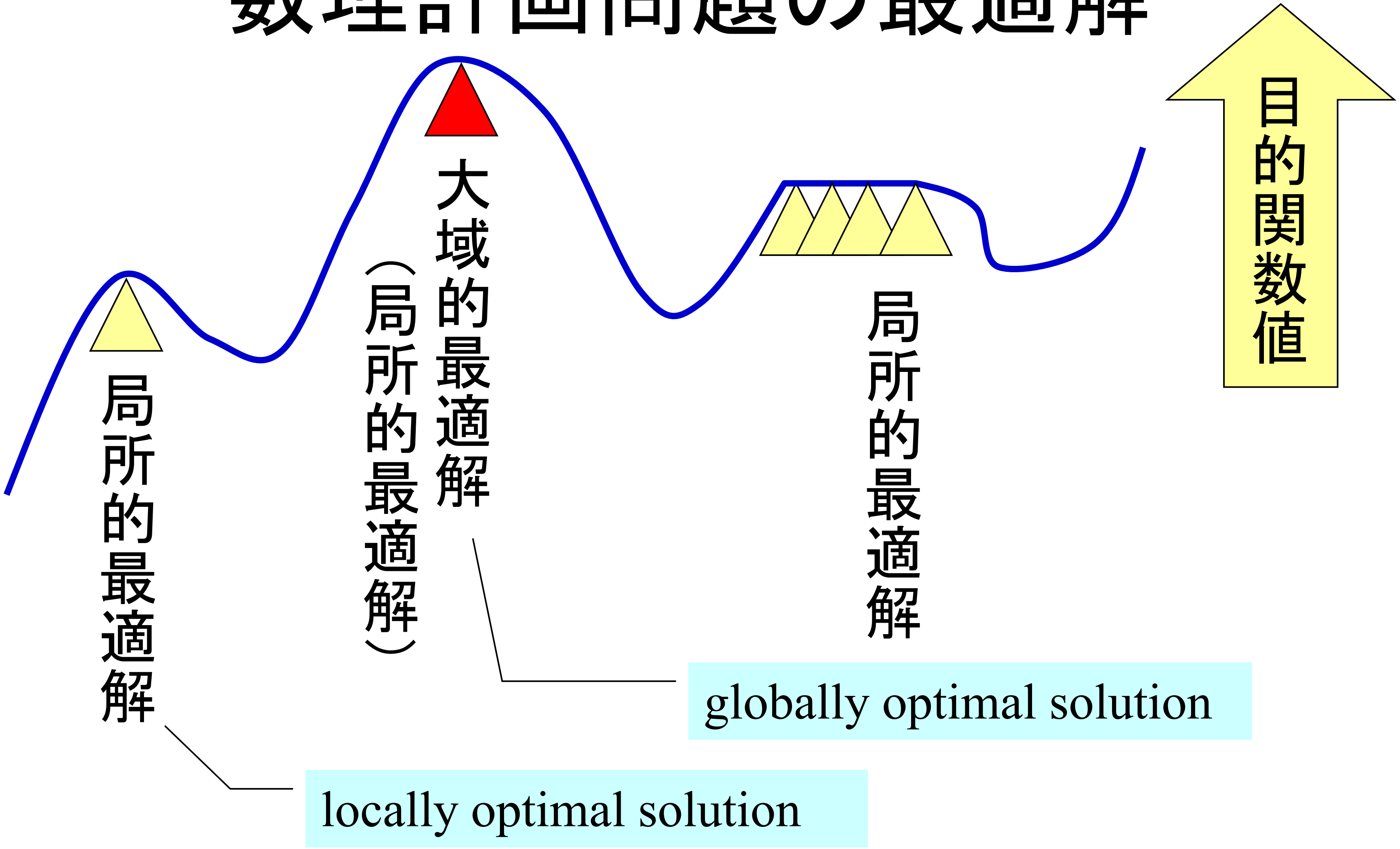
feasible region

実行可能領域：実行可能解の集合

※実行可能解が存在しない場合もある→実行不能な問題

※実行可能でも最適解が存在しない場合がある→例題2

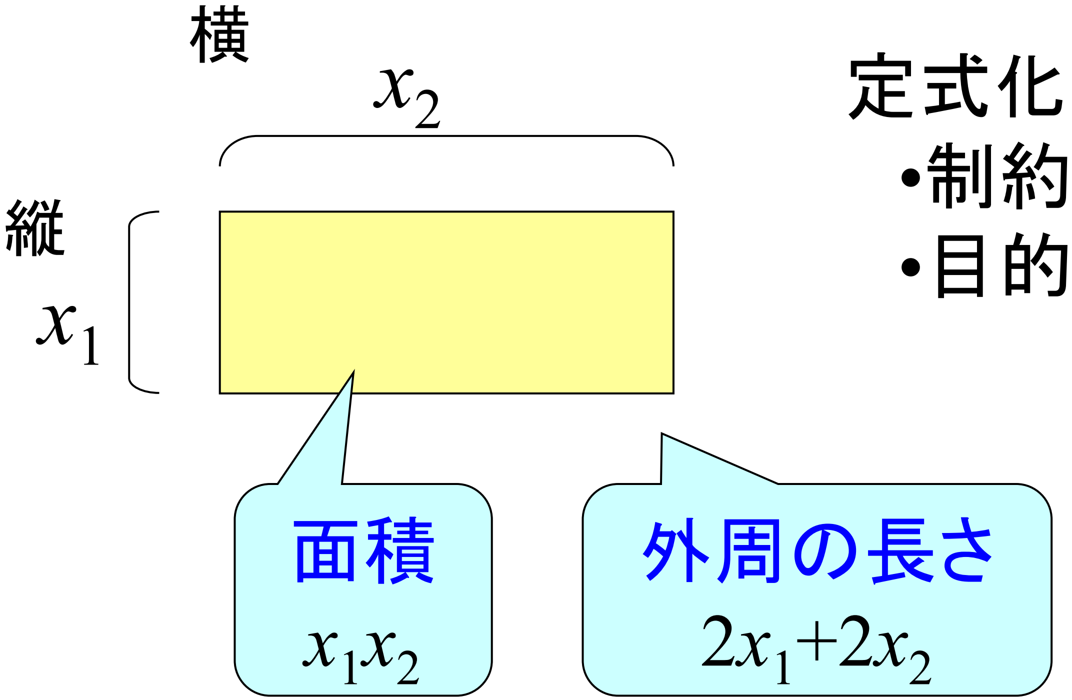
数理計画問題の最適解



※最適解が複数存在する場合もある→通常1つだけ求めればよい

例題2

面積が4以上で，外周の長さ最小の長方形は?



定式化してみよう
- 制約条件は?
- 目的関数は?

例題2 解答例

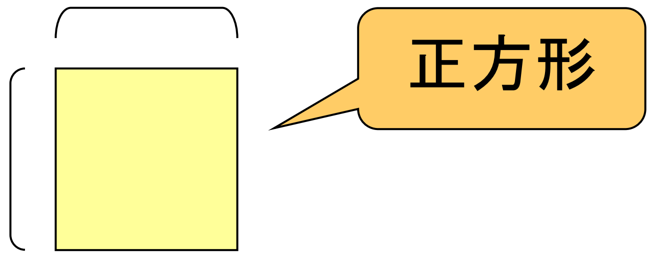
- 最適解は $x_1=2$, $x_2=2$
- 最適値は 8

$$\min.\ z=2x_1+2x_2$$
$$\text{s.t.}\quad x_1x_2 \geqq 4$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

⇒

横 $x_2=2$

縦 $x_1=2$



Q. 面積が4以上で縦の長さ最小の長方形は?

$$\min.\ z=x_1$$
$$\text{s.t.}\quad x_1x_2 \geqq 4$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

⇒ 限りなく0に近い値?

⇒最適解はない

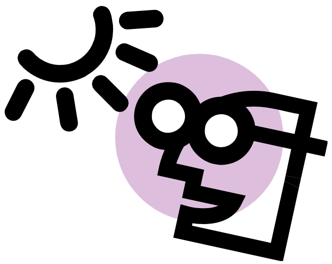
最適解が存在する･しない

実行可能領域が存在 ⟺ 実行可能領域が空

最適値は有限

最適解存在

複数存在
も有



最適解無し

例題2
後半の場合

最適値が発散

目的関数値を
いくらでも
大きくできる

最適解無し

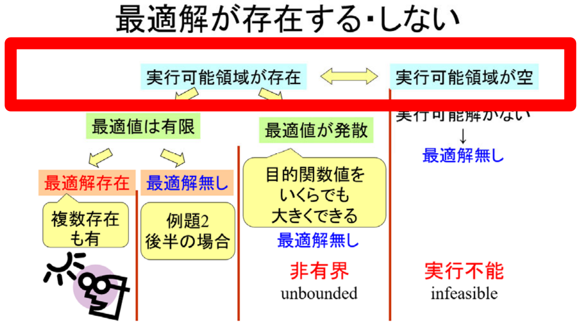
非有界
unbounded

実行可能解がない
↓
最適解無し

実行不能
infeasible

（参考）

実行可能解の存在判定



実行可能性問題 feasibility problem

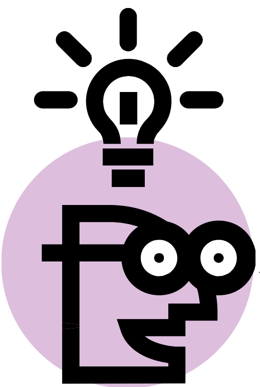
実行可能解が存在するのか**だけ**を判定したい問題

解法：いつでも値が0になる関数を目的関数にする

⇒実行可能解があれば，最適値は0

例

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\ & z = \mathbf{0}x_1 + \mathbf{0}x_2 \\
\text{s.t.}\ & 15x_1 + 11x_2 \leqq 1650 \\
& 10x_1 + 14x_2 \leqq 1400 \\
& 9x_1 + 20x_2 \leqq 1800 \\
& x_1, x_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

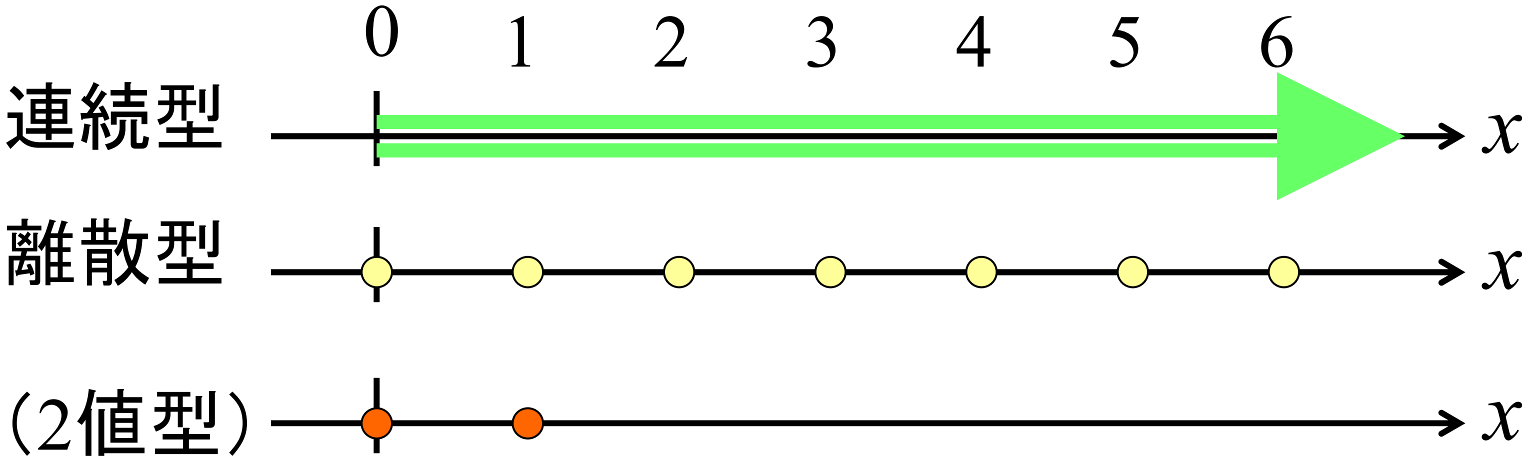


実行可能性の判定も最適化問題なんだ

定式化の分類法（変数に注目）

利用する変数が取れる値の型で分類

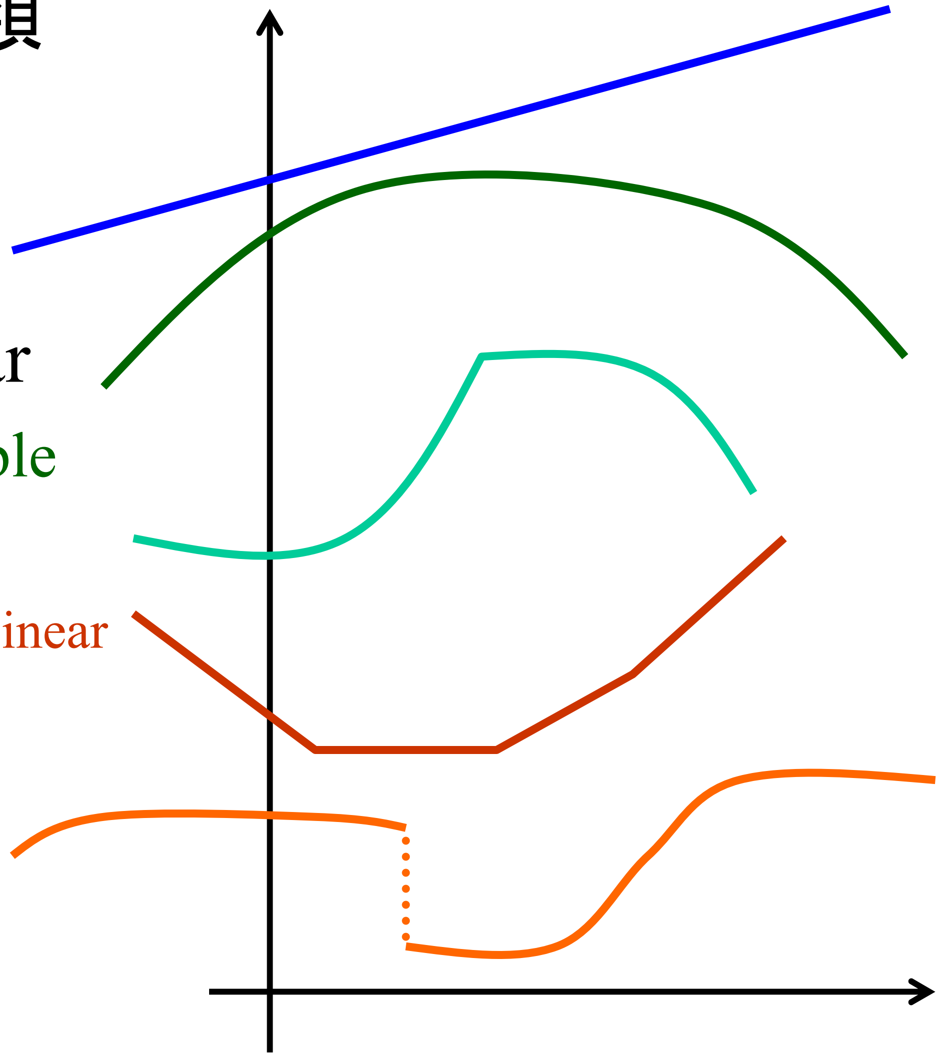
- 連続型 continuous ⇒ 例：実数 real
- 離散型 discrete ⇒ 例：整数 integer（整数計画）
  - 2値型 binary ⇒ 例：0または1（0-1整数計画）

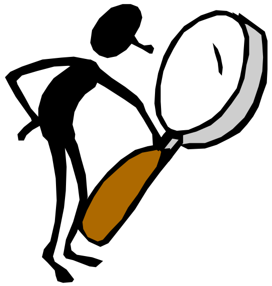


定式化の分類法（式に注目）

使用関数の種類で分類

- 連続関数
  - 線形関数 linear
  - 非線形関数 nonlinear
    - 微分可能 differentiable
    - 微分不能 non-
      - 区分線形 piecewise linear
- 非連続
- 凸関数 convex
- 凹関数 concave





分類後の主な問題名

変数型	目的関数	条件式	問題名	+Programming	略称
連続型	線形	線形	線形計画	Linear	LP
	2次関数	線形	2次計画	Quadratic	QP
	凸関数	凸関数	凸計画	Convex	CP
	非線形	非線形	非線形計画	Nonlinear	NLP
離散型	—	—	整数計画	Integer	IP
	凸	凸	離散凸計画	Discrete Convex	
2値型	—	—	0-1整数計画	Binary Integer	BIP
混合	—	—	混合整数計画	Mixed Integer	MIP

※ 凸計画の等式制約は線形

まとめ

- 数理計画とは
- システム的アプローチによる問題解決

- 数理モデル化と表現方法（定式化）
- 数理計画問題の用語と分類