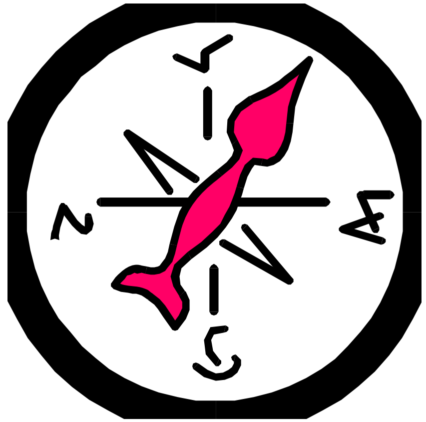
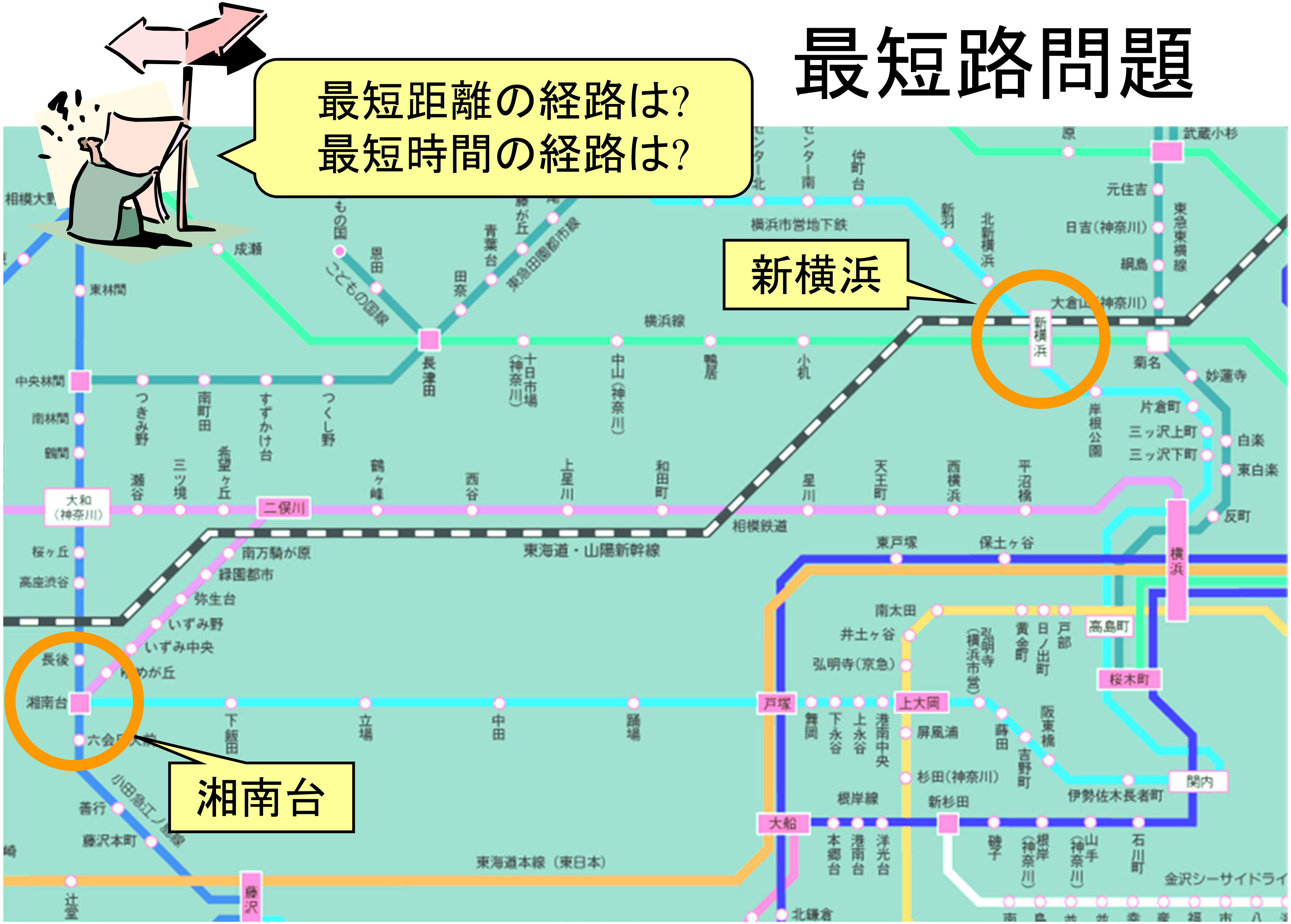


双対性の利活用

最短路問題を例として

最短路問題

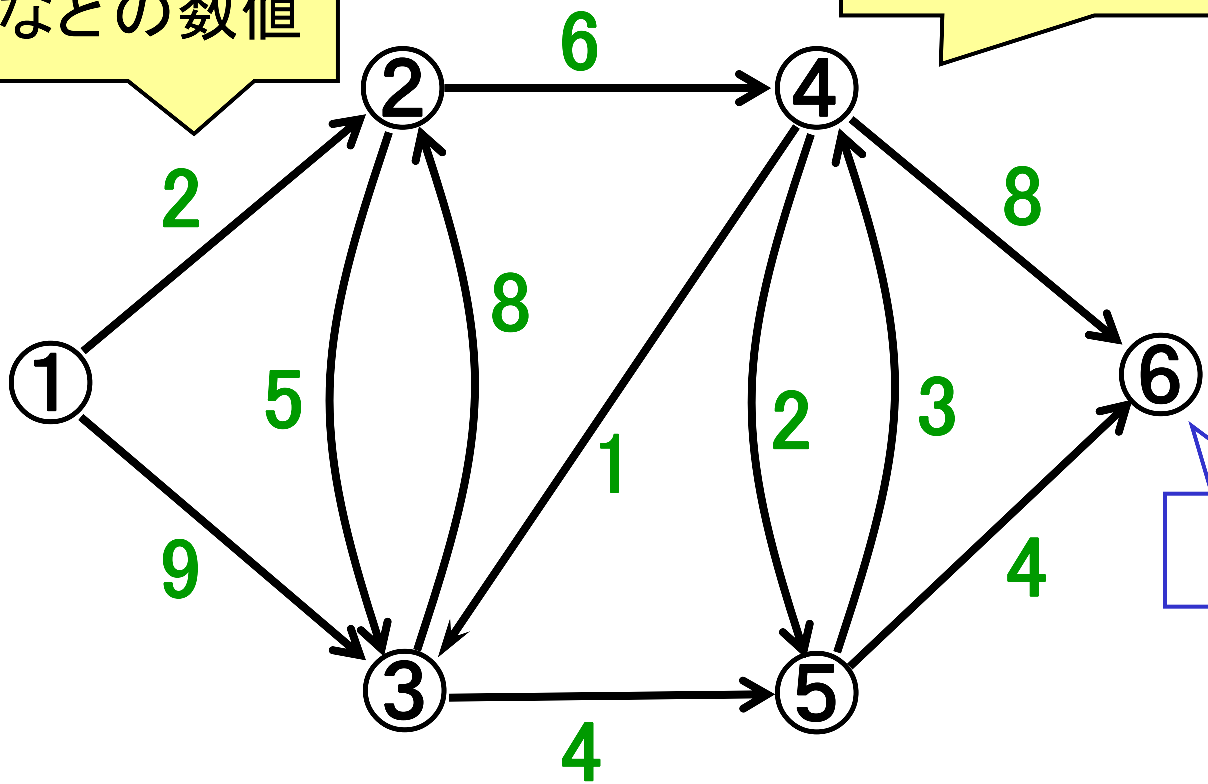
最短距離の経路は?
最短時間の経路は?



最短路問題のネットワーク表現

各枝に距離or
時間などの数値

問題の舞台を
（有向）グラフで表現



(例)

スタート

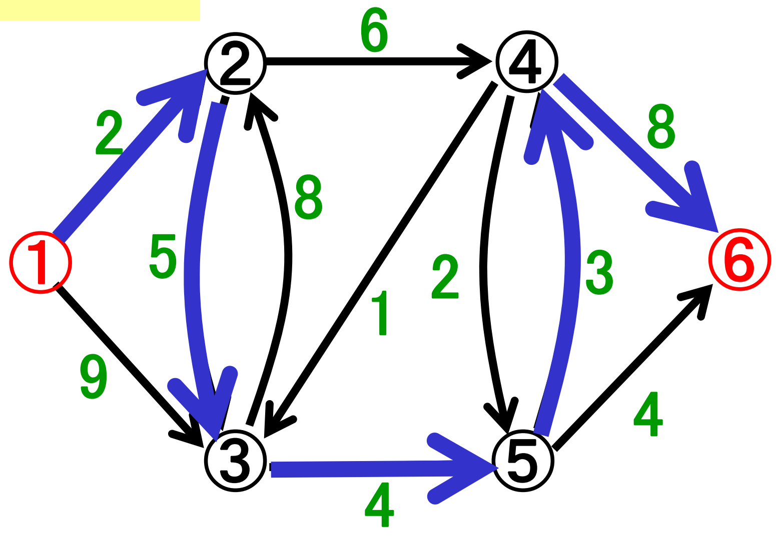
ゴール

スタートとゴールの点を指定

パス(経路)とその長さ

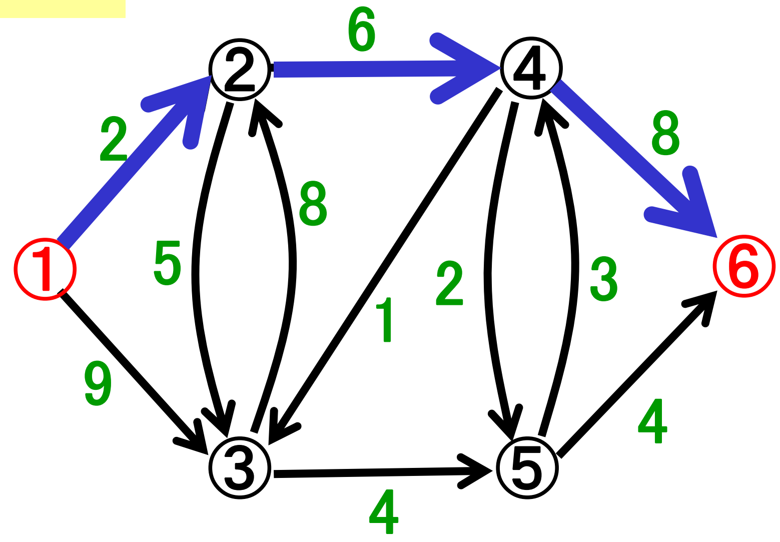
パス(経路):ある点とある点を結ぶ枝の列(向きに注意!)

パスA



パスの長さ:2+5+4+3+8=**22**

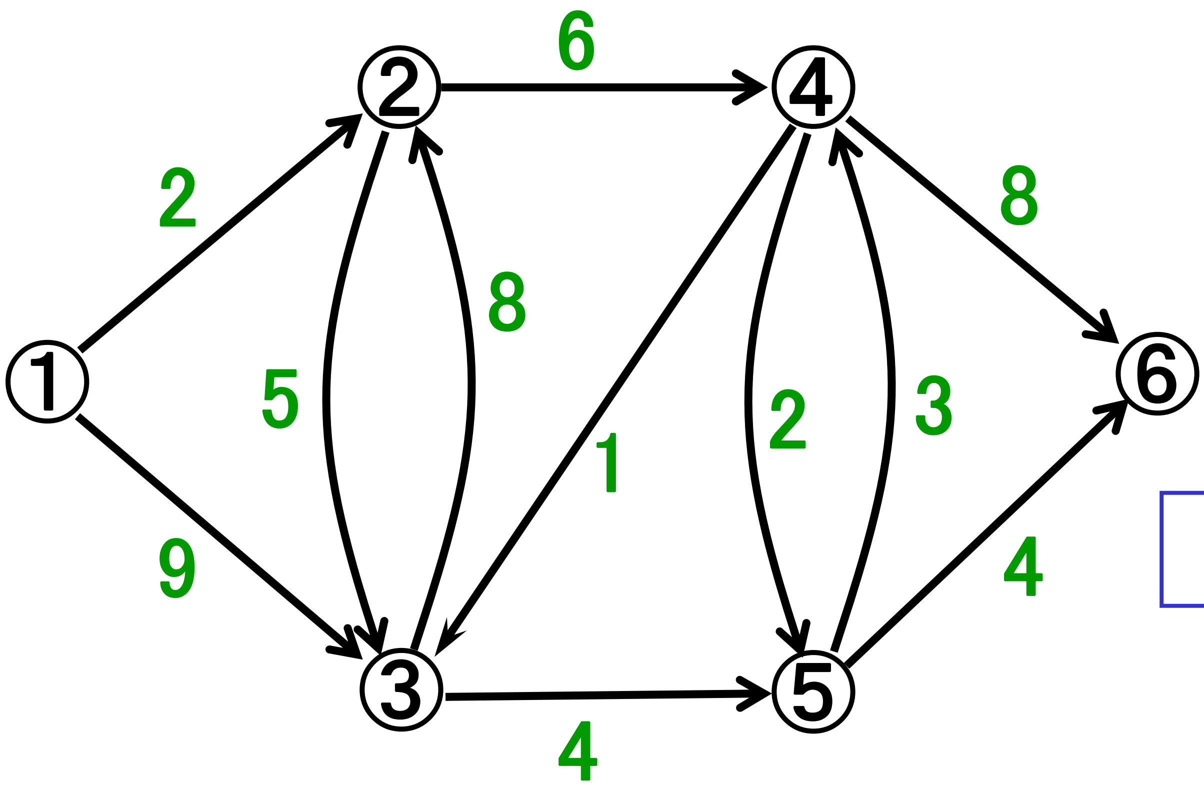
パスB



2+6+8=**16**

- スタートとゴールを結ぶパスは多数
- その中で長さが最短のパス＝最短路
- 最短路を見つける問題:最短路問題

例題1 最短路を求めよ



スタート

ゴール

最短路問題を定式化してみよう

例題1(続) 定式化の準備

決めたいこと　どの枝を通るか

↓

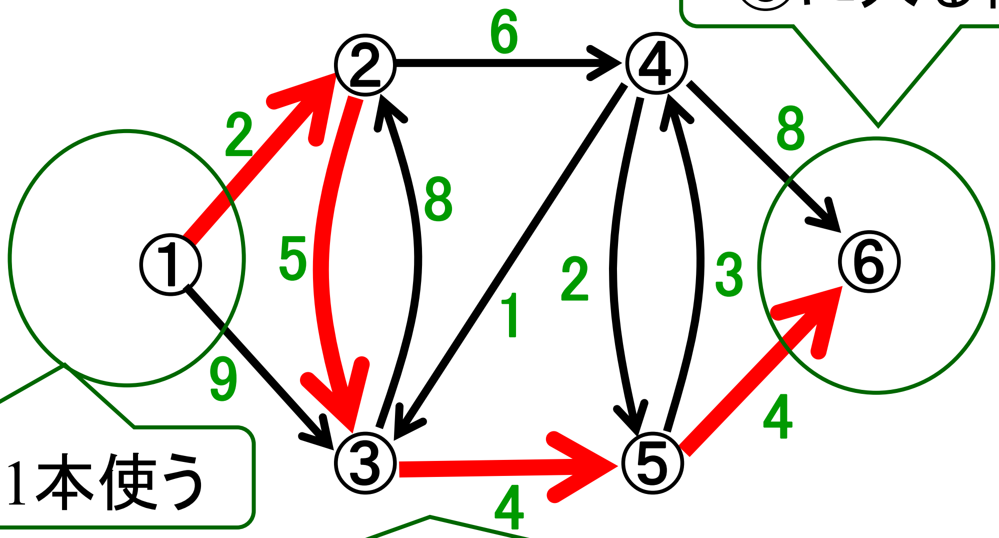
変数　$x_{ij} \in \{0,1\}$:枝(i,j)を通る$x_{ij}=1$; 通らない$x_{ij}=0$

経路の特徴　①→⑥を結ぶ枝の列

↓

制約

⑥に入る枝を1本使う



①から出る枝を1本使う

中間点:入枝が1本使用⇒出枝を1本使用

例題1(続) 最短路問題の定式化

$$\min.\ 2x_{12}+9x_{13}+5x_{23}+6x_{24}+8x_{32}+4x_{35}+x_{43}+2x_{45}+8x_{46}+3x_{54}+4x_{56}$$

$$\text{s.t.}\quad x_{12}+x_{13}=1$$

①から出る枝を1本使う

$$x_{12}+x_{32}=x_{23}+x_{24}$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{43}=x_{32}+x_{35}$$

$$x_{24}+x_{54}=x_{43}+x_{45}+x_{46}$$

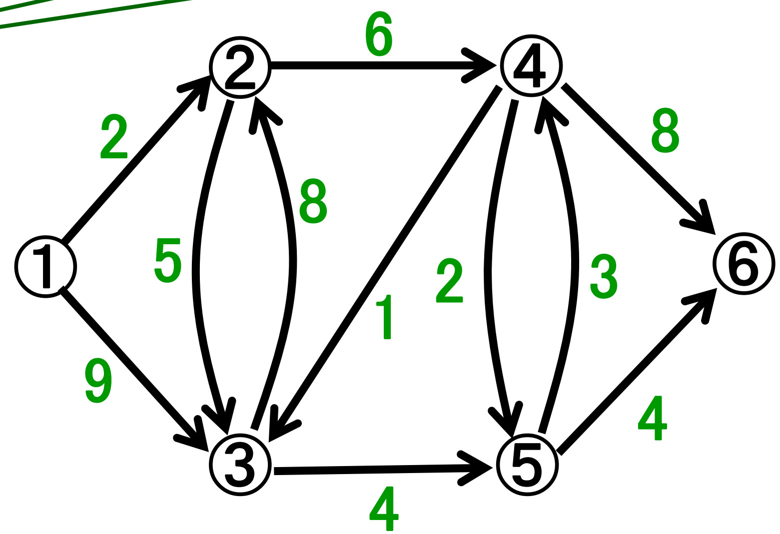
$$x_{35}+x_{45}=x_{54}+x_{56}$$

中間点 : 入枝が1本使用
⇒出枝を1本使用

$$x_{46}+x_{56}=1$$

⑥に入る枝を1本使う

全枝(i,j)に対して$x_{ij}\in\{0,1\}$



例題1(続) 数式表現の整理

最短路問題（IP）

$$
\begin{array}{lllllllllllll}
\min. & 2x_{12} & +9x_{13} & +5x_{23} & +6x_{24} & +8x_{32} & +4x_{35} & +x_{43} & +2x_{45} & +8x_{46} & +3x_{54} & +4x_{56} & \\
\text{s.t.} & -x_{12} & -x_{13} & & & & & & & & & & =-1 \\
 & +x_{12} & & -x_{23} & -x_{24} & +x_{32} & & & & & & & =0 \\
 & & +x_{13} & +x_{23} & & -x_{32} & -x_{35} & +x_{43} & & & & & =0 \\
 & & & & +x_{24} & & & -x_{43} & -x_{45} & -x_{46} & +x_{54} & & =0 \\
 & & & & & & +x_{35} & & +x_{45} & & -x_{54} & -x_{56} & =0 \\
 & & & & & & & & & +x_{46} & & +x_{56} & =1
\end{array}
$$

全枝(i,j)に対して $\cancel{x_{ij} \in \{0,1\}}$ 　 $x_{ij} \geqq 0$

LP緩和

線形計画問題(P)

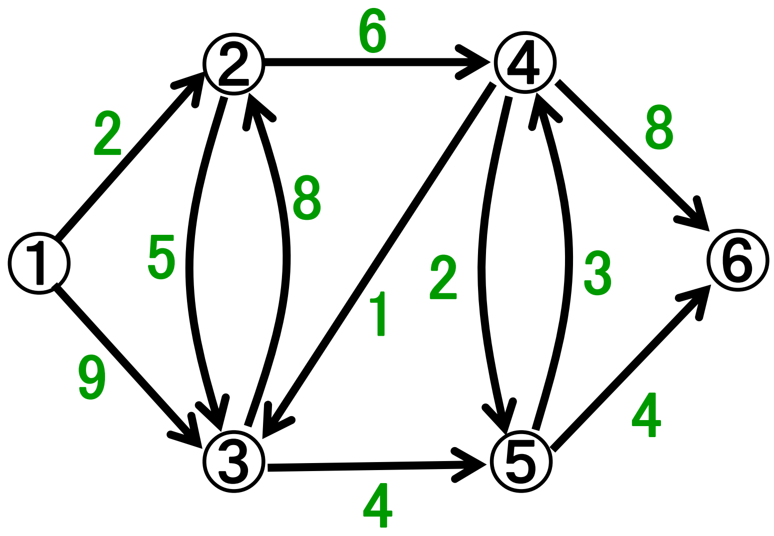
演習: (P)の双対問題を作ってみよう
相補性条件を導いてみよう

寄り道 ネットワークのデータ表現

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} a_{12} & a_{13} & a_{23} & a_{24} & a_{32} & a_{35} & a_{43} & a_{45} & a_{46} & a_{54} & a_{56} \end{matrix} \\
\begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③} \\ \text{④} \\ \text{⑤} \\ \text{⑥} \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

接続行列

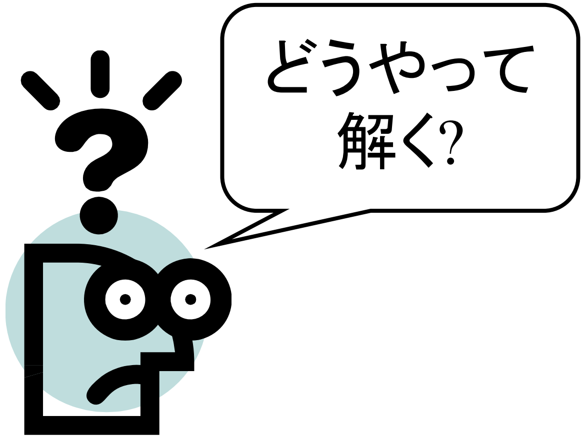
(incidence matrix)



双対問題(D)

双対変数:

$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$



$$
\begin{aligned}
\text{max.}\quad & -p_1 + p_6 \\
\text{s.t.}\quad & p_2 - p_1 \le 2 \\
& p_3 - p_1 \le 9 \\
& p_3 - p_2 \le 5 \\
& p_4 - p_2 \le 6 \\
& p_2 - p_3 \le 8 \\
& p_5 - p_3 \le 4 \\
& p_3 - p_4 \le 1 \\
& p_5 - p_4 \le 2 \\
& p_6 - p_4 \le 8 \\
& p_4 - p_5 \le 3 \\
& p_6 - p_5 \le 4
\end{aligned}
$$

仮定

$p_1 = 0$

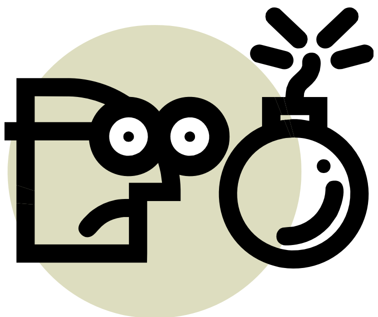
$$
\begin{aligned}
\text{max.}\quad & p_6 \\
\text{s.t.}\quad & p_2 \le p_1 + 2 \\
& p_3 \le p_1 + 9 \\
& p_3 \le p_2 + 5 \\
& p_4 \le p_2 + 6 \\
& p_2 \le p_3 + 8 \\
& p_5 \le p_3 + 4 \\
& p_3 \le p_4 + 1 \\
& p_5 \le p_4 + 2 \\
& p_6 \le p_4 + 8 \\
& p_4 \le p_5 + 3 \\
& p_6 \le p_5 + 4 \\
& p_1 = 0
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\max.\ & p_6 \\
\text{s.t.}\quad & p_2 \le p_1 + 2 \\
& p_3 \le p_1 + 9 \\
& p_3 \le p_2 + 5 \\
& p_4 \le p_2 + 6 \\
& p_2 \le p_3 + 8 \\
& p_5 \le p_3 + 4 \\
& p_3 \le p_4 + 1 \\
& p_5 \le p_4 + 2 \\
& p_6 \le p_4 + 8 \\
& p_4 \le p_5 + 3 \\
& p_6 \le p_5 + 4 \\
& p_1 = 0
\end{aligned}$$

(D)の解き方:アイディア

ベルマン方程式(Bellman's equation)

$$\begin{aligned}
& p_1 = 0 \\
& p_2 = \min\{p_1 + 2, p_3 + 8\} \\
& p_3 = \min\{p_1 + 9, p_2 + 5, p_4 + 1\} \\
& p_4 = \min\{p_2 + 6, p_5 + 3\} \\
& p_5 = \min\{p_3 + 4, p_4 + 2\} \\
& p_6 = \min\{p_4 + 8, p_5 + 4\}
\end{aligned}$$



この方程式って解けるの?

ベルマン方程式の解き方

無変化で終了

$p_1 = 0$

$$p_2 = \min\{p_1 + 2, p_3 + 8\}$$
$$p_3 = \min\{p_1 + 9, p_2 + 5, p_4 + 1\}$$
$$p_4 = \min\{p_2 + 6, p_5 + 3\}$$
$$p_5 = \min\{p_3 + 4, p_4 + 2\}$$
$$p_6 = \min\{p_4 + 8, p_5 + 4\}$$

	初期解	改定1	改定2	改定3	改定4	改定5	改定6
p_1	0	0	0	0	0	0	0
p_2	∞	2	2	2	2	2	2
p_3	∞	9	7	7	7	7	7
p_4	∞	∞	8	8	8	8	8
p_5	∞	∞	13	11	10	10	10
p_6	∞	∞	∞	16	15	14	14

(D)の最適解

動的計画法の利用
ベルマン-フォード法

計算量: O(mn)

n:点数
m:枝数

(D)の解⇒(P)の解

相補性条件

$$(2-p_2+p_1)x_{12}=0$$
$$(9-p_3+p_1)x_{13}=0$$
$$(5-p_3+p_2)x_{23}=0$$
$$(6-p_4+p_2)x_{24}=0$$
$$(8-p_2+p_3)x_{32}=0$$
$$(4-p_5+p_3)x_{35}=0$$
$$(1-p_3+p_4)x_{43}=0$$
$$(2-p_5+p_4)x_{45}=0$$
$$(8-p_6+p_4)x_{46}=0$$
$$(3-p_4+p_5)x_{54}=0$$
$$(4-p_6+p_5)x_{56}=0$$

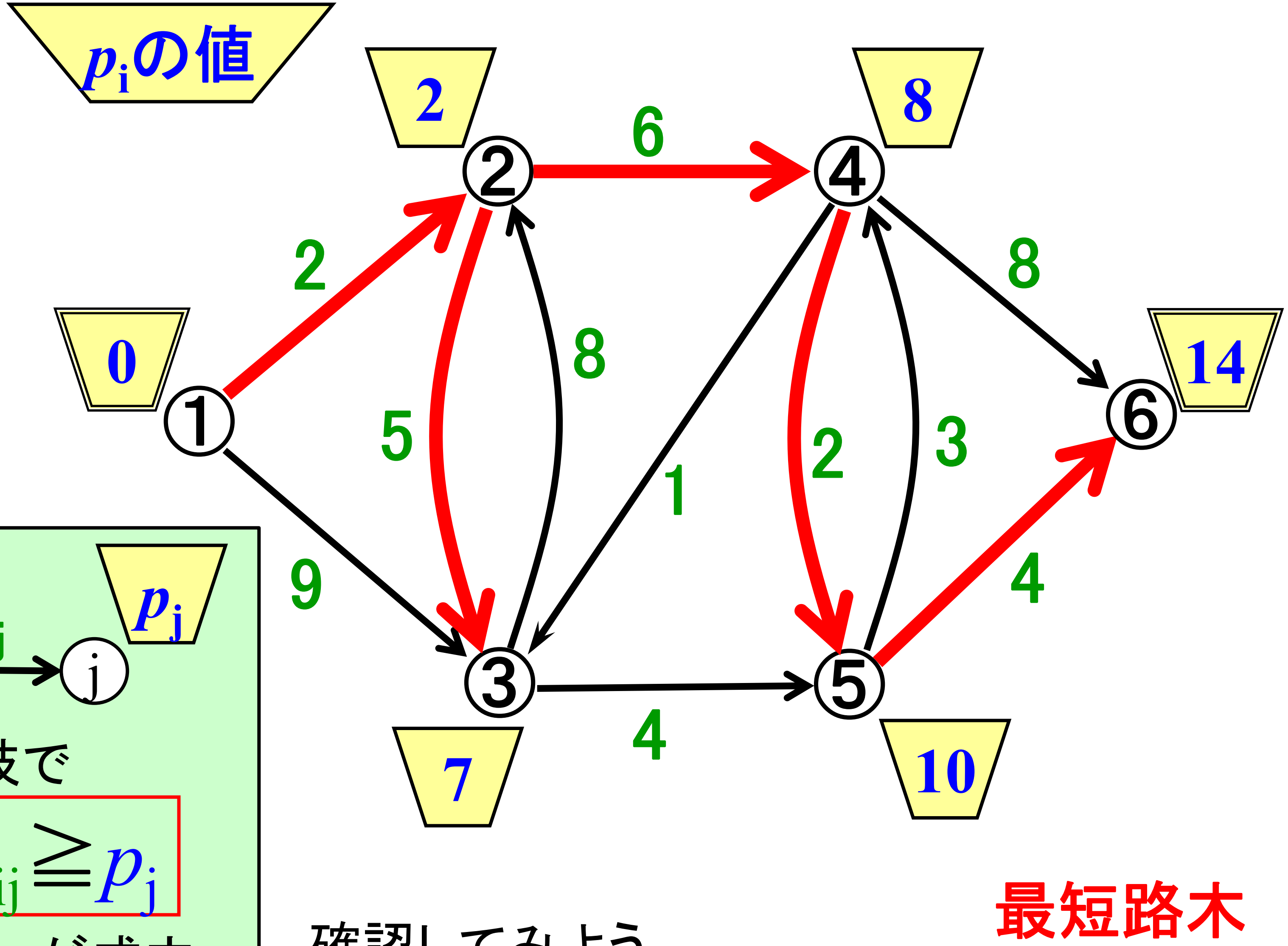
	解
p_1	0
p_2	2
p_3	7
p_4	8
p_5	10
p_6	14

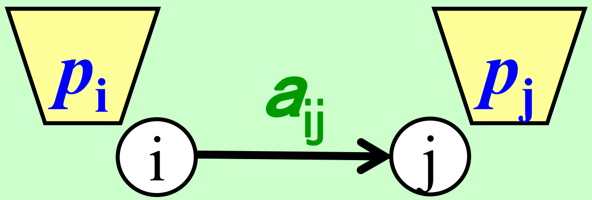
$$(0)x_{12}=0$$
$$(2)x_{13}=0$$
$$(0)x_{23}=0$$
$$(0)x_{24}=0$$
$$(13)x_{32}=0$$
$$(1)x_{35}=0$$
$$(2)x_{43}=0$$
$$(0)x_{45}=0$$
$$(2)x_{46}=0$$
$$(5)x_{54}=0$$
$$(0)x_{56}=0$$

$$x_{12}=1$$
$$x_{23}=1$$
$$x_{24}=1$$
$$x_{45}=1$$
$$x_{56}=1$$

例題1(続) (P)の最適解

$$x_{12}=1,\quad x_{23}=1,\quad x_{24}=1,\quad x_{45}=1,\quad x_{56}=1$$





すべての枝で

$$\boxed{p_i + a_{ij} \geqq p_j}$$

が成立

確認してみよう

(IP)と(P)とその双対問題(D)

最短路問題(IP)の最適値

完全単模性(Totally Unimodularity)

一致

ネットワーク型の制約は
整数最適解を持つ

LP緩和問題(P)の最適値

一致　双対定理

- 整数計画
- 多面体論

(P)の双対問題(D)の最適値

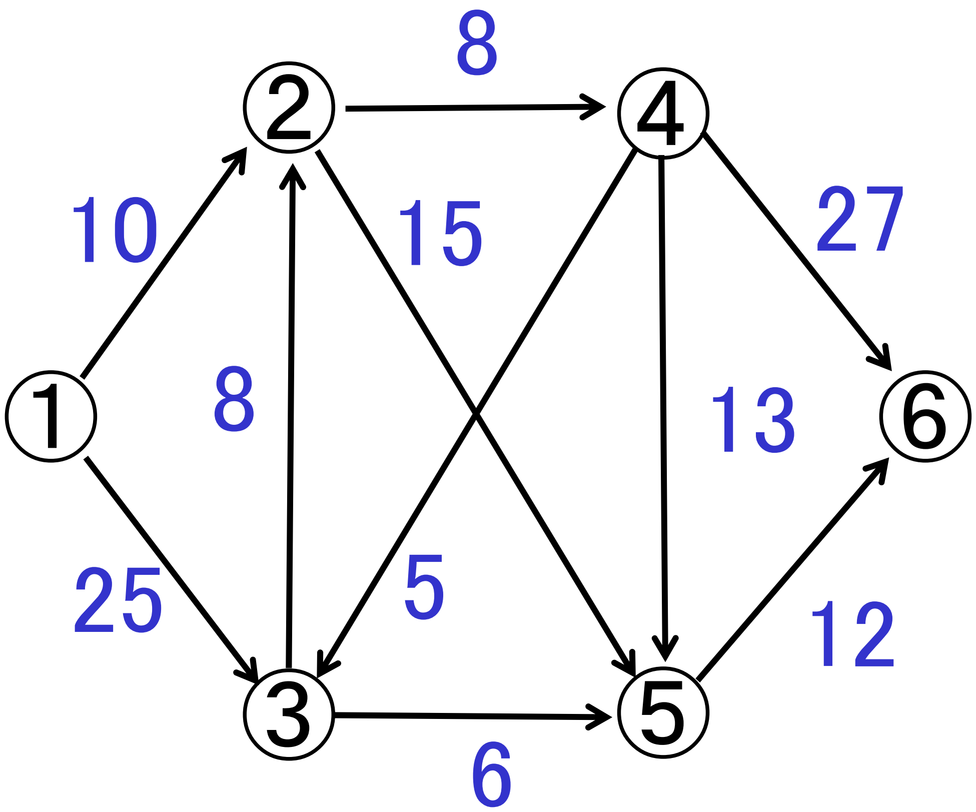
この部分を高速に解くのが重要

ワーク

ベルマン-フォード法で解く

①⇒⑥の最短路は?

(1) ベルマン方程式を書く



(2)ベルマン方程式を解く

(3)双対性を利用し最短路木を描く

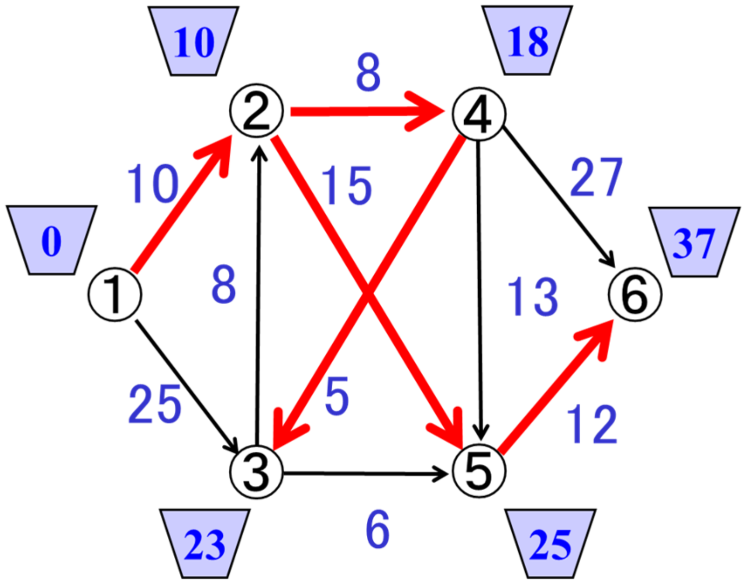
→最短路発見

ワーク 解答例

ベルマン方程式

$p_1=0$
$p_2=\min\{p_1+10, p_3+8\}$
$p_3=\min\{p_1+25, p_4+5\}$
$p_4=\min\{p_2+8\}$
$p_5=\min\{p_2+15, p_3+6, p_4+13\}$
$p_6=\min\{p_4+27, p_5+12\}$

①を根とした最短路木



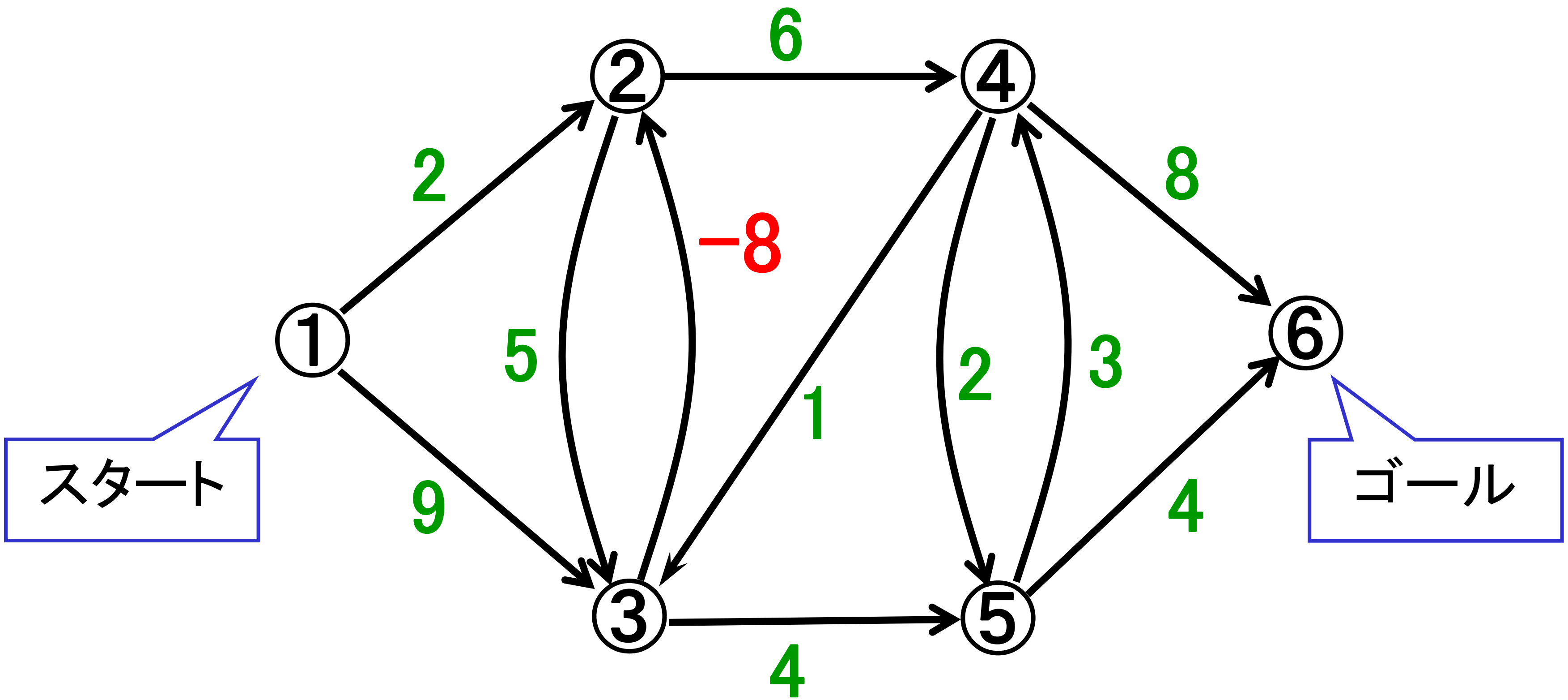
無変化で終了

	初期解	改定1	改定2	改定3	改定4	改定5
p_1	0	0	0	0	0	0
p_2	∞	10	10	10	10	10
p_3	∞	25	25	23	23	23
p_4	∞	∞	18	18	18	18
p_5	∞	∞	25	25	25	25
p_6	∞	∞	∞	45	37	37

(D)の最適解

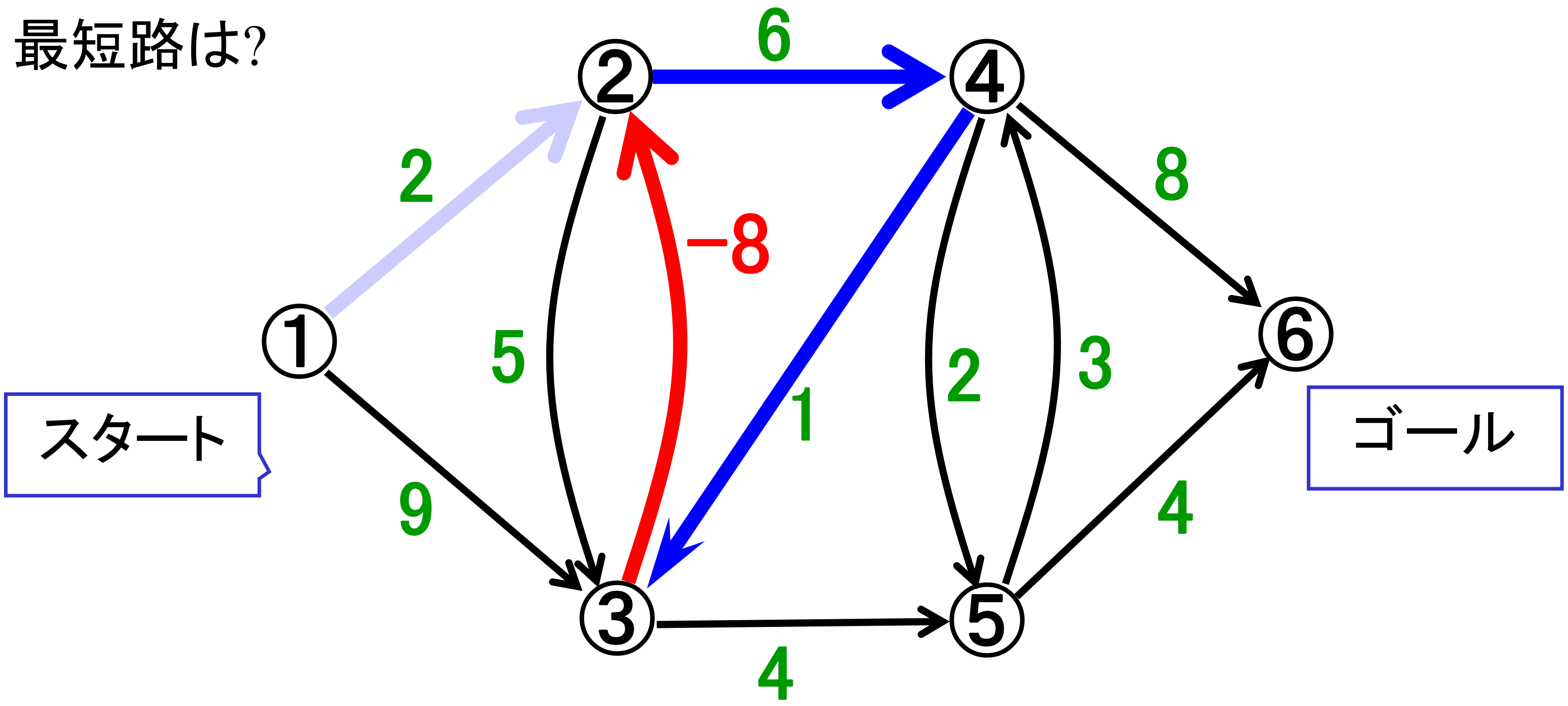
例題2 負の長さがある場合

最短路を求めよ



例題2(続) 負閉路の存在

最短路は?

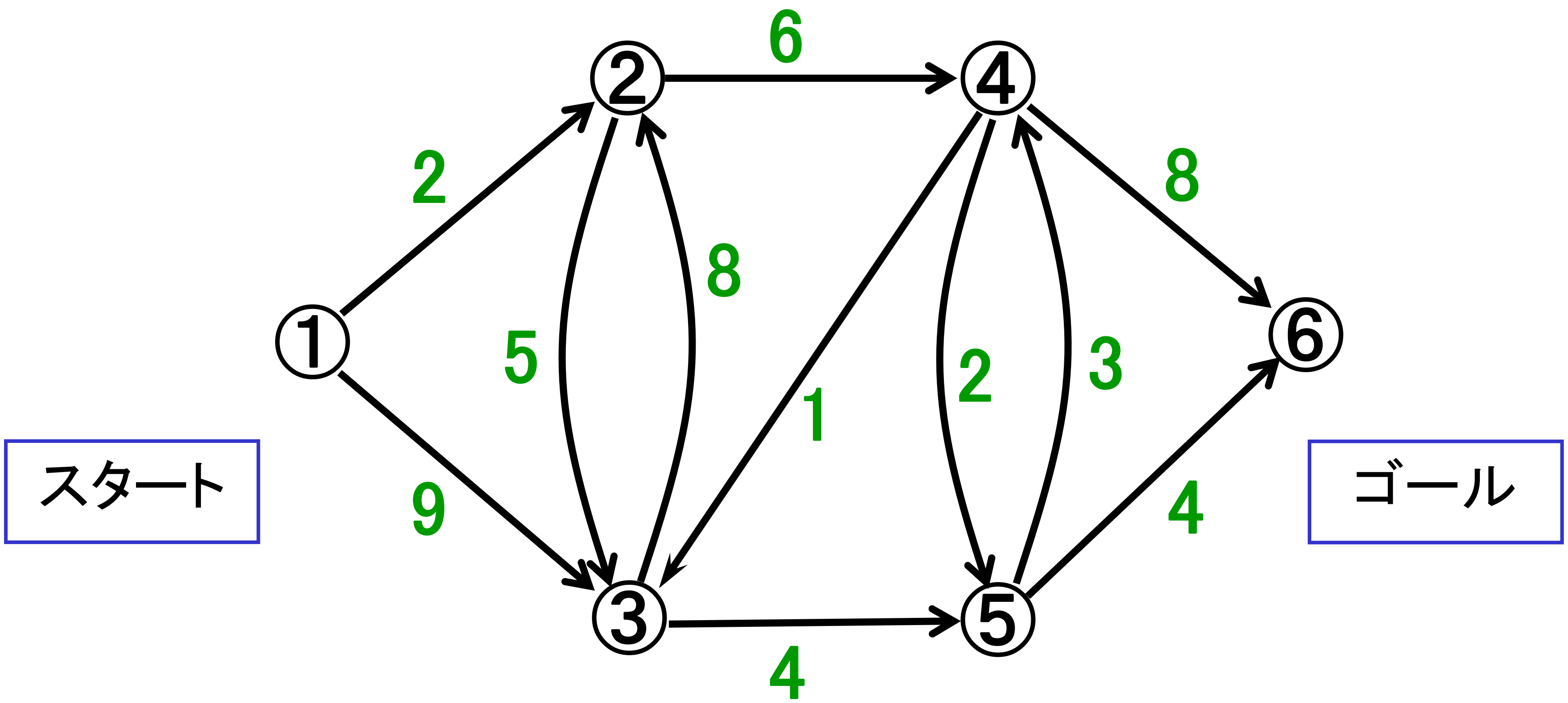


ベルマン-フォード法を適用⇒停止しない
（最短路が存在しない）

⇩

枝数回の繰り返しで停止させる（負閉路or最短路の発見）

例題3 負の長さの枝が無いとき

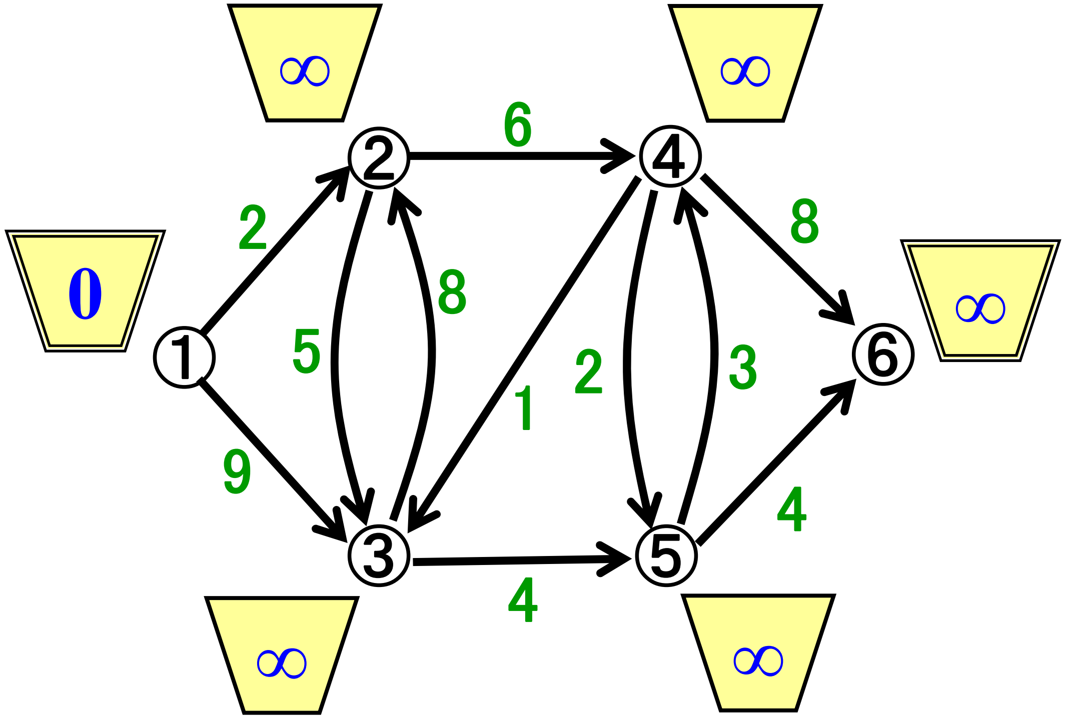


枝の数値は
非負と仮定!

⇨ ダイクストラ法が適用可能

例題3(続) 性質を満たす
ポテンシャルの見つけ方(1)

準備:
- スタートのポテンシャルを**0**
- 残りの点のポテンシャルは∞
- 全点が未確定.



性質を満たすよう
ポテンシャルを順に更新

ダイクストラ法
Dijkstra

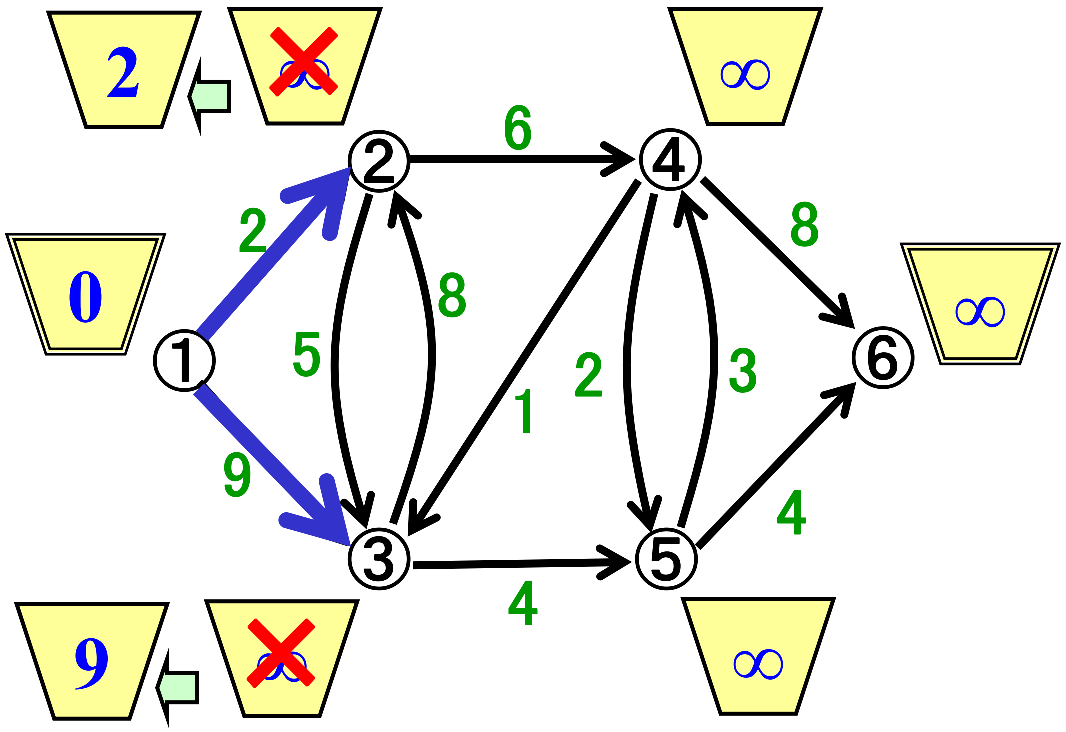
例題3(続) 性質を満たす**ポテンシャルの見つけ方(1)**

手順:全点が確定するまで以下を繰り返す

① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定

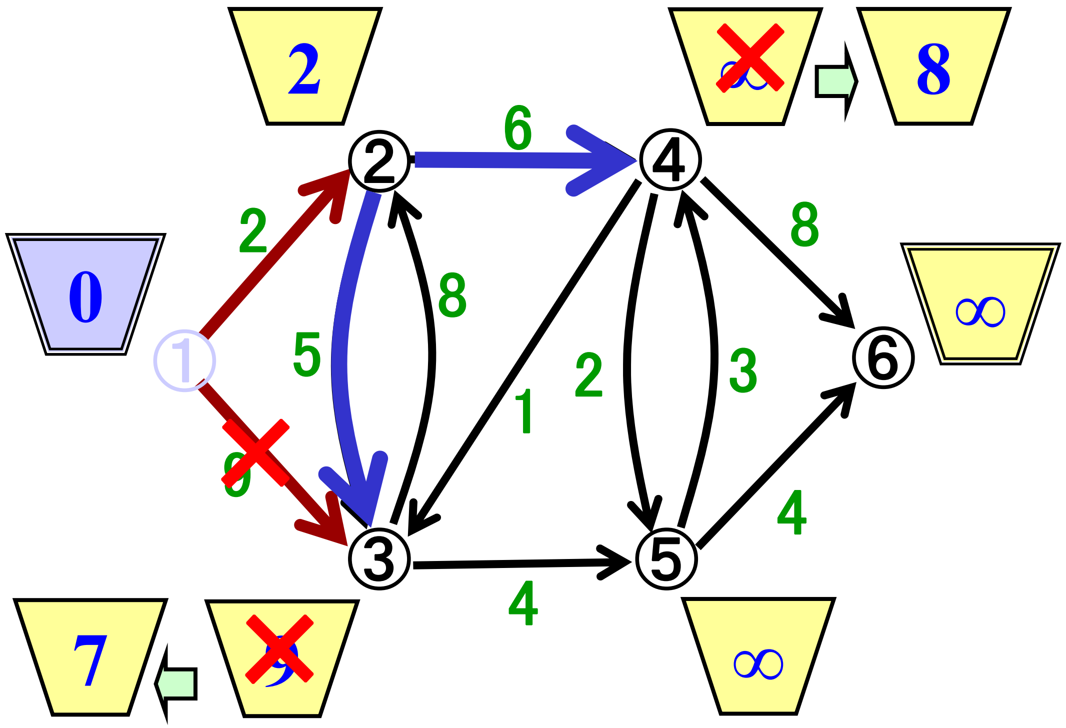


例題3(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(2)

① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定

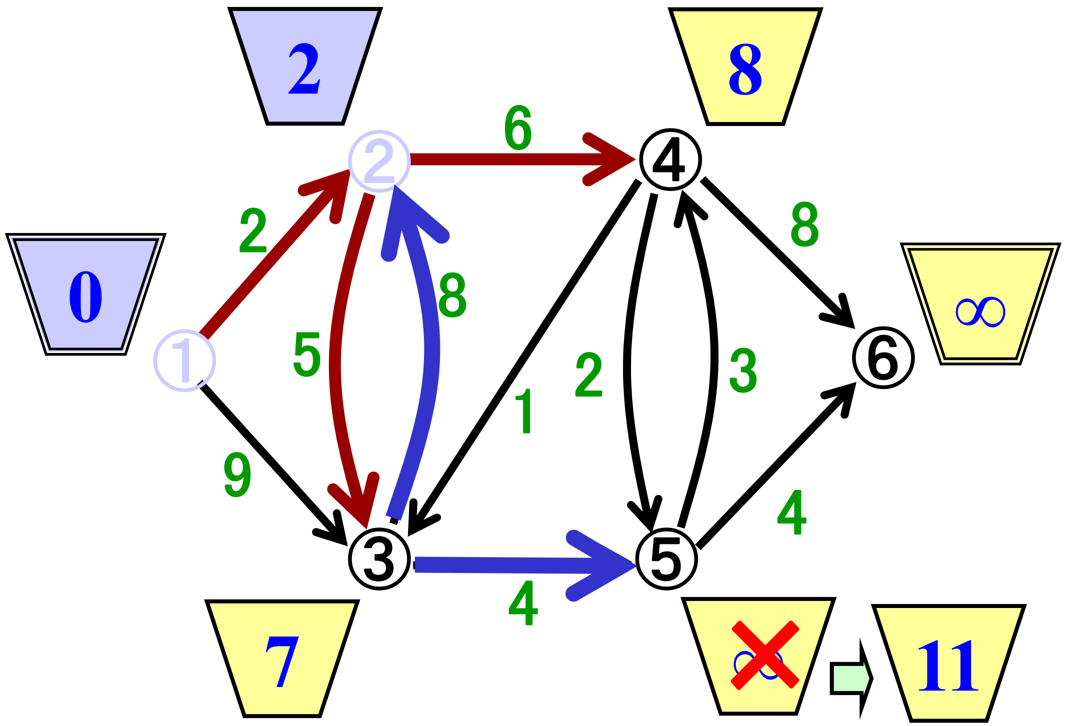


例題3(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方（3）

① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定

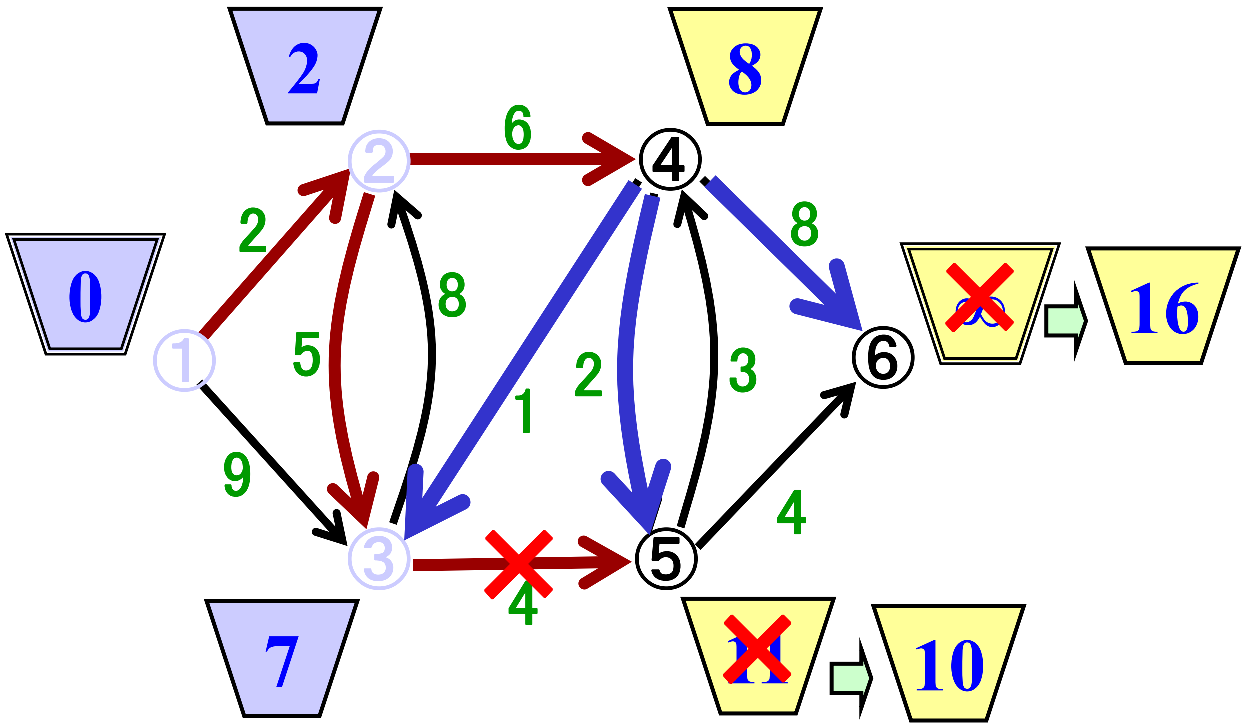


例題3(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方（4）

① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定

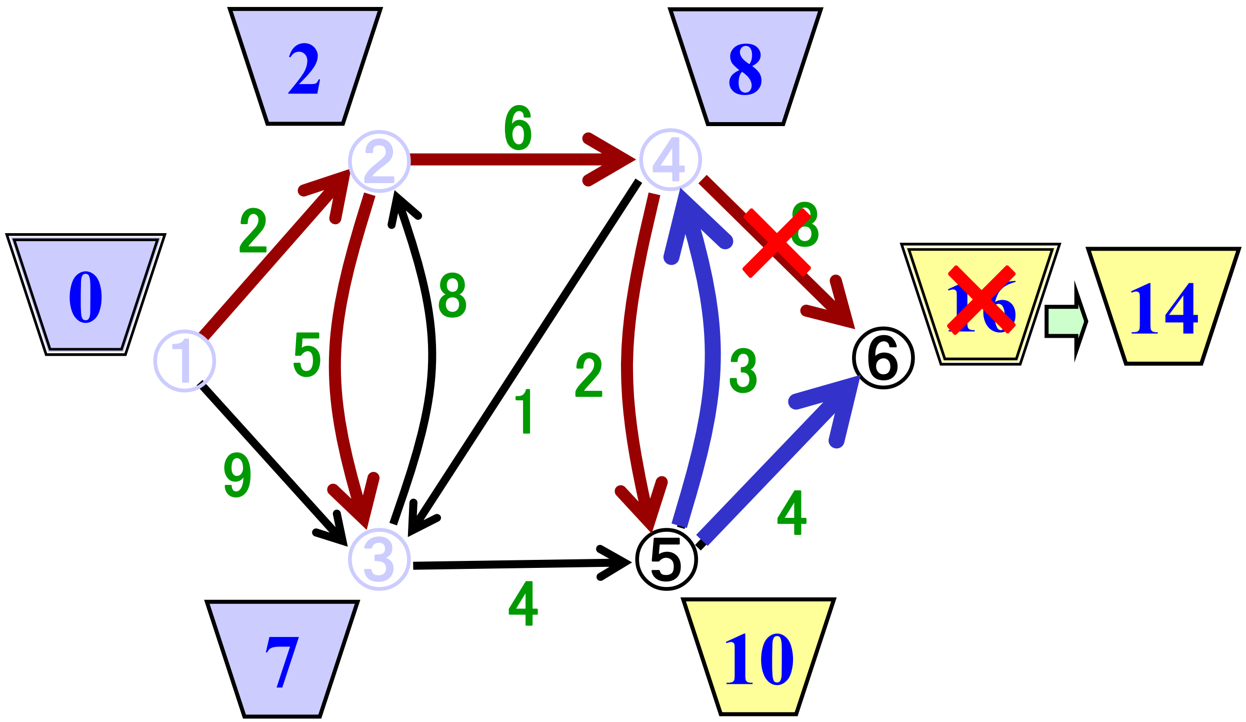


例題3(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(5)

① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定



例題3(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方（6）

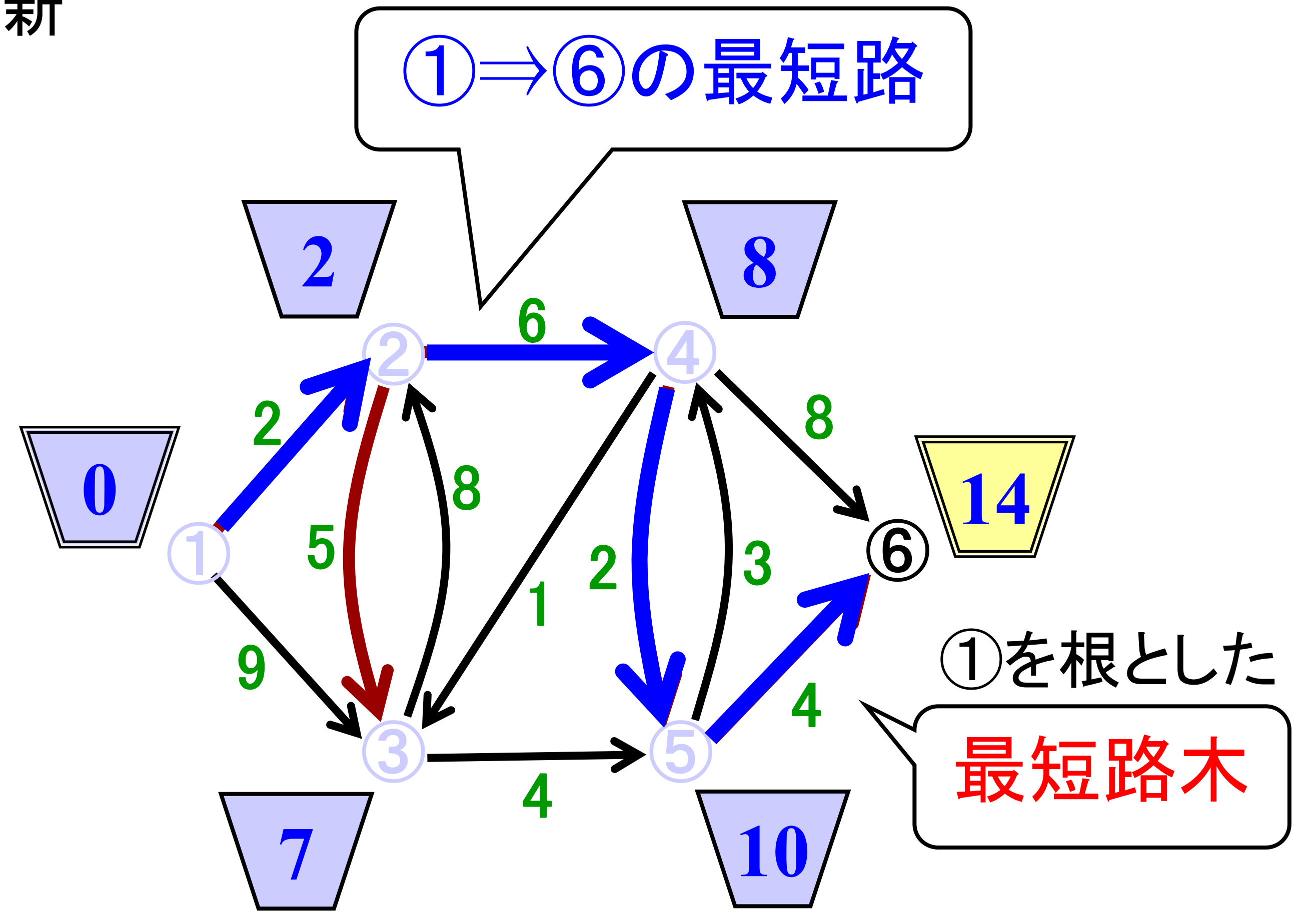
① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定

⇩

全点が確定し終了



最適なポテンシャルが見つかった ⇨ 最短路も見つかった

ダイクストラ法の高速実現法

ポテンシャル最小の点を高速に発見

- 未確定点を配列でなくリスト構造で保持（走査する点数を減らす）
- 未確定点をポテンシャルの値順に整列 →整列アルゴリズムの知識が必要

フィボナッチヒープ

効率的実装

$\mathrm{O}(m+n\log n)$

基本的なアルゴリズム+
データ構造の知識は
不可欠

まとめ：問題を解く戦略を練る