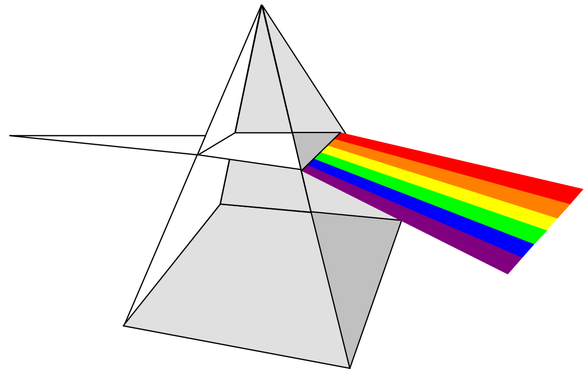


Linear Programming I

線形計画の解を導く素朴な方法達(2)
総当たり法

線形計画に対する主な解法

- 図を利用した解法
  - 2(〜3)変数の問題の最適解を図で導く

今回の話題

- 総当たり法
  - 図は用いない．シンプレックス法の基礎

学習用

- シンプレックス法(Simplex method)
- 内点法(Interior point method)
  - 大規模な問題でも高速に最適解を求める

実用

復習 図で解く

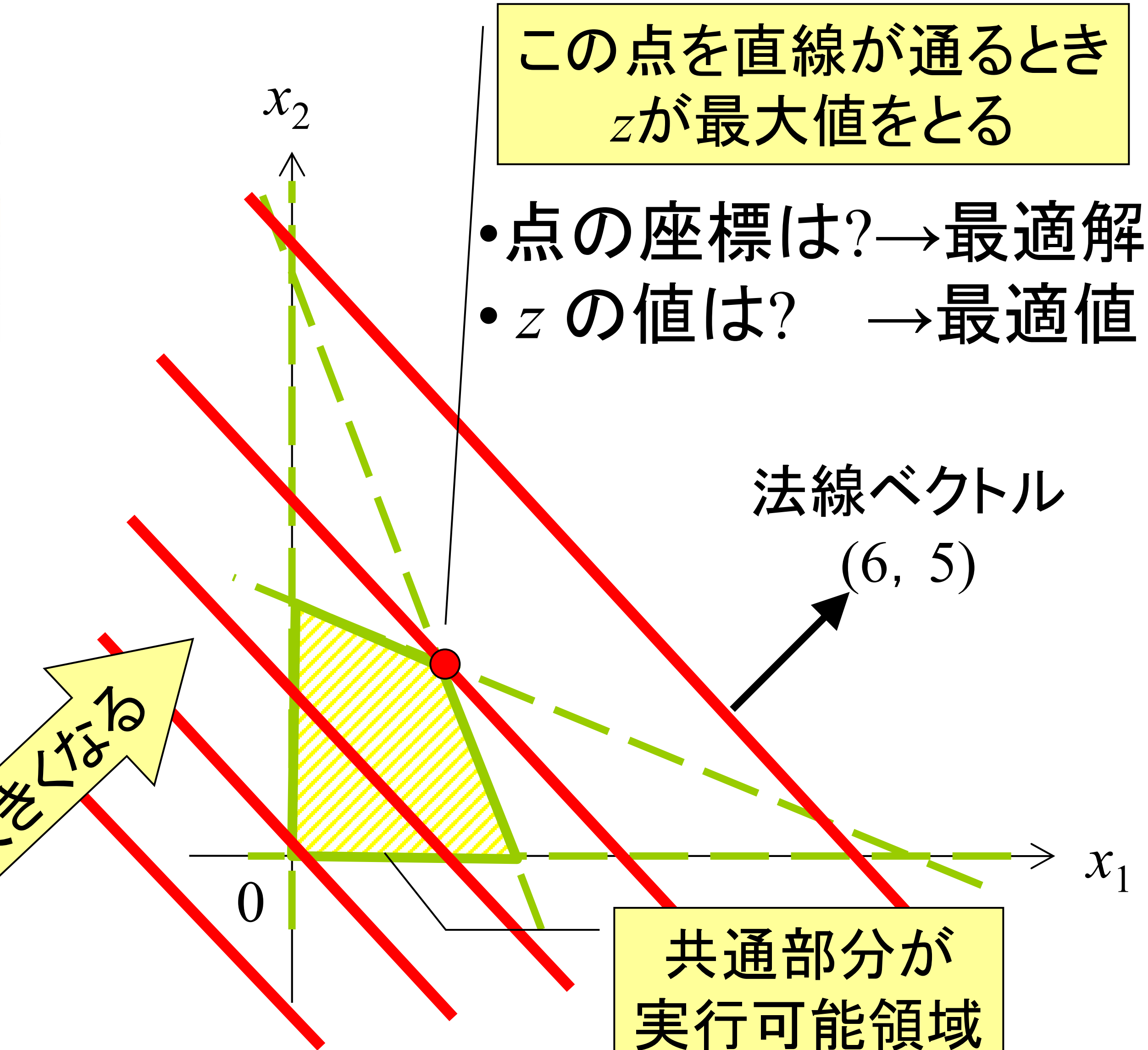
例題1 生産計画

- 2つの液体製品P,Qは機械A,Bを用いて加工される
- 利益が最大になる1週間の製品P,Qの加工量は？

	液体P 1ml	液体Q 1ml	使用可能時間
機械A	3(h)	1(h)	45(h/週)
機械B	1(h)	2(h)	40(h/週)
利益	6(万円)	5(万円)	

⇨ 定式化してみよう

$$\begin{aligned} \text{max.}\ & z=6x_1+5x_2 \\ \text{s.t.}\ & 3x_1+\ x_2 \leqq 45 \\ & x_1+2x_2 \leqq 40 \\ & x_1, x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$



- 点の座標は?→最適解
- z の値は? →最適値

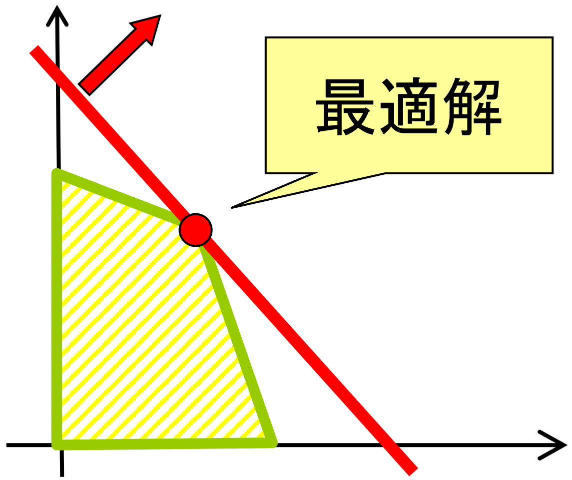
図を用いる解法の欠点

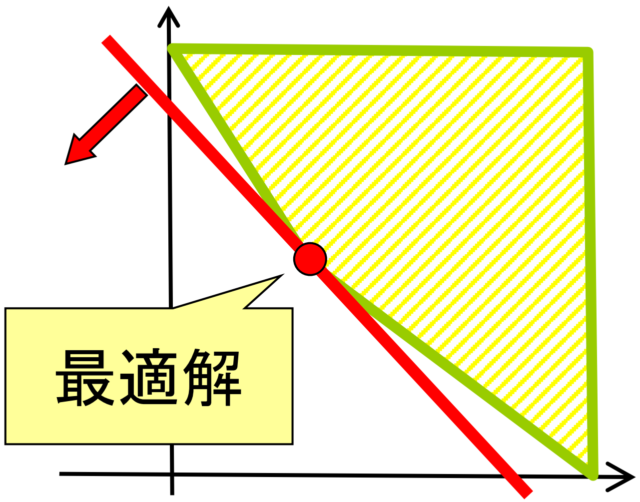
- 2～3変数の問題にのみ適応可能
  - 現実的に解きたい問題：数十～数百万変数
- 計算機で実行しにくい

図を用いない解法を考えよう!!

ヒント：

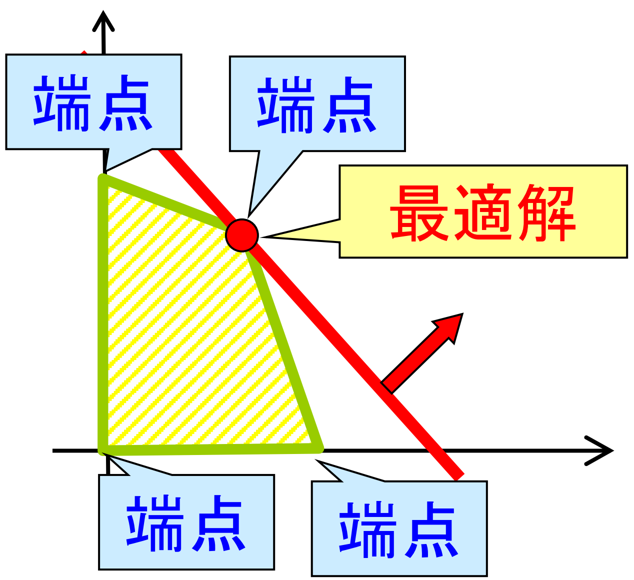
最適解は
実行可能領域の
どんな場所にある?





最適解の持つ性質

重要な性質：
最適解(の少なくとも一つ)は<u>実行可能領域の端点</u>に存在



戦略

実行可能解の端点をすべて探索
↓
その中から最適解を見つける

総当たり法

実行可能領域の端点と式の関係

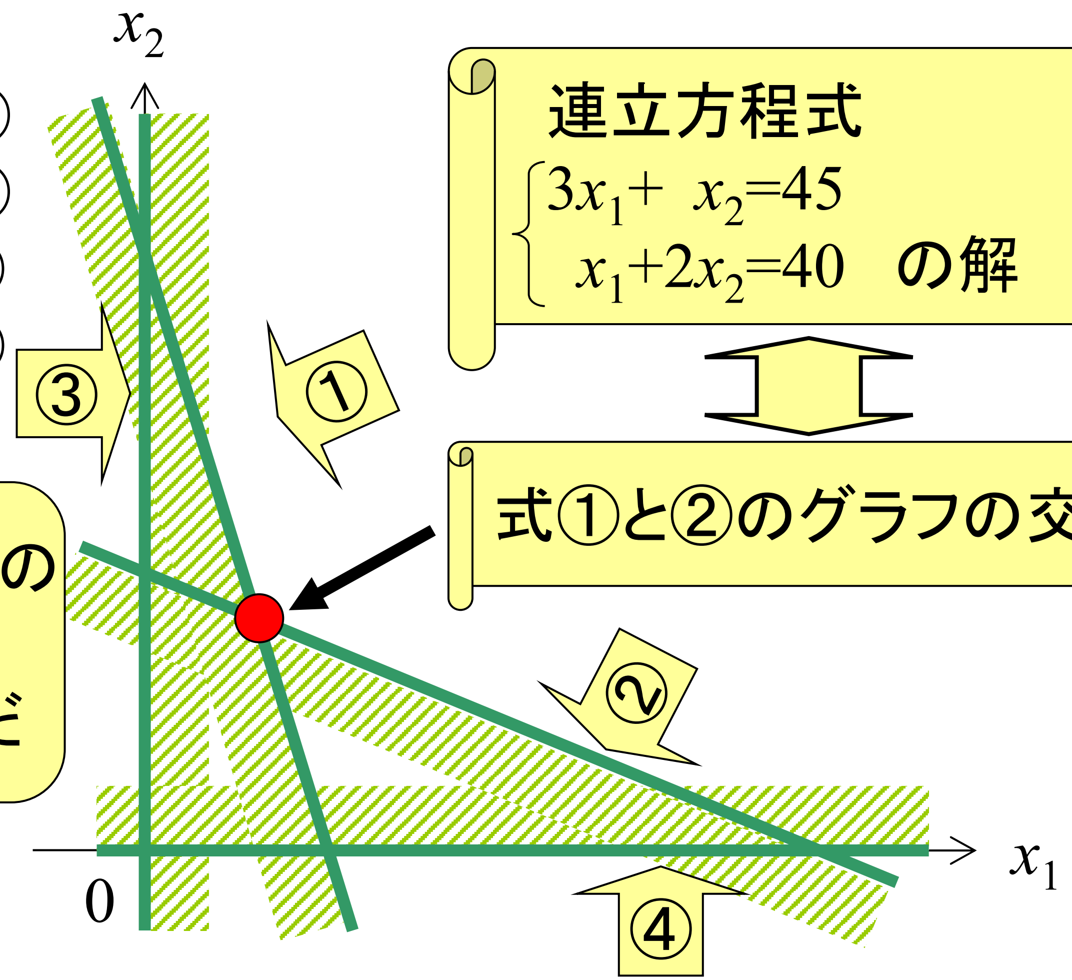
例題1より

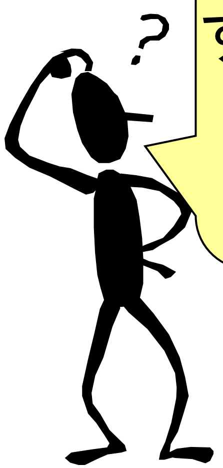
$$\begin{cases} 3x_1 + \ x_2 \leqq 45 & ① \\ x_1 + 2x_2 \leqq 40 & ② \\ x_1 \geqq 0 & ③ \\ x_2 \geqq 0 & ④ \end{cases}$$

連立方程式

$$\begin{cases} 3x_1 + \ x_2 = 45 \\ x_1 + 2x_2 = 40 \end{cases}$$ の解

式①と②のグラフの交点





すべての組合せの
連立方程式を
解けばいいんだ

解いてみよう!!

ワーク

全交点を探そう

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 &= 45 \quad ① \\
x_1 + 2x_2 &= 40 \quad ② \\
x_1 &= 0 \quad ③ \\
x_2 &= 0 \quad ④
\end{aligned}
$$

すべての組合せの連立方程式とその解

式の組合せ	x_1の値	x_2の値	実行可能?	目的関数値
①と②				
①と③				
①と④				
②と③				
②と④				
③と④				

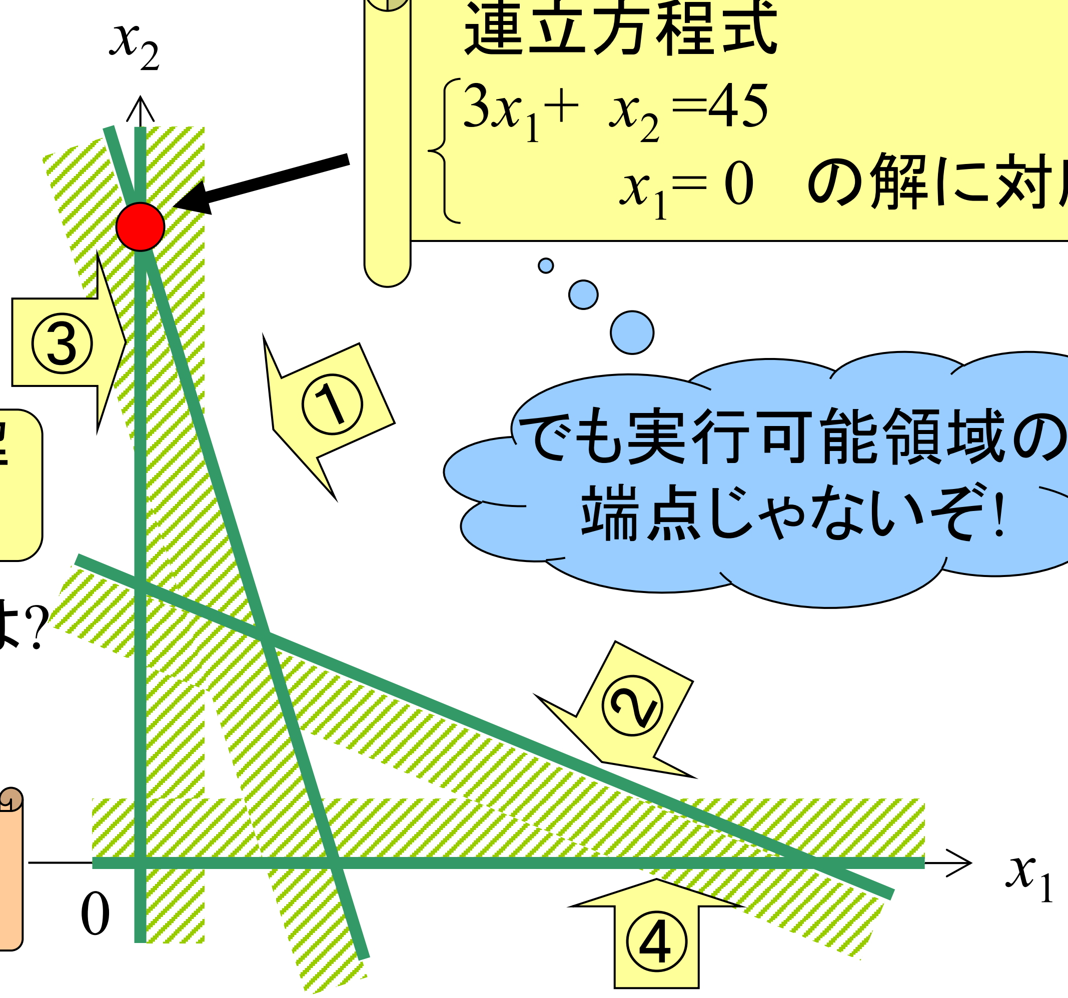
目的関数：max. $z=6x_1+5x_2$

実行可能領域の端点？

$$
\begin{cases}
3x_1 + x_2 \leqq 45 & ① \\
x_1 + 2x_2 \leqq 40 & ② \\
x_1 \geqq 0 & ③ \\
x_2 \geqq 0 & ④
\end{cases}
$$

連立方程式

$$
\begin{cases}
3x_1 + x_2 = 45 \\
x_1 = 0
\end{cases}
$$
の解に対応



でも実行可能領域の端点じゃないぞ!

連立方程式の解
≠端点

簡単な判定方法は?

標準形の利用

線形計画問題の標準形

標準形（standard form）

$$
\begin{aligned}
\text{maximize}\ \ & z = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \\
\text{subject to}\ \ & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& \qquad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1, \cdots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

標準形の決まり

① 目的関数は最大化
② 条件式の右辺(b_{i})は 非負
③ 条件式は（非負条件以外）等式
④ すべての変数が非負

例

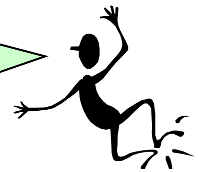
標準形ではない表現

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\ & z = x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.}\ & 3x_1 + x_2 \leqq 45 \\
& x_1 + 2x_2 \leqq 40 \\
& x_1, x_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

標準形で表現

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\ & (-z) = x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.}\ & 3x_1 + x_2 + s_1 = 45 \\
& x_1 + 2x_2 + s_2 = 40 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

表現内容は同じ!!
異なるのは見た目



すべてのLPは標準形で表現できる

対処法

① 目的関数が最小化の時
- 両辺に負を掛け，最大化問題に変形

② 右辺の定数bが負の数の時
- 両辺に(−1)を掛ける

③ 条件式に不等式が含まれている時
- ≦の時：スラック変数の導入⇒等式化
- ≧の時：サープラス変数を導入⇒等式化

④ 非負条件の無い変数（自由変数）が含まれる時
- 正と負の部分に分けて2変数に置き換える

個別に詳しく

① 目的関数の標準形への変換

最小化問題の時
⇒目的関数の両辺を(−1)倍し，最大化問題に変形

(例)　minimize $z=4x_1-7x_2$

$$\Updownarrow$$

maximize $\underbrace{(-z)}=-4x_1+7x_2$

※ 計算中は「$(-z)$」を1つの記号と扱う

参考：minとmaxの変換

$$z=\min\{3,-2\}$$

$$\Updownarrow$$

$$(-z)=\max\{-3,2\}$$

$$\Updownarrow$$

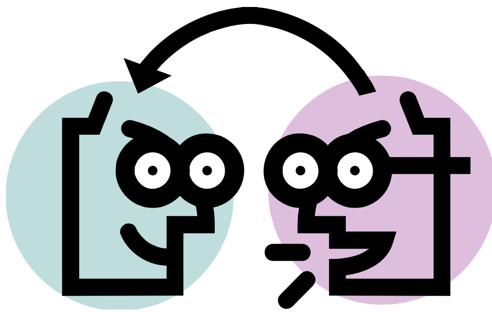
$$z=-2$$

② 右辺(定数)bの変換

制約式右辺の定数部分(b)が負
⇒両辺に(－1)を掛ける

(例) $4x_1 - 7x_2 \leqq -9$

$$-4x_1 + 7x_2 \geqq 9$$



※ 両辺にマイナスの数を掛けると
不等号は**逆転**する

③ 制約式を等式に変換

(左辺) ≦b の時

新たな非負変数を導入

(左辺)＋s＝b

s≧0

スラック変数
（slack:緩い）

(左辺) ≧b の時

(左辺)－t＝b

t≧0

サープラス変数
（surplus:過剰）

(例) $4x_1 - 7x_2 \leqq 12$

$$\Updownarrow$$

$4x_1 - 7x_2 + s = 12$

$s \geqq 0$

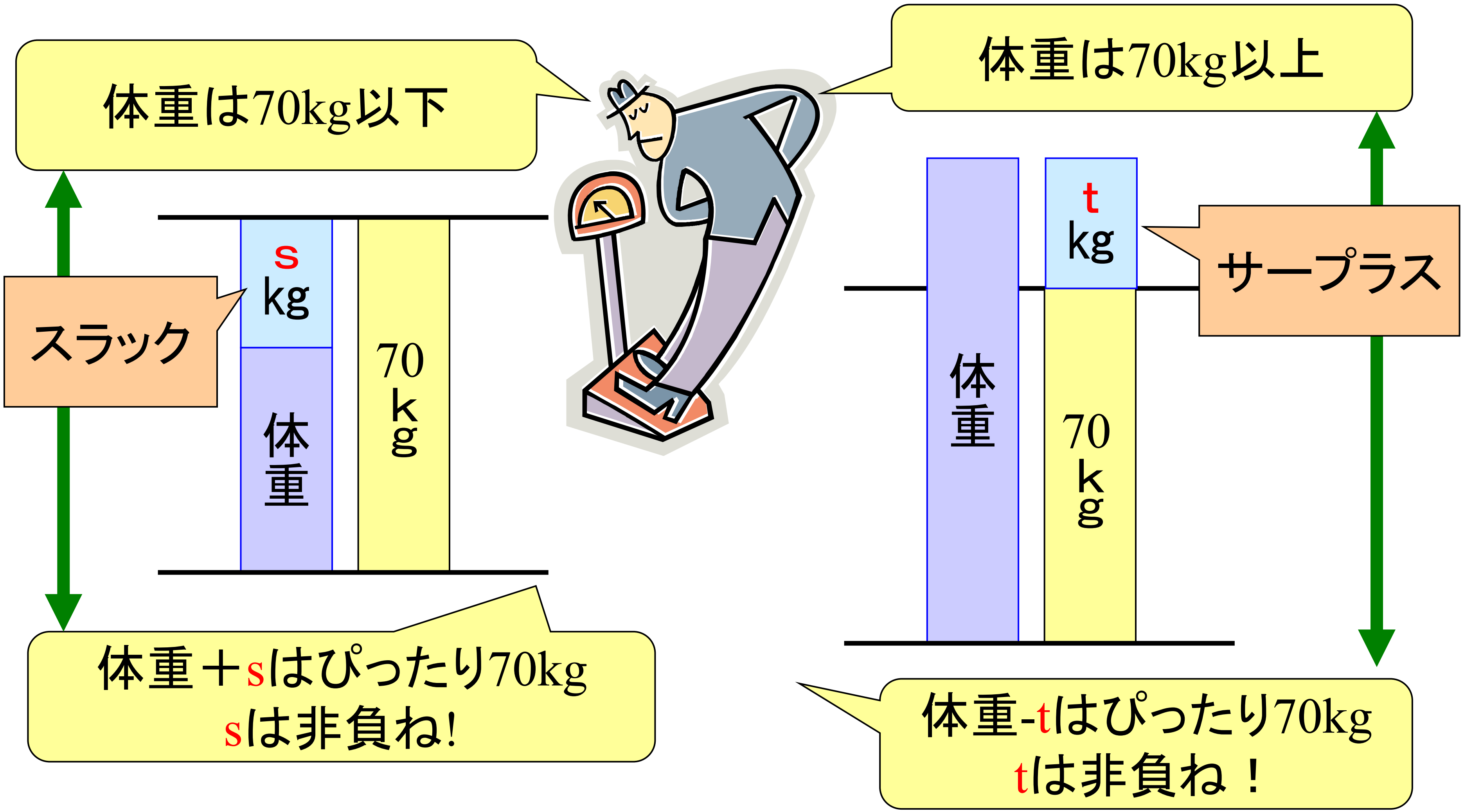
(例) $4x_1 - 7x_2 \geqq 12$

$$\Updownarrow$$

$4x_1 - 7x_2 - t = 12$

$t \geqq 0$

スラック変数・サープラス変数



④ 自由変数を非負変数に変換

非負制約の無い変数

自由変数 $x \Rightarrow 2$つの非負変数 x^+, x^- の差に変換

⇕

自由変数 $x \Rightarrow x = x^+ - x^-$, $x^+ \geqq 0$, $x^- \geqq 0$

例

$4x_1 - 7x_2 \leqq 6$, $x_1 \geqq 0$

自由変数

⇕

$4x_1 - 7(x_2^+ - x_2^-) \leqq 6$, $x_1 \geqq 0$, $x_2^+ \geqq 0$, $x_2^- \geqq 0$

注意点

$x_2 = -4 \Leftrightarrow x_2^+ - x_2^- = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2^+ = 0, & x_2^- = 4 \\ x_2^+ = 1, & x_2^- = 5 \\ x_2^+ = 2, & x_2^- = 6 \\ \vdots & \end{cases}$

変換後, 解が多数存在

元問題の解に影響無

標準形への変形例

一般形

$$\begin{aligned} \max.\ & z=6x_1+5x_2 \\ \text{s.t.}\ & 3x_1+x_2 \leqq 45 \\ & x_1+2x_2 \leqq 40 \\ & x_1,x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

・スラック変数

標準形

$$\begin{aligned} \max.\ & z=6x_1+5x_2 \\ \text{s.t.}\ & 3x_1+x_2+s_1 = 45 \\ & x_1+2x_2+s_2 = 40 \\ & x_1,x_2,s_1,s_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min.\ & z=5x_1+6x_2 \\ \text{s.t.}\ & 2x_1+x_2 \geqq 4 \\ & 2x_1+3x_2 \geqq 6 \\ & x_1,x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

・目的関数変換
・サープラス変数

$$\begin{aligned} \max.\ & (-z)=-5x_1-6x_2 \\ \text{s.t.}\ & 2x_1+x_2-t_1 = 4 \\ & 2x_1+3x_2-t_2 = 6 \\ & x_1,x_2,t_1,t_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min.\ & z = 3x_1 - 5x_2 \\ \text{s.t.}\ & 9x_1 - 4x_2 \geq -5 \\ & -7x_1 + 5x_2 = 8 \\ & 6x_1 - 2x_2 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

＋
自由
変数
変換

$$\begin{aligned} \max.\ & (-z) = -3x_1 + 5(x_2^+ - x_2^-) \\ \text{s.t.}\ & -9x_1 + 4(x_2^+ - x_2^-) + s_1 = 5 \\ & -7x_1 + 5(x_2^+ - x_2^-) = 8 \\ & 6x_1 - 2(x_2^+ - x_2^-) - t_3 = 1 \\ & x_1, x_2^+, x_2^-, s_1, t_3 \geq 0 \end{aligned}$$

ワーク1　標準形に変形せよ

(1)

$$\begin{aligned} &\text{max. } z = x_1 + 2x_2 \\ &\text{s.t.} \quad 3x_1 + x_2 \leqq 45 \\ &\qquad\quad x_1 + 2x_2 \leqq 40 \\ &\qquad\quad x_1, x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} &\text{min. } z = x_1 + 2x_2 \\ &\text{s.t.} \quad 3x_1 + x_2 \geqq 45 \\ &\qquad\quad x_1 + 2x_2 \geqq 40 \\ &\qquad\quad x_1, x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

ワーク1 **解答例**

(1)

標準形

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} & 3x_1 + x_2 \leqq 45 \\ & x_1 + 2x_2 \leqq 40 \\ & x_1, x_2 \geqq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} & 3x_1 + x_2 + s_1 = 45 \\ & x_1 + 2x_2 + s_2 = 40 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geqq 0 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} & 3x_1 + x_2 \geqq 45 \\ & x_1 + 2x_2 \geqq 40 \\ & x_1, x_2 \geqq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & (-z) = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} & 3x_1 + x_2 - t_1 = 45 \\ & x_1 + 2x_2 - t_2 = 40 \\ & x_1, x_2, t_1, t_2 \geqq 0 \end{array}$$

演習1　標準形に変形せよ

max. $z=200x_1+350x_2$
s.t.
$$3x_1+2x_2 \leqq 120$$
$$-x_1+x_2 \leqq 30$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

min. $z=2x_1-x_2$
s.t.
$$3x_1+x_2 \leq 120$$
$$x_1+4x_2 \geq 60$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

標準形を利用した総当たり法

戦略

線形計画問題

$$\begin{aligned} \max.\ & z=6x_1+5x_2 \\ \text{s.t.}\ & 3x_1+\ x_2 \leqq 45 \\ & x_1+2x_2 \leqq 40 \\ & x_1, x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

標準形に変形

$$\begin{aligned} \max.\ & z=6x_1+5x_2 \\ \text{s.t.}\ & 3x_1+\ x_2+s_1 =45 \\ & x_1+2x_2 +s_2=40 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

実現のポイント

$$\begin{aligned} 3x_1+\ x_2+s_1 &=45 \\ x_1+2x_2 +s_2 &=40 \end{aligned}$$

変数：4個
方程式：2本

どうやって
解く？

最大が**最適値**！
最適解発見

解を代入⇒目的関数値の計算

連立方程式が出現
→解く（交点発見）

- 解が非負 ⇒ **実行可能！**
- それ以外 ⇒ 実行可能でない

端点
発見

連立方程式:式と変数の数

$$3x_1 + x_2 + s_1 \qquad = 45$$
$$x_1 + 2x_2 \qquad + s_2 = 40$$

変数:4個
方程式:2本

⇔ すべての基本解

変数2個なら?

$$3x_1 + x_2 + s_1 \qquad = 45$$
$$x_1 + 2x_2 \qquad + s_2 = 40$$
⇒ $x_1 = 10$, $x_2 = 15$

$$3x_1 + x_2 + s_1 \qquad = 45$$
$$x_1 + 2x_2 \qquad + s_2 = 40$$
⇒ $x_1 = 40$, $s_1 = -75$

⋮

$$3x_1 + x_2 + s_1 \qquad = 45$$
$$x_1 + 2x_2 \qquad + s_2 = 40$$
⇒ $s_1 = 45$, $s_2 = 40$

x_1	x_2	s_1	s_2
0	0	45	40
0	45	0	-50
0	20	25	0
40	0	-75	0
15	0	0	25
10	15	0	0

戦略

基底変数

変数2個を選んで解く ⇒ 基本解

4個から2個の選び方:6パターン

非基底変数

選ばなかった変数の値:0と仮定

基本解と端点

$$\max.\ z=6x_1+5x_2$$
$$\text{s.t.}\quad 3x_1+x_2 \leqq 45$$
$$x_1+2x_2 \leqq 40$$
$$x_1,\ x_2 \leqq 0$$

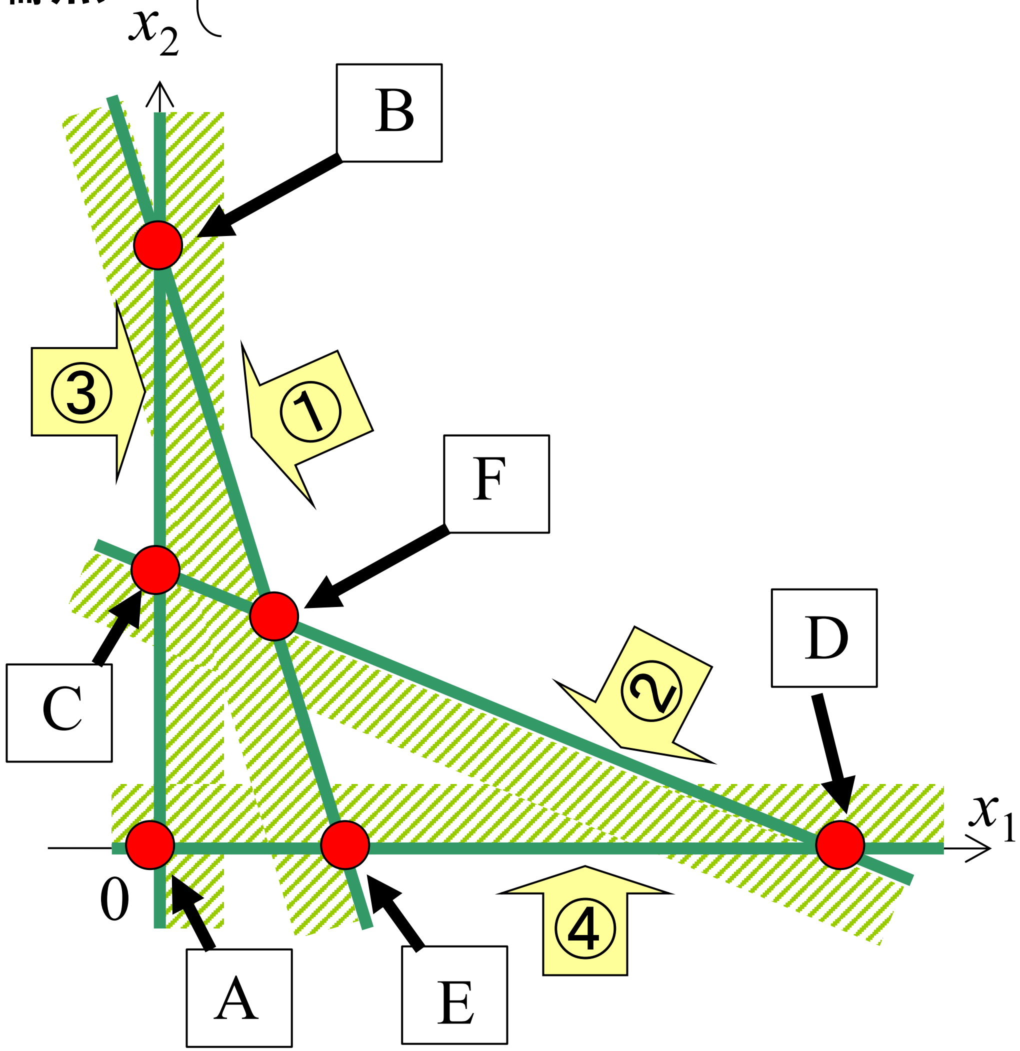
図的端点

$$\begin{cases} 3x_1+x_2 \leqq 45 & ① \\ x_1+2x_2 \leqq 40 & ② \\ x_1 \geqq 0 & ③ \\ x_2 \geqq 0 & ④ \end{cases}$$

基本解

$$3x_1+x_2+s_1=45$$
$$x_1+2x_2+s_2=40$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	端点?
A	0	0	45	40	◎
B	0	45	0	-50	×
C	0	20	25	0	◎
D	40	0	-75	0	×
E	15	0	0	25	◎
F	10	15	0	0	◎



図を用いない素朴な解法
総当たり法

手順1 標準形に変形する

手順2 すべての基本解を導く

手順3 端点かを判定（基本解が非負⇒端点）

手順4 端点なら目的関数値を計算

手順5 目的関数値最大の基本解が最適解

例1 総当たり法

練習 生産計画

- 2つの液体製品P,Qは機械A,Bを用いて加工される
- 利益が最大になる1週間の製品P,Qの加工量は？

	液体P 1ml	液体Q 1ml	使用可能量
機械A	3(h)	1(h)	45(h/週)
機械B	1(h)	2(h)	40(h/週)
利益	6(万円)	5(万円)	

定式化

x_1：液体Pの生産量
x_2：液体Qの生産量

$$
\begin{aligned}
\text{max. } & z=6x_1+5x_2 \\
\text{s.t. } & 3x_1+x_2 \leqq 45 \\
& x_1+2x_2 \leqq 40 \\
& x_1, x_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

①標準形

$$
\begin{aligned}
\text{max. } & z=6x_1+5x_2 \\
\text{s.t. } & 3x_1+x_2+s_1 = 45 \\
& x_1+2x_2+s_2 = 40 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

②全基本解　③端点判定　④目的関数値

x_1	x_2	s_1	s_2	端点?	目的関数値
0	0	45	40	◎	0
0	45	0	-50	×	
0	20	25	0	◎	100
40	0	-75	0	×	
15	0	0	25	◎	90
10	15	0	0	◎	135

⑤求解

最適解 $(x_1,x_2)=(10,15)$, 最適値 135

例2 総当たり法

$$\max.\ z=5x_1+4x_2$$
$$\text{s.t.}\quad 15x_1+11x_2 \leqq 1650$$
$$10x_1+14x_2 \leqq 1400$$
$$9x_1+20x_2 \leqq 1800$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

②全基本解 ③端点判定 ④目的関数値

x1	x2	s1	s2	s3	端点？	目的関数値
0	0	1650	1400	1800	○	0
0	150	0	−700	−1200	×	
0	100	550	0	−200	×	
0	90	660	140	0	○	360
110	0	0	300	810	○	550
140	0	−450	0	540	×	
200	0	−1350	−600	0	×	
77	45	0	0	207	○	565
65.67	60.45	0	−102.99	0	×	
37.84	72.97	279.73	0	0	○	481.08

①標準形

$$\max.\ z=5x_1+4x_2$$
$$\text{s.t.}\quad 15x_1+11x_2+s_1 = 1650$$
$$10x_1+14x_2+s_2 = 1400$$
$$9x_1+20x_2+s_3 = 1800$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geqq 0$$

⑤求解

最適解 $(x_1,x_2)=(77,45)$, 最適値 565

ワーク1

総当り法を用いた解法

最適解と最適値を導け

$$\begin{aligned} \text{max. } & z=30x_1+20x_2 \\ \text{s.t. } & x_1+3x_2 \leqq 150 \\ & 2x_1+x_2 \leqq 160 \\ & x_1, x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

① 標準形に変形

② 基本解の全列挙

x_1	x_2	s_1	s_2	端点?	目的関数値
0	0				
0		0			
0			0		
	0		0		
	0	0			
		0	0		

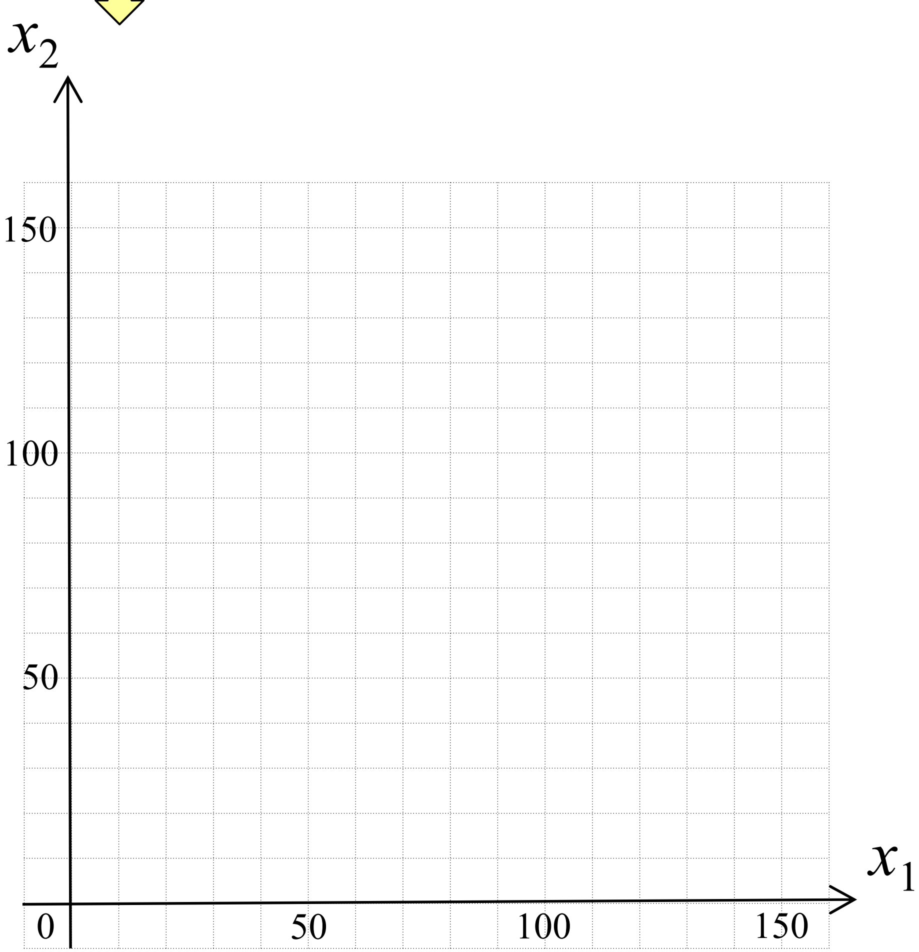
③ 最適解・最適値の発見

最適解 $(x_1,x_2)=(\quad,\quad)$
最適値

ワーク1(続) 基本解と端点の関係

$$\begin{aligned}
&\max.\ z = 30x_1 + 20x_2 \\
&\text{s.t.}\quad x_1 + 3x_2 \leqq 150 \\
&\qquad\ \ 2x_1 + x_2 \leqq 160 \\
&\qquad\ \ x_1, x_2 \geqq 0
\end{aligned}$$

(1)実行可能領域，端点を図示



(2)前頁の基本解をコピー

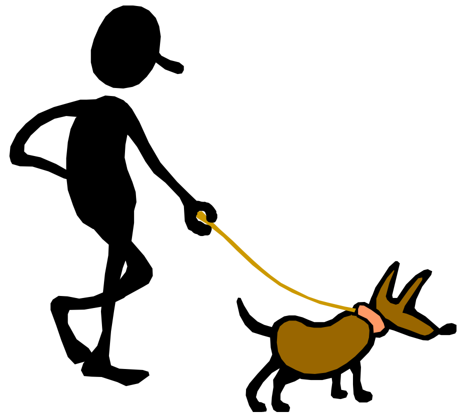
	x_1	x_2	s_1	s_2	端点?
A	0	0			
B	0		0		
C	0			0	
D		0		0	
E		0	0		
F			0	0	

(3) 端点と基本解の対応を図示

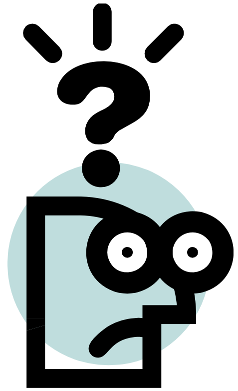
演習 総当り法

総当り法で最適解と最適値を求めてみよう.

$$
\begin{aligned}
&\text{max. } z = 20x_1 + 30x_2 \\
&\text{s.t.} \qquad x_1 + 2x_2 \leqq 800 \\
&\qquad\quad 3x_1 + 4x_2 \leqq 1800 \\
&\qquad\quad 3x_1 + x_2 \leqq 1500 \\
&\qquad\quad x_1,\ x_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$



総当たり法の欠点



- 標準形がn個の変数とm本の等式条件
  ⇒基本解はいくつ存在? 組合せの数

  膨大な数の連立方程式を解くことになる

  ⇒サイズによっては事実上**実行不可能**

- 端点で無い基本解も計算(←無駄)

より無駄の無い解法 <u>**シンプレックス法**</u>