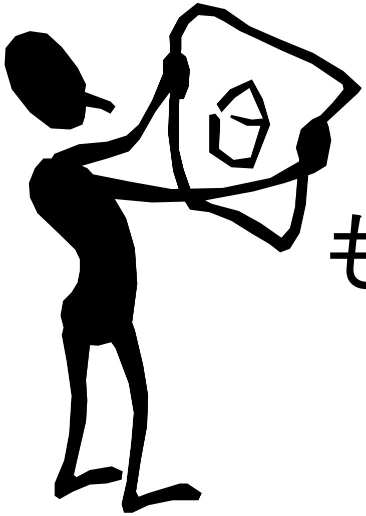
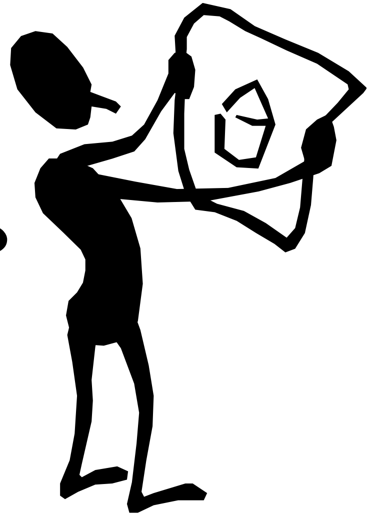
Sensitivity Analysis



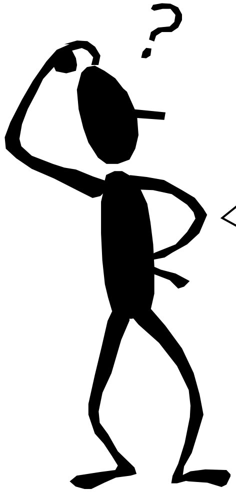
感度分析

もし〇〇〇だったどうする？



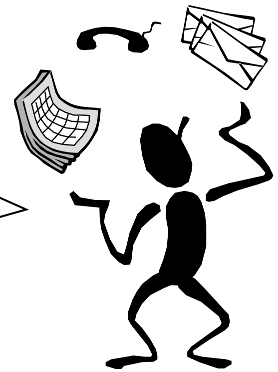
線形計画では分析も可能

最適解を求める機能だけでない



もし原料の在庫量が増えたら
生産計画はどうなる?
再計算でシミュレーションしようかな

必要ない.
最適解導出時のデータからわかる



感度分析 Sensitivity Analysis

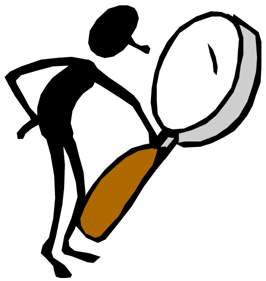
条件・数値の変化
→最適解の変化を分析

← 数理モデルで用いられる数値

- 変化しやすい場合あり
- 不正確な場合あり

⇒解が受ける影響把握が重要

(別名)What-if分析



例題1 資源量(定数項)の変化

- 2つの液体製品P,Qは機械A,Bを用いて加工される
- 利益が最大になる1週間の製品P,Qの加工量は？

	液体P 1ml	液体Q 1ml	使用可能量
機械A	3(h)	1(h)	45(h/週)
機械B	1(h)	2(h)	40(h/週)
利益	6(万円)	5(万円)	

お知らせ
臨時に労働条件の変更有
機械A または 機械Bの稼働時間を
一方だけ10(時間/週) 延長可能

現在	使用可能時間
機械A	45(h/週)
機械B	40(h/週)

利益最大にしたい.
機械Aを10時間増?
機械Bを10時間増?

解決案のポイント

- 機械Aの使用可能時間増加に対する利益の増加量
- 機械Bの使用可能時間増加に対する利益の増加量

比較

算出方法は?

例題1(準備)

生産計画

- 2つの液体製品P,Qは機械A,Bを用いて加工される
- 利益が最大になる1週間の製品P,Qの加工量は？

	液体P 1ml	液体Q 1ml	使用可能量
機械A	3(h)	1(h)	45(h/週)
機械B	1(h)	2(h)	40(h/週)
利益	6(万円)	5(万円)	

シンプレックス法で最適解と最適値を求めてみよう.

x_1：液体Pの生産量

x_2：液体Qの生産量

定式化

$$\begin{aligned} \max.\ & z=6x_1+5x_2 \\ \text{s.t.}\quad & 3x_1+\ x_2 \leqq 45 \\ & x_1+2x_2 \leqq 40 \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

標準形に変形

$$\begin{aligned} \max.\ & z \\ \text{s.t.}\quad & 3x_1+\ x_2+s_1 \qquad =45 \\ & x_1+2x_2 \qquad +s_2=40 \\ & z-6x_1-5x_2 \qquad = 0 \\ & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

※目的関数を制約へ

準備：シンプレックス表（単体表）

基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項	増加限界
s_1	0	3	1	1	0	45	
s_2	0	1	2	0	1	40	
z	1	-6	-5	0	0	0	

初期の基底変数の決定

例題1(準備(続))

基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項	増加限界
① s_1	0	3	1	1	0	45	15
② s_2	0	1	2	0	1	40	40
③ z	1	-6	-5	0	0	0	

掃き出し操作の記録

①×1/3
②−①×1/3
③−①×(-2)

基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項	増加限界
① x_1	0	1	1/3	1/3	0	15	45
② s_2	0	0	5/3	-1/3	1	25	15
③ z	1	0	-3	2	0	90	

①−②×1/5
②×3/5
③−②×(-9/5)

基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項	増加限界
① x_1	0	1	0	2/5	-1/5	10	
② x_2	0	0	1	-1/5	3/5	15	
③ z	1	0	0	7/5	9/5	135	

最適

最適解$(x_1,x_2)=(10,15)$, 最適値 135

限界価値

シンプレックス表(最終)

基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項
x_1	0	1	0	2/5	1/5	10
x_2	0	0	1	-1/5	3/5	15
z	1	0	0	7/5	9/5	135

s_1:機械Aの未稼働時間
s_2:機械Bの未稼働時間

$$z = 0x_1 + 0x_2 - \frac{7}{5}s_1 - \frac{9}{5}s_2 + 135$$

機械A(B)未稼働時間を1時間増加→利益が7/5(9/5)万円減少

⇕

機械A(B)未稼働時間を1時間減少→利益が7/5(9/5)万円増加

||

機械A(B)の使用可能時間を1時間増加

限界価値(影の価格)

marginal price (shadow price)

限界価値の解釈

基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項
x_1	0	1	0	2/5	1/5	10
x_2	0	0	1	-1/5	3/5	15
z	1	0	0	7/5	9/5	135

異なる資源の価値の比較

(機械Aの稼働時間増加の利益率：7/5万円/h)
≦(機械Bの稼働時間増加の利益率： 9/5万円/h)

機械Bの延長費用

利益減少

限界価値

9/5万円

利益増加

資源の価値の損益分岐

（機械Bの延長費用）＜ 9/5万円/h ⇒時間延長
（機械Bの延長費用）＞ 9/5万円/h ⇒現状維持

機械Bの使用時間を
どんどん増やしても利益が増え続ける？
→増加限界

増加限界

仮定

機械Aの使用可能時間を変えずに,
機械Bの使用可能時間をΔ増やした

デルタ

微量変化を示す記号

⇩

知りたいこと

最適値はどう変化する?
その変化が有効な範囲は?

限界価値

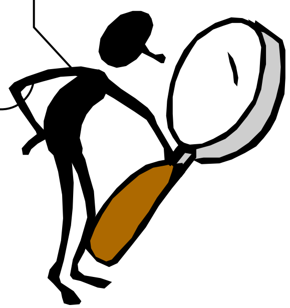
増加限界

限界価値のある資源に対し
知りたい情報

$$
\begin{array}{lllr}
\text{max.} & z & & \\
\text{s.t.} & 3x_1+\ x_2+s_1 & & =45 \\
 & x_1+2x_2 & +s_2 & =40+\Delta \\
 & z-6x_1-5x_2 & & =0 \\
 & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2 \geqq 0 & &
\end{array}
$$

※限界価値＝0 → 無意味

最適解周辺での変化を観察



最適解発見経路の追跡

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項
① s_1	0	3	1	1	0	45
② s_2	0	1	2	0	1	40＋Δ
③ z	1	-6	-5	0	0	0

①×1/3
②－①×1/3
③－①×(-2)

① x_1	0	1	1/3	1/3	0	15
② s_2	0	0	5/3	-1/3	1	25＋Δ
③ z	1	0	-3	2	0	90

①－②×1/5
②×3/5
③－②×(-9/5)

x_1	0	1	0	2/5	-1/5	10-1/5Δ
x_2	0	0	1	-1/5	3/5	15+3/5Δ
z	1	0	0	7/5	9/5	135+9/5Δ

最適解発見時の記録を利用

掃き出し操作記録

最適解を得て停止

最適解(x_1,x_2)=(10-1/5Δ,15+3/5Δ), 最適値 135+9/5Δ

増加限界の導出

シンプレックス表(最終)

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項
x_1	0	1	0	2/5	-1/5	10-1/5Δ
x_2	0	0	1	-1/5	3/5	15+3/5Δ
z	1	0	0	7/5	9/5	135+9/5Δ

最適解が実行可能であるための条件

≧0

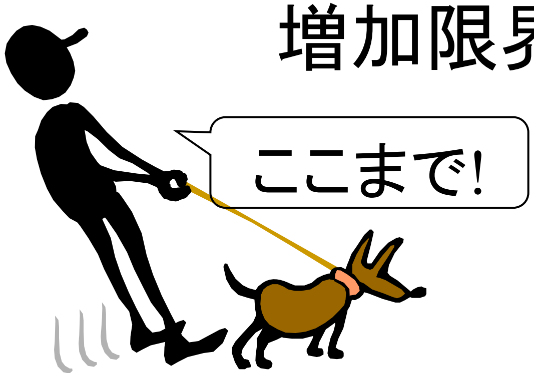
≧0

最適解(x_1, x_2)=(10-1/5Δ,15+3/5Δ)
最適値 135+9/5Δ

$$\begin{cases} 10-1/5\Delta \geqq 0 \\ 15+3/5\Delta \geqq 0 \end{cases}$$

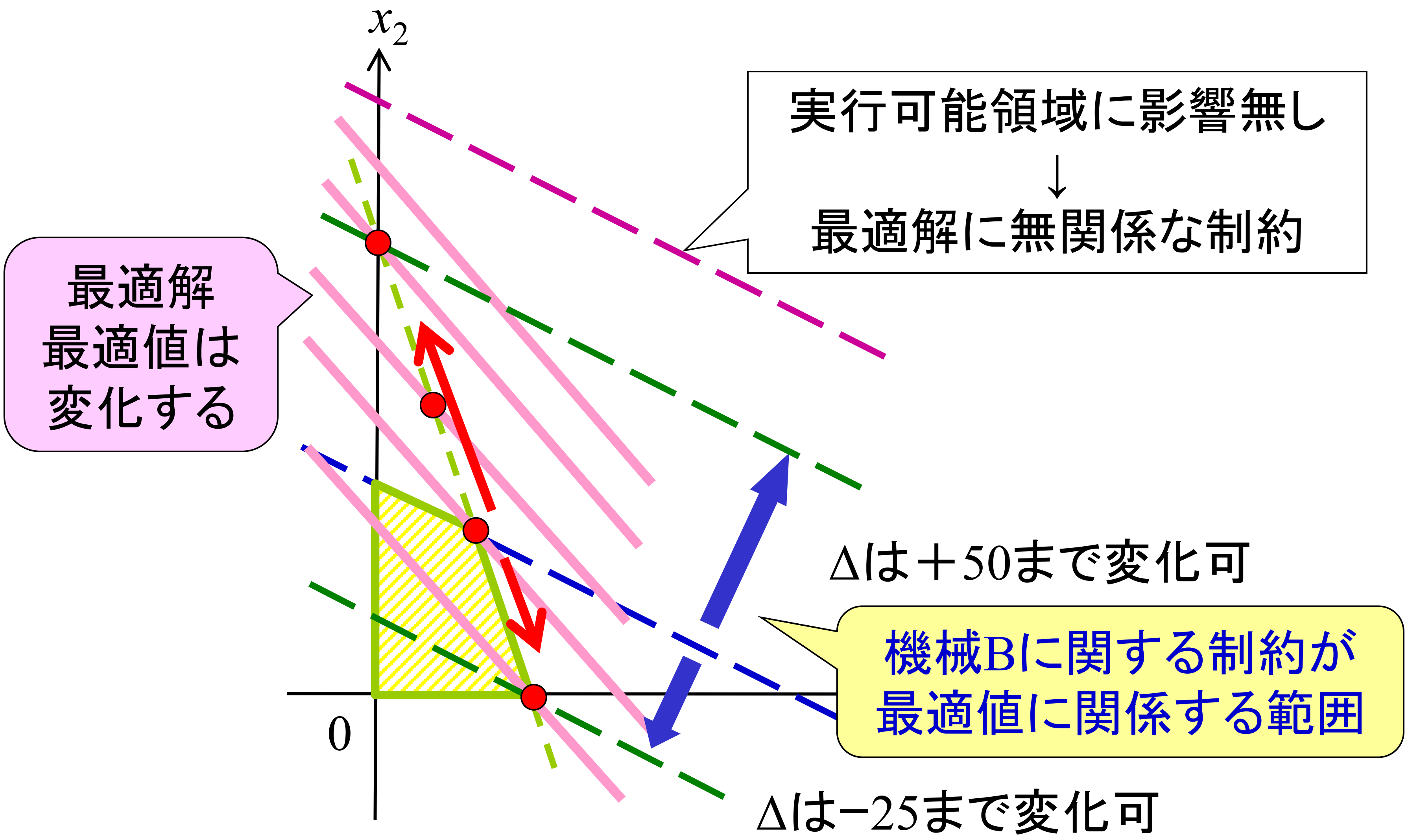
$$-25 \leqq \Delta \leqq 50$$

増加限界は(40+50=)90時間

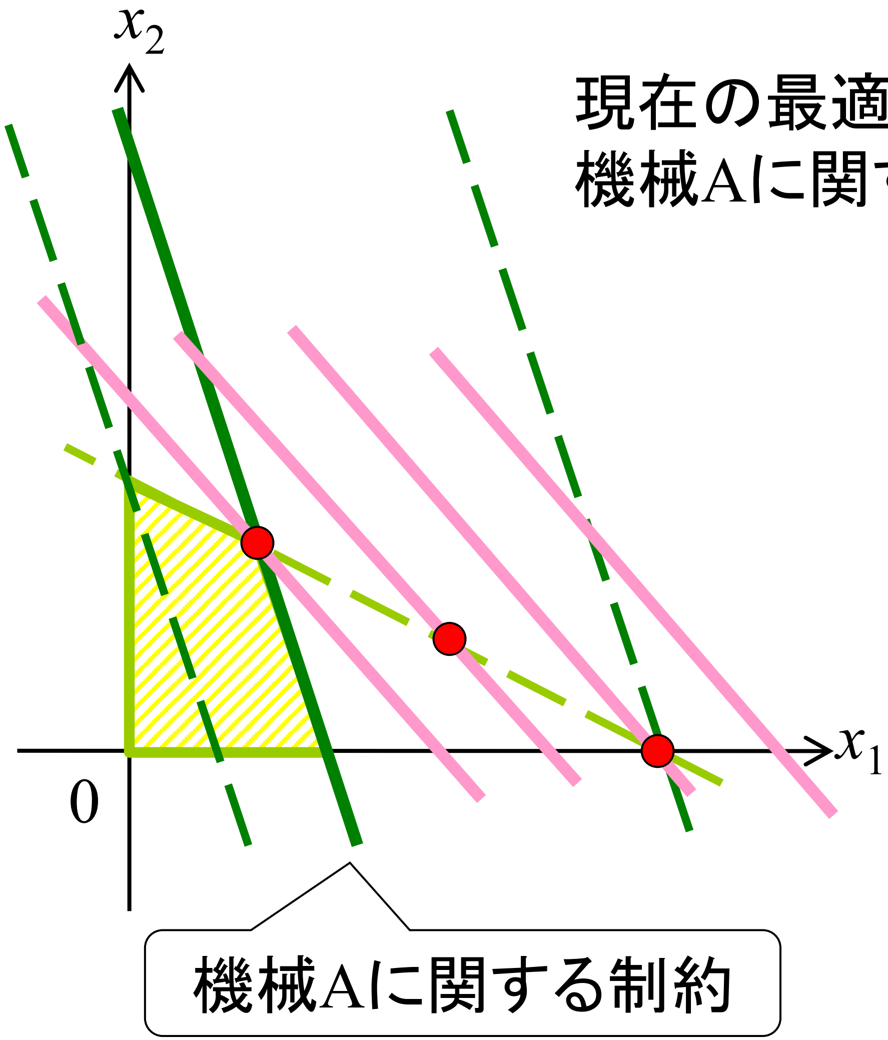


機械B:利益率9/5万円/hの有効範囲
使用制限時間が15h〜40h〜90hの時

増加限界の図的解釈


x_2
0
実行可能領域に影響無し
↓
最適解に無関係な制約
最適解
最適値は
変化する
Δは＋50まで変化可
機械Bに関する制約が
最適値に関係する範囲
Δは−25まで変化可

練習　機械Aについて



現在の最適解に対して，
機械Aに関する増加限界を求めよう

練習 機械Aの増加限界

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項
① s_1	0	3	1	1	0	45+Δ
② s_2	0	1	2	0	1	40
③ z	1	-6	-5	0	0	0

①×1/3
②－①×1/3
③－①×(-2)

① x_1	0	1	1/3	1/3	0	15+1/3Δ
② s_2	0	0	5/3	-1/3	1	25-1/3Δ
③ z	1	0	-3	2	0	90+2Δ

①－②×1/5
②×3/5
③－②×(-9/5)

x_1	0	1	0	2/5	-1/5	10+2/5Δ
x_2	0	0	1	-1/5	3/5	15-1/5Δ
z	1	0	0	7/5	9/5	135+7/5Δ

最適解発見時の記録を利用

掃き出し操作記録

最適解を得て停止

⇒ $10+2/5\Delta \geqq 0$, $15-1/5\Delta \geqq 0$ ⇒ $-25 \leqq \Delta \leqq 75$ ⇒ 機械Aの増加限界 75h

応用 新製品Rは生産すべき?

- 2つの液体製品P,Qは機械A,Bを用いて加工される
- 利益が最大になる1週間の製品P,Qの加工量は？

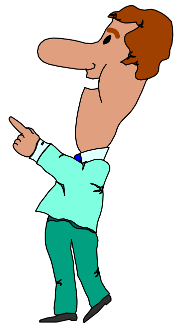
	液体P 1ml	液体Q 1ml	使用可能量
機械A	3(h)	1(h)	45(h/週)
機械B	1(h)	2(h)	40(h/週)
利益	6(万円)	5(万円)	

現在の解

液体P:10(ml),液体Q:15(ml), 最大利益 135(万円)

新製品　液体Rの概要

- 液体Rの1(ml)生産に機械Aを3(h)，機械Bを2(h)使用
- 液体Rの1(ml)当たりの予想利益は8（万円）.
- 機械A,Bの使用可能時間は変化なし（各45h,40h）



判断の基準

もしも 新製品Rを1(ml)生産 ⇨ 機械A,Bを使用 ⇨ 製品P,Q減産

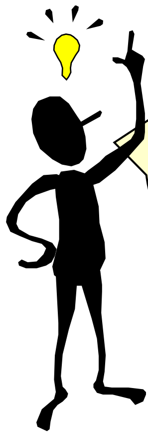
⇨ 製品PとQから得ていた利益が減少

??（万円）

比較

新製品Rを1(ml)生産により利益が増加

8（万円）



機械A,Bの限界価値を考えよう

応用(続) 製品R製造の影響評価

製品Rを1(ml)製造

↓

機械A 3(h), 機械B 2(h) 使用

↓

機械A 現在の限界価値 : 7/5 万円/h
機械B 現在の限界価値 : 9/5 万円/h

製品P,Qから得ていた利益の減少額 : 3 × 7/5+2 × 9/5=39/5万円

比較 ↕

製品R 1(ml)の予想利益 8万円

利益が出る!
製品Rを製造しよう

ワーク1 文教工業では原料A,B,Cから製品P,Qを製造.

	製品P 1(kl)	製品Q 1(kl)	使用限度
原料A	1kg	7kg	140kg
原料B	2kg	4kg	100kg
原料C	3kg	2kg	120kg
利益	3万円	2万円	

(1) 利益を最大にする生産計画を示せ.

(2) 原料A,B,Cの限界価値を求めよ.
また，その意味を具体的に解釈せよ.

(3) 原料A,B,Cの増加限界を求めよ.

(4) 次の新製品Rは製造すべきか?

開発製品Rの情報

1(kl)あたり

- 原料A,B,Cを各5,3,1(kg)使用
- 予想利益は2万円

ワーク1　ヒント

x_1 : Pの生産量
x_2 : Qの生産量

定式化

$$\begin{aligned} \text{max.}\ & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + 7x_2 \leqq 140 \\ & 2x_1 + 4x_2 \leqq 100 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leqq 120 \\ & x_1, x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

シンプレクス表

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	s3	定数項
s1	0	1	7	1	0	0	140
s2	0	2	4	0	1	0	100
s3	0	3	2	0	0	1	120
z	1	−3	−2	0	0	0	0

⇩

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	s3	定数項
s1	0	0	19/3	1	0	−1/3	100
s2	0	0	8/3	0	1	−2/3	20
x1	0	1	2/3	0	0	1/3	40
z	1	0	0	0	0	1	120

最適解 $(x_1, x_2) = (40, 0)$, 最適値 120

例題2 利益の変化

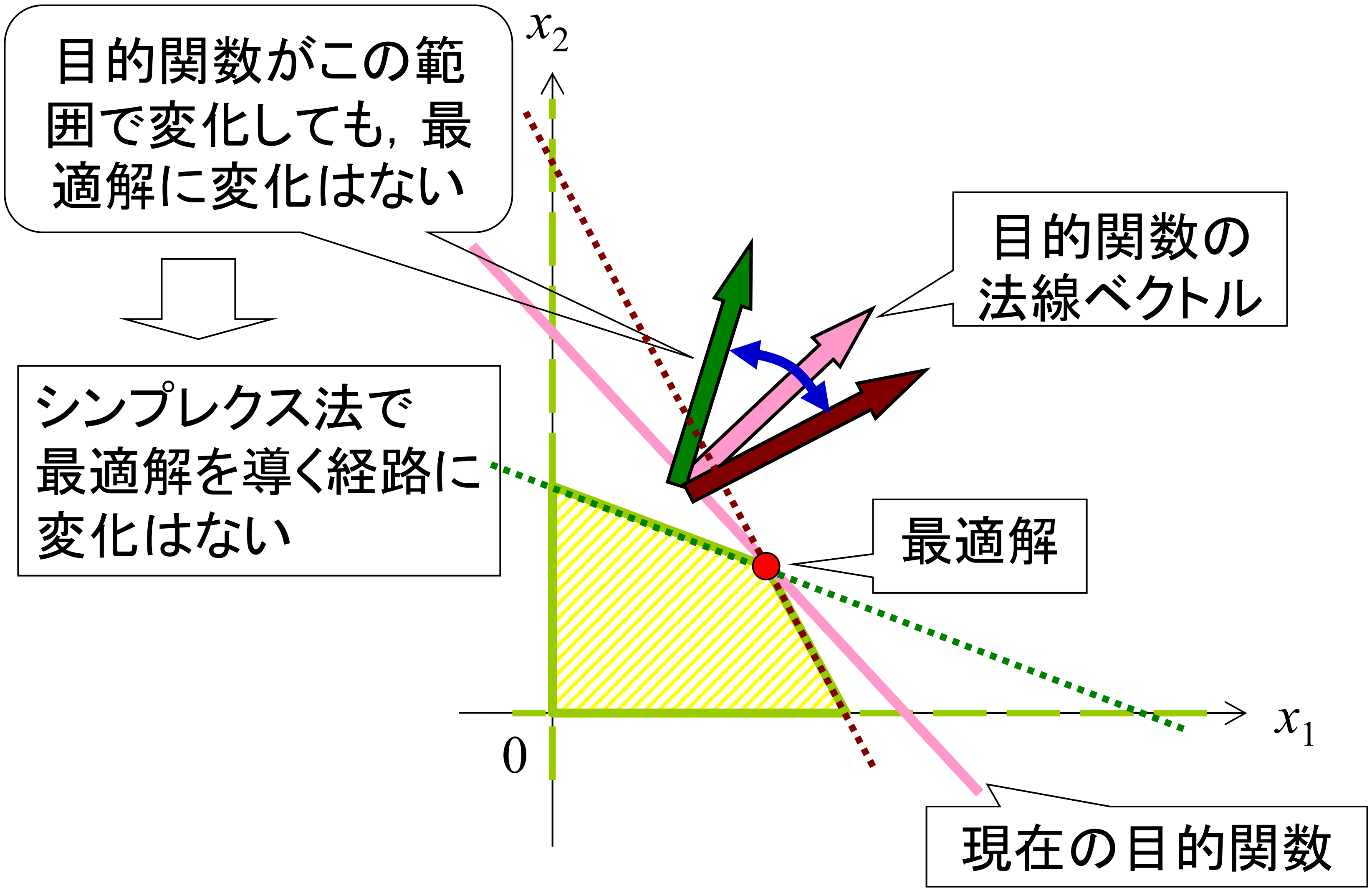
	液体P 1ml	液体Q 1ml	使用可能時間
機械A	3(h)	1(h)	45(h/週)
機械B	1(h)	2(h)	40(h/週)
利益	6(万円)	5(万円)	

最適生産計画
液体P : 10 ml
液体Q : 15 ml

お知らせ
液体Qの利益が8万円/klに変化

生産計画は変更必要?

目的関数の係数変化の影響



例題2

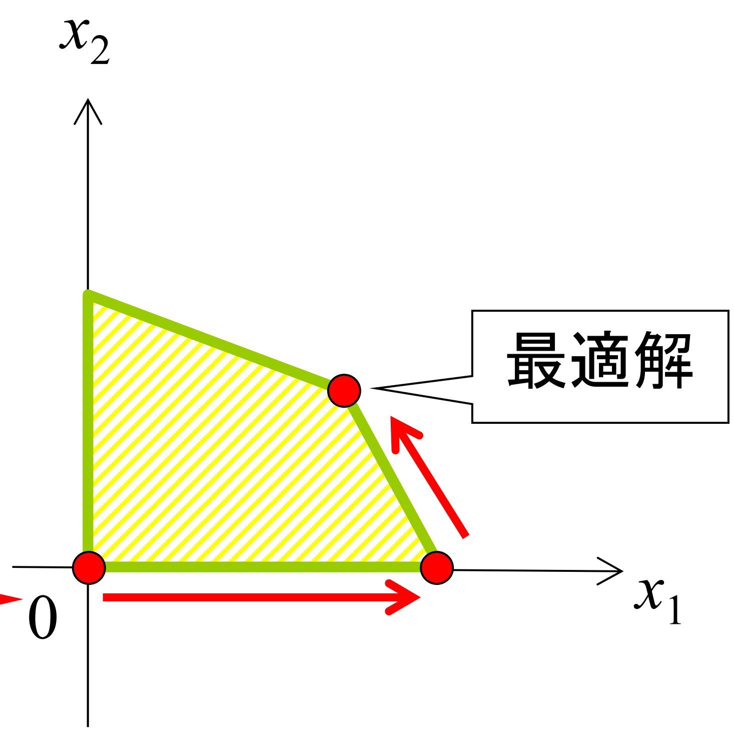
もし利益がΔだけ変化したら…

製品Pの利益：6万円/ml（変化無し）
製品Qの利益：（5+Δ）万円/ml

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\ & z=6x_1+(5+\Delta)x_2 \\
\text{s.t.}\ & 3x_1+x_2 \leqq 45 \\
& x_1+2x_2 \leqq 40 \\
& x_1, x_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

最適解が変化しないとしたら・・・

同じ経路で最適解に
辿りつくはず



最適解発見経路の追跡

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項
s_1	0	3	1	1	0	45
s_2	0	1	2	0	1	40
z	1	-6	-5-Δ	0	0	0
x_1	0	1	1/3	1/3	0	15
s_2	0	0	5/3	-1/3	1	25
z	1	0	-3-Δ	2	0	90
x_1	0	1	0	2/5	-1/5	10
x_2	0	0	1	-1/5	3/5	15
z	1	0	0	7/5-Δ/5	9/5+3Δ/5	135+15Δ

最適解発見時の記録を利用

掃き出し操作記録

①× 1/3
②ー①× 1/3
③ー①× (-2)

①ー②× 1/5
②× 3/5
③-②× (-9/5-3/5Δ)

最適解を得て停止

最適解(x_1,x_2)=(10,15), 最適値 135+15Δ

例題2

最適解が変化しないΔの範囲

x_1	0	1	0	2/5	-1/5	10
x_2	0	0	1	-1/5	3/5	15
z	1	0	0	7/5-Δ/5	9/5+3Δ/5	135+15Δ

$$\frac{7}{5}-\frac{\Delta}{5}\geq 0$$

$$\Delta \leq 7$$

$$\frac{9}{5}+\frac{3\Delta}{5}\geq 0$$

$$\Delta \geq -3$$

現在の基底解が最適
⇔z行の要素がすべて非負

よって，-3≦Δ≦7 の範囲の時，最適解は変わらない

⇒ 製品Qの利益が2万円/ml～12万円/mlの間で変化しても最適解は変化しない

練習 製品Pの利益率の変化

	液体P	液体Q	使用可能時間
機械A	3(h/ml)	1(h/ml)	45(h/週)
機械B	1(h/ml)	2(h/ml)	40(h/週)
利益	6(万円/ml)	5(万円/ml)	

最適生産計画
液体P : 10 ml
液体Q : 15 ml

現在の最適解が維持される
液体Pの利益の変化の範囲を求めよ

練習 最適解発見経路の追跡

最適解発見時の記録を利用

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項
s_1	0	3	1	1	0	45
s_2	0	1	2	0	1	40
z	1	-6-Δ	-5	0	0	0

掃き出し操作記録

①×1/3
②−①×1/3
③−①×(-2-1/3Δ)

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項
x_1	0	1	1/3	1/3	0	15
s_2	0	0	5/3	-1/3	1	25
z	1	0	-3+Δ/3	2+Δ/3	0	90+15Δ

①−②×1/5
②×3/5
③-②×(-3+1/3Δ)

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項
x_1	0	1	0	2/5	-1/5	10
x_2	0	0	1	-1/5	3/5	15
z	1	0	0	7/5+3Δ/5	9/5-Δ/5	135+10Δ

最適解を得て停止

$$\frac{7}{5}+\frac{3\Delta}{5} \geq 0 \quad \Delta \geqq -7/3$$

$$\Delta \leqq 9 \quad \frac{9}{5}-\frac{\Delta}{5} \geq 0$$

最適解(x_1, x_2)=(10,15),
最適値 135+10Δ

よって，-7/3≦Δ≦9 の範囲の時，最適解は変わらない

⇨ 製品Qの利益が11/3万円/ml～15万円/mlで変化しても影響なし

ワーク2

製品Q利益情報の頑健性

現在の状況（演習1と同一）

	製品P 1kl	製品Q 1kl	使用限度
原料A	1kg	7kg	140kg
原料B	2kg	4kg	100kg
原料C	3kg	2kg	120kg
利益	3万円	2万円	

製品Qの利益は推定値

利益情報の曖昧さが最適生産計画与える影響は?

ワーク2 ヒント

x_1:Pの生産量
x_2:Qの生産量

定式化

$$\begin{aligned} \text{max. } & z=3x_1+2x_2 \\ \text{s.t. } & x_1+7x_2 \leqq 140 \\ & 2x_1+4x_2 \leqq 100 \\ & 3x_1+2x_2 \leqq 120 \\ & x_1, x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

⇩

$$\begin{aligned} \text{max. } & z=3x_1+(\mathbf{2+\Delta})x_2 \\ \text{s.t. } & x_1+7x_2 \leqq 140 \\ & 2x_1+4x_2 \leqq 100 \\ & 3x_1+2x_2 \leqq 120 \\ & x_1, x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

シンプレクス表

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	s3	定数項
s1	0	1	7	1	0	0	140
s2	0	2	4	0	1	0	100
s3	0	3	2	0	0	1	120
z	1	−3	−2	0	0	0	0

⇩

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	s3	定数項
s1	0	0	19/3	1	0	−1/3	100
s2	0	0	8/3	0	1	−2/3	20
x1	0	1	2/3	0	0	1/3	40
z	1	0	0	0	0	1	120

最適解$(x_1,x_2)=(40,0)$, 最適値 120

まとめ

- シンプレクス法を利用し，
  最適解の周辺情報を得ることができる
  感度分析
- 感度分析で得た値から，
  問題解決の糸口を得ることができる