

よりスマートに感度分析をしよう

# シンプレクス法で辿った経路の 記憶と復元

基底行列の利用

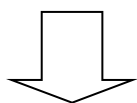


復習

# 感度分析の概要

仮定

機械Aの使用可能時間を変えずに、  
機械Bの使用可能時間を $\Delta$ 増やした



デルタ

微量変化を示す記号

知りたいこと

限界価値

最適値はどう変化する？  
その変化が有効な範囲は？

増加限界

max.  $z$

$$\text{s.t. } 3x_1 + x_2 + s_1 = 45$$

$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 40 + \Delta$$

$$z - 6x_1 - 5x_2 = 0$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

# 最適解発見経路の追跡



もっと  
スマートに!?



最適解発見時の  
記録を利用

掃き出し操作記録

	z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	定数項
① $s_1$	0	3	1	1	0	45
② $s_2$	0	1	2	0	1	$40 + \Delta$
③ z	1	-6	-5	0	0	0

① $x_1$	0	1	$1/3$	$1/3$	0	15
② $s_2$	0	0	$5/3$	$-1/3$	1	$25 + \Delta$
③ z	1	0	-3	2	0	90

①  $\times 1/3$

②  $-$  ①  $\times 1/3$

③  $-$  ①  $\times (-2)$

①  $-$  ②  $\times 1/5$

②  $\times 3/5$

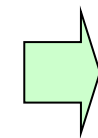
③  $-$  ②  $\times (-9/5)$

$x_1$	0	1	0	$2/5$	$-1/5$	$10 - 1/5\Delta$
$x_2$	0	0	1	$-1/5$	$3/5$	$15 + 3/5\Delta$
z	1	0	0	$7/5$	$9/5$	$135 + 9/5\Delta$

最適解を得て停止

最適解  $(x_1, x_2) = (10 - 1/5\Delta, 15 + 3/5\Delta)$ ,  
最適値  $135 + 9/5\Delta$


$$\begin{cases} 10 - 1/5\Delta \geq 0 \\ 15 + 3/5\Delta \geq 0 \end{cases}$$



$$-25 \leq \Delta \leq 50$$

# 辿った経路の記憶法

	基底	z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	定数項	増加限界			
①	$s_1$	0	3	1	1	0	45	15	1	0	0
②	$s_2$	0	1	2	0	1	40	40	0	1	0
③	z	1	-6	-5	0	0	0		0	0	1


  
 ①  $\times 1/3$   
 ②  $- ① \times 1/3$   
 ③  $- ① \times (-2)$

この情報で記憶可

①	$x_1$	0	1	1/3	1/3	0	15	45	1/3	0	0
②	$s_2$	0	0	5/3	-1/3	1	25	10	-1/3	1	0
③	z	1	0	-3	2	0	90		2	0	1

# 辿った経路の記憶法(2)

基底	z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	定数項	増加限界			
① $x_1$	0	1	1/3	1/3	0	15	45	1/3	0	0
② $s_2$	0	0	5/3	-1/3	1	25	10	-1/3	1	0
③ z	1	0	-3	2	0	90		2	0	1

① - ②  $\times$  1/5  
 ②  $\times$  3/5  
 ③ - ②  $\times$  (-9/5)

掃き出しを記録

$x_1$	0	1	0	2/5	-1/5	10		2/5	-1/5	0
$x_2$	0	0	1	-1/5	3/5	15		-1/5	3/5	0
z	1	0	0	7/5	9/5	135		7/5	9/5	1

# 復習 行列の積

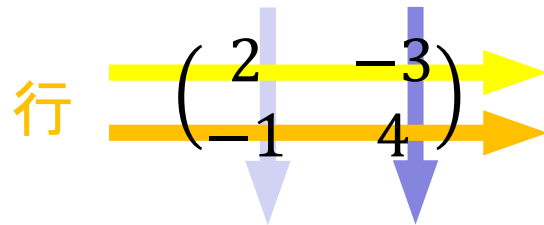
行列：数などが矩形状に配列されたもの

例

列

(同じ大きさの)行列は足し算可能

同じ位置の数の和



$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(サイズが合えば)行列は掛け算可能

1列目

(行) × (列)の和

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 15 \\ 5 & -16 \end{pmatrix}$$

2行1列の値

$$(-1) \times 3 + 4 \times 2 + 0 \times 0$$

欲しい位置だけ計算可能

# 記憶の利用(1)

掃き出しの記録

$2/5$	$-1/5$	0
$-1/5$	$3/5$	0
$7/5$	$9/5$	1

初期のシンプレックス表

z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	定数項
0	3	1	1	0	45
0	1	2	0	1	40
1	-6	-5	0	0	0

×

=

0	1	0	$2/5$	$-1/5$	10
0	0	1	$-1/5$	$3/5$	15
1	0	0	$7/5$	$9/5$	135

最後のシンプレックス表

# 記憶の利用(2)

掃き出しの記録

$2/5$	$-1/5$	$0$
$-1/5$	$3/5$	$0$
$7/5$	$9/5$	$1$

×

初期のシンプレックス表

$z$	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	定数項
$0$	$3$	$1$	$1$	$0$	$45+\Delta$
$0$	$1$	$2$	$0$	$1$	$40$
$1$	$-6$	$-5$	$0$	$0$	$0$

=

$0$	$1$	$0$	$2/5$	$-1/5$	$10+2/5\Delta$
$0$	$0$	$1$	$-1/5$	$3/5$	$15-1/5\Delta$
$1$	$0$	$0$	$7/5$	$9/5$	$135+7/5\Delta$

最後のシンプレックス表



# 記憶の利用(3)

掃き出しの記録

$2/5$	$-1/5$	$0$
$-1/5$	$3/5$	$0$
$7/5$	$9/5$	$1$

初期のシンプレックス表

Z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	定数項
$0$	$3$	$1$	$1$	$0$	$45$
$0$	$1$	$2$	$0$	$1$	$40$
$1$	$-6$	$-5-\Delta$	$0$	$0$	$0$

×

=

$0$	$1$	$0$	$2/5$	$-1/5$	$10$
$0$	$0$	$1$	$-1/5$	$3/5$	$15$
$1$	$0$	$-\Delta$	$7/5$	$9/5$	$135$

最後のシンプレックス表

# 記憶の利用(4)

最後のシンプレックス表

=

0	1	0	$2/5$	$-1/5$	10
0	0	1	$-1/5$	$3/5$	15
1	0	$-\Delta$	$7/5$	$9/5$	135

基底の  
役割の  
明確化



0	1	0	$2/5$	$-1/5$	10
0	0	1	$-1/5$	$3/5$	15
1	0	0	$7/5 - 1/5\Delta$	$9/5 + 3/5\Delta$	$135 + 15\Delta$

IIV  
0

IIV  
0

# 基底行列と逆行列

掃き出しの記録

$B^{-1}$	0
★	★

基底行列の逆行列

初期のシンプレックス表

基底変数      非基底変数      定数項

B	N	b
$c_B$	$c_N$	0

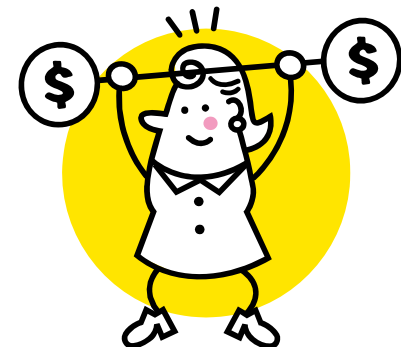
E	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
$c_B$	$c_N$	0

E	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
0	$c_N - c_B B^{-1}N$	$-c_B B^{-1}b$



# ここでのまとめ

- 感度分析をスマートに実行するコツ
  - シンプレクス法の過程を記録(逆行列)
  - 逆行列を利用し欲しい部分だけ再現



# シンプレクス法で辿った経路の 記憶法

逆行列とその利用のトレーニング



# 練習1(2) 「150」の感度分析(限界値と増加限界を求めよ)

$$\begin{aligned} \max. \quad & z=30x_1+20x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1+3x_2 \leq 150+\Delta \\ & 2x_1+x_2 \leq 160 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

① 準備

記憶(逆行列)


×

↓最初のシンプレクス表

基底	Z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	定数項
$s_1$						$150+\Delta$
$s_2$						160
Z						0

② 必要部分で  
行列の積を計算

=

基底	Z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	定数項
Z						

③ 増加限界:  
非負性から  
 $\Delta$ 範囲計算

⑤ 感度分析の結果

④ 限界値 ▲

限界値:  
増加限界:



# 練習1(3) 「160」の感度分析(限界値と増加限界を求めよ)

$$\begin{aligned} \max. \quad & z=30x_1+20x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1+3x_2 \leq 150 \\ & 2x_1+x_2 \leq 160+\Delta \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

① 準備

記憶(逆行列)


↓最初のシンプレクス表

基底	Z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	定数項
$s_1$						
$s_2$						
Z						

② 必要部分で  
行列の積を計算

×

=

基底	Z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	定数項
Z						

③ 増加限界:  
非負性から  
 $\Delta$ 範囲計算

④ 限界値 ▲

⑤ 感度分析の結果

限界値:  
増加限界:





# 練習1(4) 「30」の感度分析(費用の感度分析)

$$\begin{aligned}
 \max. z &= (30 + \Delta)x_1 + 20x_2 \\
 \text{s.t.} \quad &x_1 + 3x_2 \leq 150 \\
 &2x_1 + x_2 \leq 160 \\
 &x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

① 準備

記憶(逆行列)


×

↓最初のシンプレクス表

基底	Z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	定数項
$s_1$						
$s_2$						
Z	1	$-30-\Delta$	-20	0	0	0
Z						

② 必要部分で  
行列の積を計算

=

③ Z行で基底の役割の明確化

Z						
---	--	--	--	--	--	--

④ 非負性から $\Delta$ 範囲計算

⑤ 感度分析の結果

最適解が変化しない $\Delta$ の範囲:



# 練習1(5) 「20」の感度分析(費用の感度分析)

$$\begin{aligned}
 \max. \quad & z = 30x_1 + (20 + \Delta)x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 + 3x_2 \leq 150 \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 160 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

① 準備

記憶(逆行列)


×

↓最初のシンプレクス表

基底	Z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	定数項
$s_1$						
$s_2$						
Z	1	-30	$-20 - \Delta$	0	0	0
Z						

② 必要部分で  
行列の積を計算

=

③ Z行で基底の役割の明確化

Z						
---	--	--	--	--	--	--

④ 非負性から $\Delta$ 範囲計算

⑤ 感度分析の結果

最適解が変化しない $\Delta$ の範囲:

