整数計画の定式化

整数変数を活用した定式化

整数計画の特徴的な定式化

分類後の主な問題名

変数型	目的関数	条件式	問題名	+Programming	略称
連続型	線形	線形	線形計画	Linear	LP
	2次関数	線形	2次計画	Quadratic	QP
	凸関数	凸関数	凸計画	Convex	CP
	非線形	非線形	非線形計画	Nonlinear	NLP
離散型	—	—	整数計画	Integer	IP
	凸	凸	離散凸計画	Discrete Convex	
2値型	—	—	0-1整数計画	Binary Integer	BIP
混合	—	—	混合整数計画	Mixed Integer	MIP

※ 凸計画の等式制約は線形

定式化

学習済

整数変数の追加で
表現力が(すごく)増す!

例で紹介

属する　整数

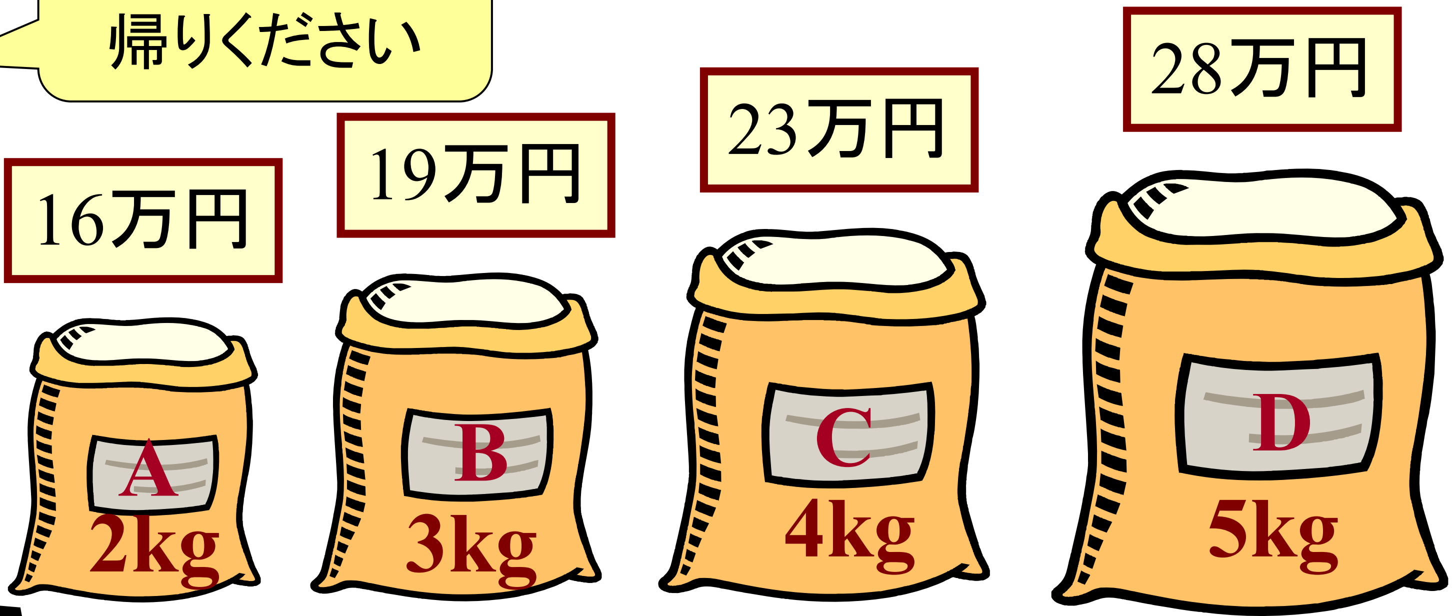
独語 **Zahlen**(=数)より

- 変数xは整数 $\Leftrightarrow x \in Z$　を表す記号
- 変数xは2値　$\Leftrightarrow x \in \{0,1\}$

{　}内の要素をとる

(参考)　非負整数: Z_+
正の整数: Z_{++}
実数: R

例題3 ナップザック問題



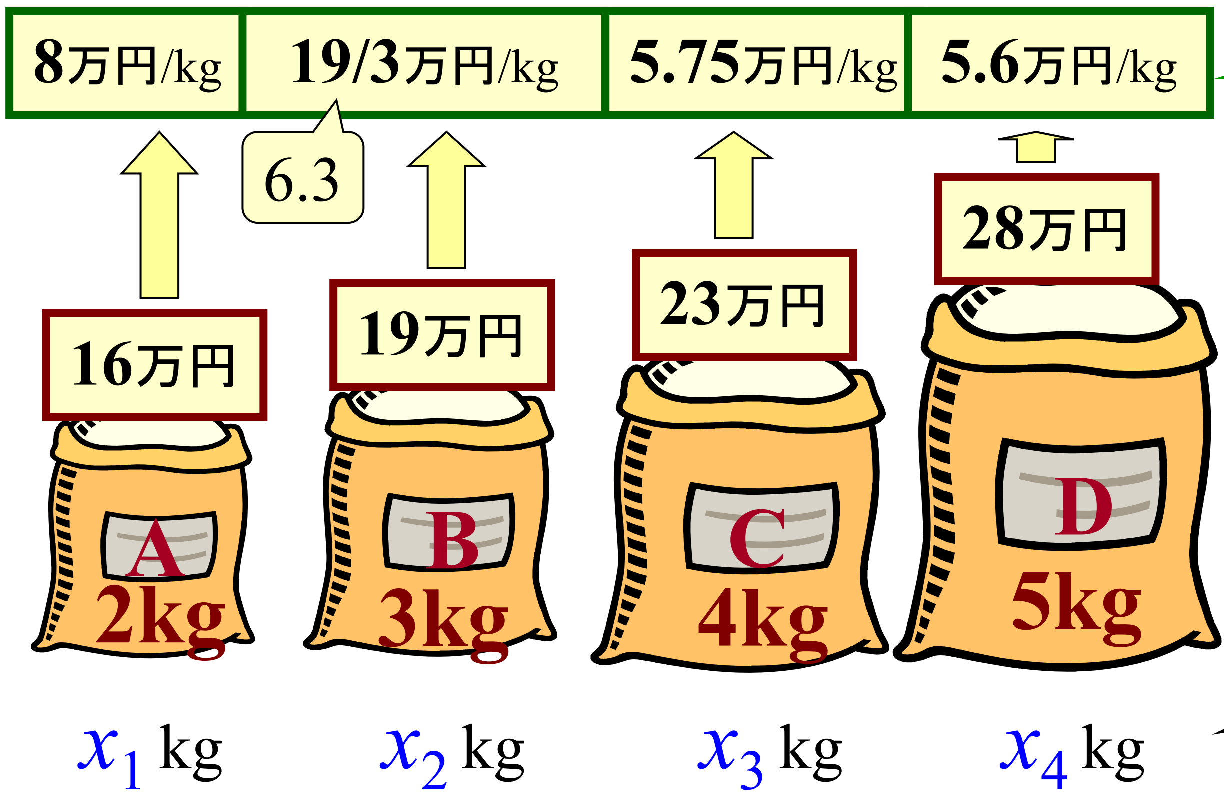
重量制限: 7kg

なるべく総価値を高く持って帰りたい.
どれを何Kg持って帰る?

⇒定式化してみよう

久保・松井著:組合せ最適化[短編集](1999)朝倉書店より

例題3（続）
分割可の時



単位価値額

変数:積む量

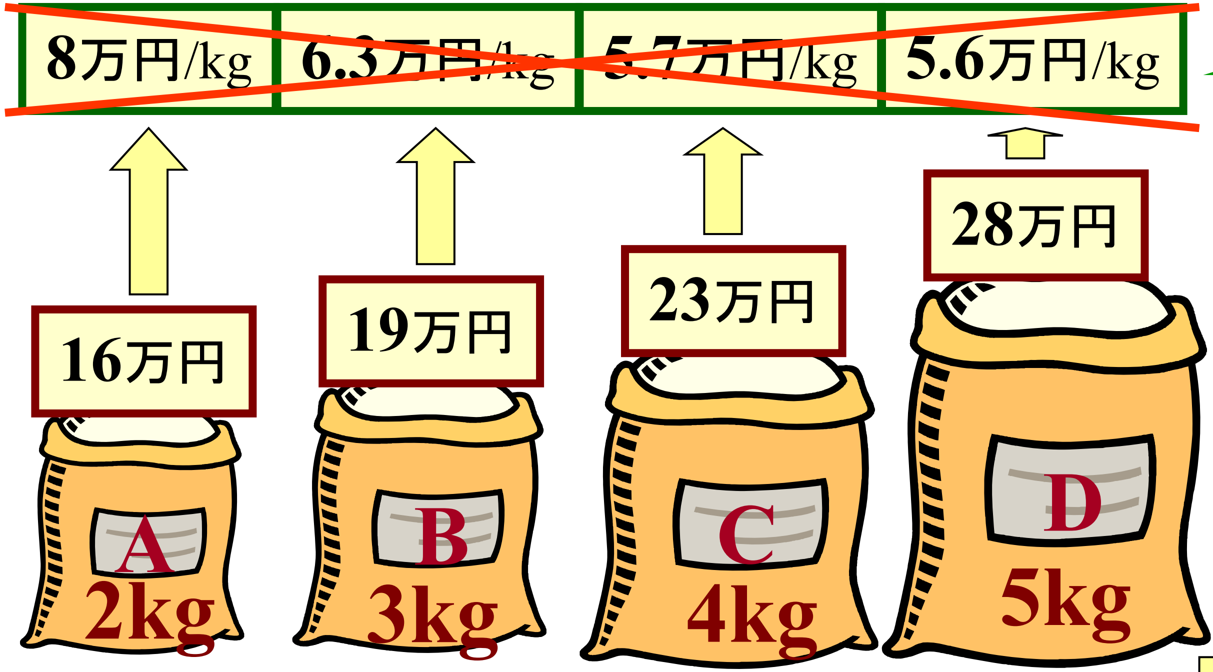
線形計画

$$\text{max. } z = 8x_1 + 19/3x_2 + 5.75x_3 + 5.6x_4$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqq 7$$

$$x_1 \leqq 2,\ x_2 \leqq 3,\ x_3 \leqq 4,\ x_4 \leqq 5,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0$$



~~単位価値額~~

例題3（続）
分割不可の時

x_1 x_2 x_3 x_4

2値（0-1）変数

積む時：$x=1$

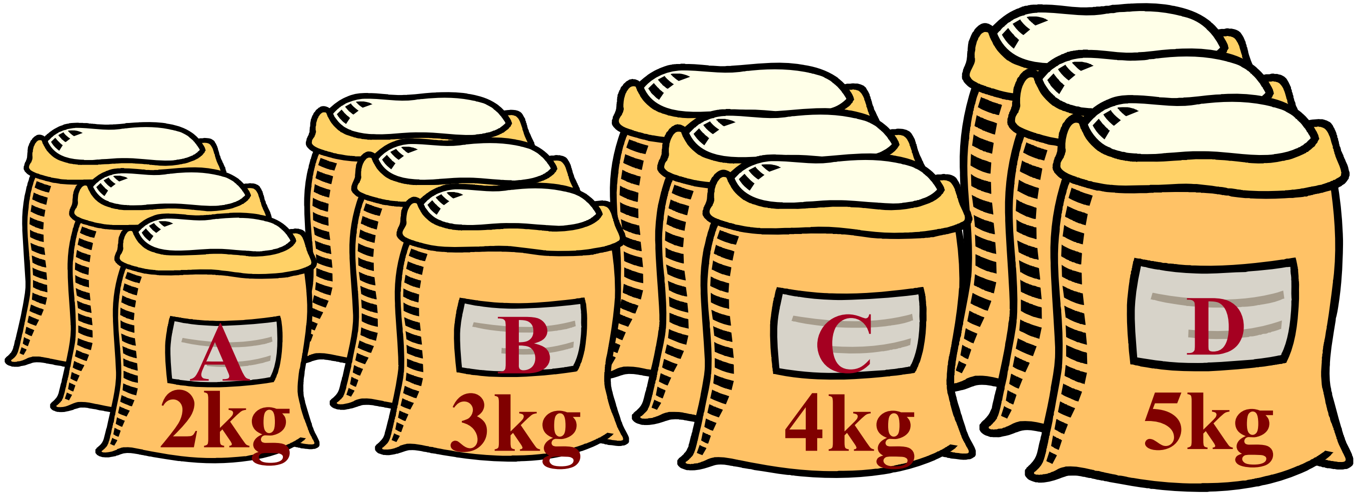
積まない時：$x=0$

0-1整数計画

$$\begin{aligned}
&\text{max. } z=16x_1+19x_2+23x_3+28x_4 \\
&\text{s.t.} \quad 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4 \leqq 7 \\
&\qquad\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

記号∈
元として含まれる

16万円/袋 19万円/袋 23万円/袋 28万円/袋



例題3（続）分割不可 複数可の時

x_1 袋　x_2 袋　x_3 袋　x_4 袋

変数:いくつ積む?

整数計画

$$
\begin{aligned}
\text{max.}\ & z=16x_1+19x_2+23x_3+28x_4 \\
\text{s.t.}\ & 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4 \leqq 7 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \in Z_+
\end{aligned}
$$

記号 Z_+
非負整数の集合

16万円/袋　19万円/袋　23万円/袋　28万円/袋

Dのみ分割可

例題3（続）
分割一部可
複数可の時

x_1 袋　x_2 袋　x_3 袋　x_4 袋

変数:何袋分積む?

変数:何袋積む?

混合整数計画

$$\text{max. } z=16x_1+19x_2+23x_3+28x_4$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4 \leqq 7$$

$$x_1, x_2, x_3 \in Z_+, \ \boldsymbol{x_4 \geqq 0}$$

整数変数の利用
様々な状況表現

例題3（続）分割不可の時(別表現)

2kg,3kg,4kg,5kg

カートの重量制限（kg）

対象の粉を順に増やす

積む　積まない　+0　+16　+19　+23　+28

	0	1	2	3	4	5	6	7
なし	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
	**0**	**0**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**	**16**
	**0**	**0**	**16**	**19**	**19**	**35**	**35**	**35**
	**0**	**0**	**16**	**19**	**23**	**35**	**39**	**42**
	**0**	**0**	**16**	**19**	**23**	**35**	**39**	**44**

16万,19万,23万,28万

例題3（続）動的計画法

カートの重量制限

	0	1	2	3	4	5	6	7
	**0**	**0**	**16**	**19**	**19**	**35**	**35**	**35**
 4kg	**0**	**0**	**16**	**19**	**23**	**35**	**39**	**42**

+23

粉がk種類，カートの制限重量がαkgの時の最適値

制限重量αが粉kの重み以下のとき

粉kを積まない

粉kを積む

$$f(k,\alpha)=\begin{cases} f(k-1,\alpha) \\ \max\{f(k-1,\alpha),\ (k\text{の価値})+f(k-1,\alpha-(k\text{の重み}))\} \end{cases}$$

比較して，価値の高い方を採用

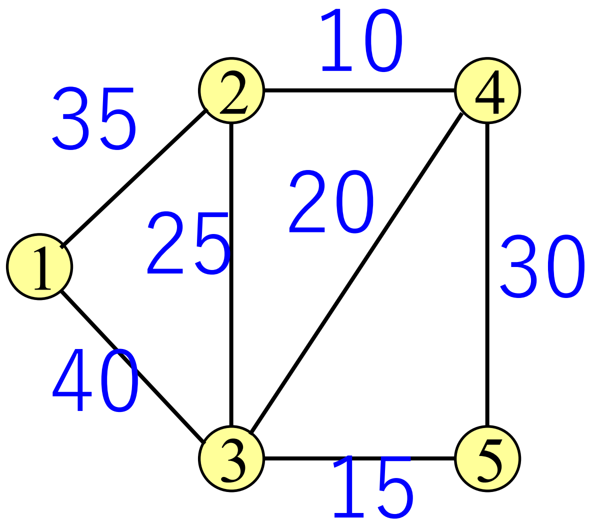
再帰方程式

⇨ 動的計画法 Dynamic Programming（DP）

例題4 ガス管配置

5軒の家にガスを供給したい

設置費用が最小になるガス管の設置方法は?



定式化してみよう

目的 設置費用合計→最小
制約 5軒にガスを供給

⇕

ガス管が繋がっている＋5軒を張っている

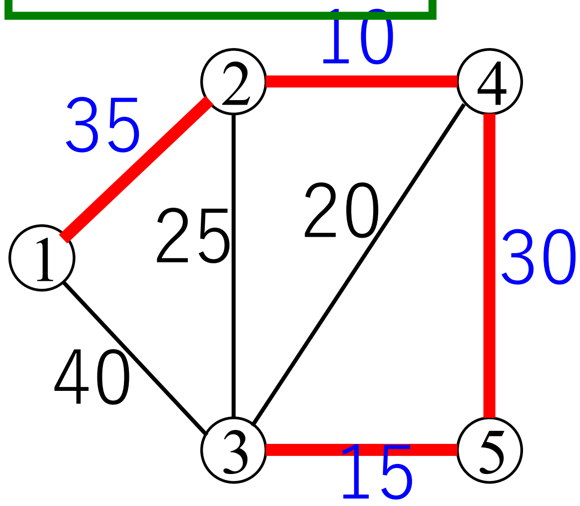
枝:設置可能路線
数字:設置費用

例題4（続）実行可能解が持つ性質

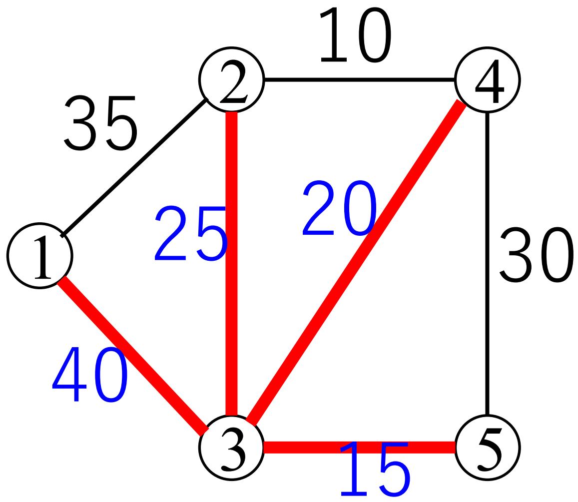
閉路は無駄 ⇒ 閉路の無いグラフ＝木
全点を結ぶ ⇒ 全張(spanning;スパンする)

全張木
spanning tree

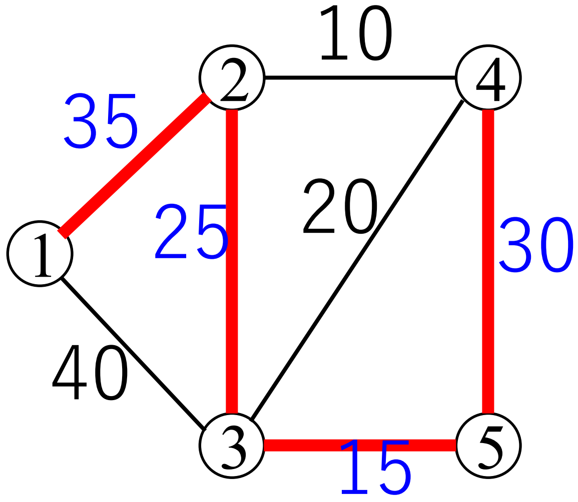
様々な全張木



35+10+30+15=90



40+25+20+15=100



35+25+30+15=105

問題の本質 重み和最小の全張木（最小木）を見つけよ

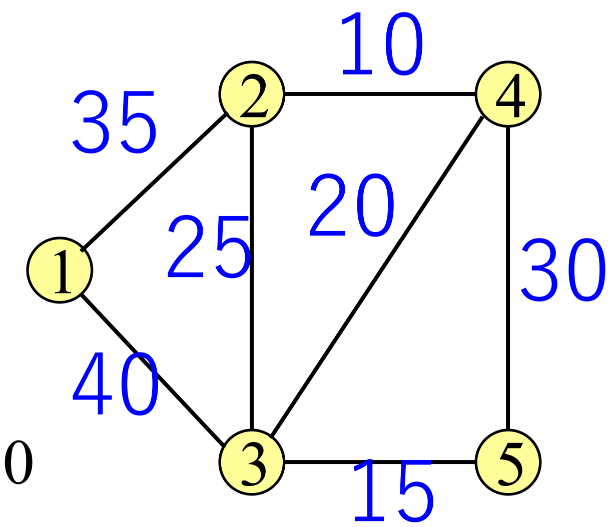
⇔ 最小木問題

Minimum spanning tree problem

例題4（続） 最小木問題の定式化

解きたい問題

目的 利用枝の重みの和→最小
制約 利用枝は全点を結ぶ
　　 利用枝に閉路がない



使用変数

x_{ij}:枝(i,j)を利用する時1，利用しない時0

目的関数

$$\min.\ z=35x_{12}+40x_{13}+25x_{23}+10x_{24}+20x_{34}+15x_{35}+30x_{45}$$

制約条件式は?

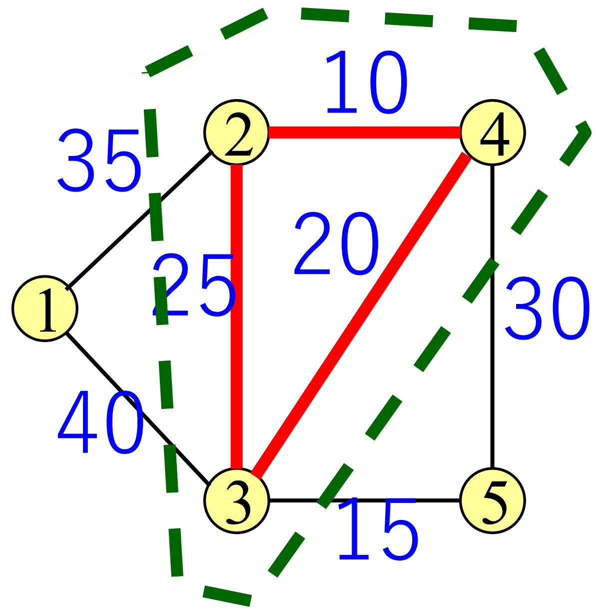
例題4(続)「閉路がない」の表現

閉路がない ⟷ 閉路がある

(部分点集合内での使用枝数) < (部分点集合の大きさ)

(部分点集合内での使用枝数) = (部分点集合の大きさ)

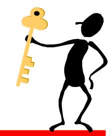
(部分点集合内での使用枝数) ≦ (部分点集合の大きさ) − 1



例 点部分集合{②,③,④}に対して

$$x_{23}+x_{24}+x_{34} \leqq 2$$

例題4（続）定式化



$$\text{min. } z=35x_{12}+40x_{13}+25x_{23}+10x_{24}+20x_{34}+15x_{35}+30x_{45}$$

$$\text{s.t.} \quad x_{12}+x_{13}+x_{23}+x_{24}+x_{34}+x_{35}+x_{45}=4$$

（使用枝本数）≦（部分集合の大きさ）－１

$$x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, x_{35}, x_{45} \in \{0,1\}$$

全部分集合に対して

部分集合は$2^{(\text{点数})}$個存在

定式化は可能だが
サイズ大で実際には扱えない

⇒ 使用枝の組合せを決める問題

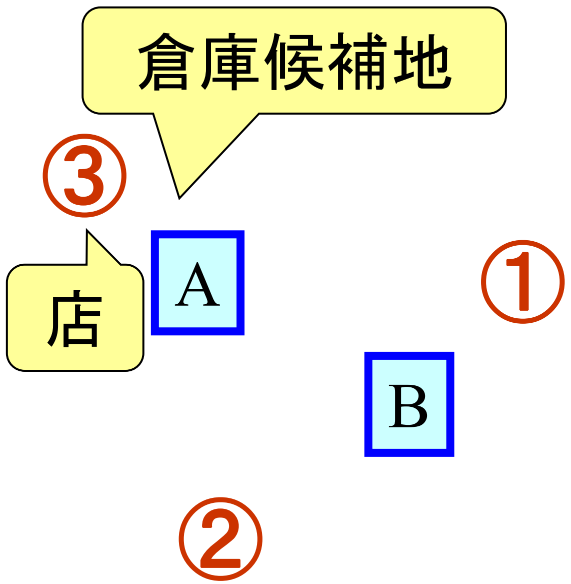
⇒ **組合せ最適化問題** combinatorial optimization problem

離散最適化問題 discrete optimization problem

演習3 施設配置問題

施設配置問題

（建設費）＋（10年分配送費）を最小にしたい．
どこに倉庫を建設し，どう配送すればよいか．



- 建設費用 倉庫A 10億円，倉庫B 12億円
- 倉庫→店の配送費用

	店1	店2	店3
倉庫A	6万円/t	8万円/t	5万円/t
倉庫B	4万円/t	7万円/t	9万円/t

- 各店の需要（10年分）※分割配送可

店1	店2	店3
12000t	18000t	15000t

[ヒント] コントロールできるもの

倉庫→店への配送量⇒実数値 $x_{\mathrm{ij}} \geqq 0$

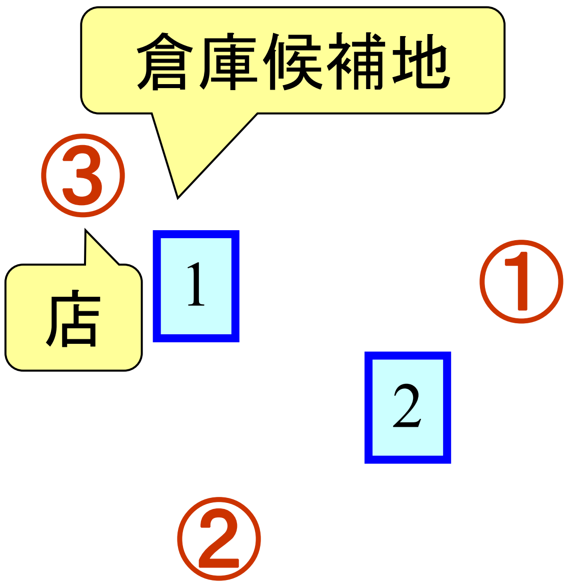
倉庫を建設する･しない⇒2値 $y_{\mathrm{i}} \in \{0,1\}$

※建設した倉庫からしか
配送はできない

演習3の一般化

施設配置問題

(建設費)＋(配送費)を最小にしたい.
どこに倉庫を建設し,
どのように配送すればよいか.
この問題を定式化せよ.



ヒント

コントロールできるもの

$0 \leqq x_{ij} \leqq 1$

倉庫iから店jへの配送量⇒0～1の値

倉庫iを建設する・しない⇒2値

$y_i \in \{0,1\}$

- 倉庫iの建設費用 f_i (i=1,2)
- 倉庫iと店j間の配送費用 c_{ij} (i=1,2 ; j=1,2,3)
- 各店の需要は1. 分割配送可能.

今後の展開

最もシンプルな数理計画問題

線形計画問題の解き方から最適化の基礎を学ぶ

寄り道

正しい「組合せ最適化」の書き方

◎組み合わせる（動詞）

意味が違う

× 組み合わせ最適化
× 組合わせ最適化
× 組合最適化