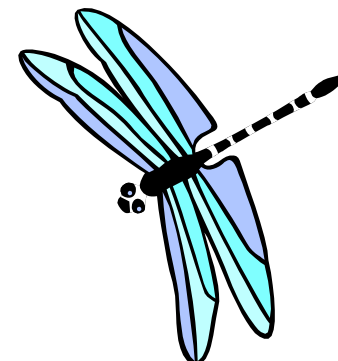


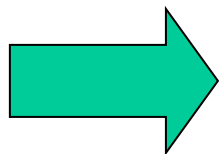
# 連立方程式の解き方

行列と連立方程式  
ガウスの消去法

# 連立方程式



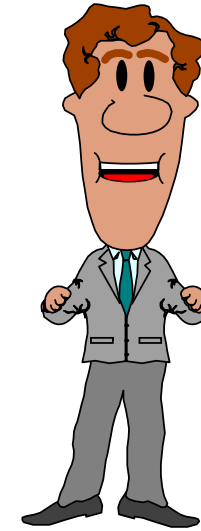
- さまざまな問題に現れる
  - モデル分析の基本
- 実際には数多くの変数, 方程式から成る連立方程式を解く必要がある.
  - 例: 飛行機クルーのスケジュール  
1万変数, 100万本の方程式



効率のよい連立方程式の扱い方を  
知ることは重要

# 例題1 連立方程式

解いてみよう!!



$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 45 & \cdots \textcircled{1} \\ x_1 + 2x_2 = 40 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

中・高校での方法

## 代入法

①より  $x_2 = -3x_1 + 45 \cdots \textcircled{1}'$

②に①'を代入

$$x_1 + 2(-3x_1 + 45) = 40$$

よって  $x_1 = 10, x_2 = 15$

## 加減法

$$6x_1 + 2x_2 = 90 : \textcircled{1} \times 2$$

$$\begin{array}{r} -) \quad x_1 + 2x_2 = 40 : \textcircled{2} \\ \hline \end{array}$$

$$5x_1 = 50$$

$$x_1 = 10, x_2 = 15$$



- 変数が多くなったら大変そう
- 式が多くなったら大変そう

## 例題2 解いてみよう

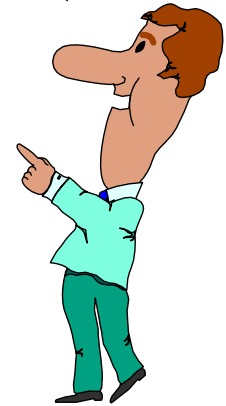
$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 44 & \cdots \textcircled{1} \\ 3x_1 - 4x_2 + 18x_3 = 76 & \cdots \textcircled{2} \\ 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 11 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

どうやるんだ?

いきなり解くのは大変そう

→ 同じ解を持つ やさしい問題 に変形して解く

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 22 & \cdots \textcircled{1} \\ x_2 + 3x_3 = 5 & \cdots \textcircled{2} \\ x_3 = 3 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$



# 連立方程式の変形



解を比較してみよう

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 = 45 \quad \cdots \textcircled{1} \\ x_1 + 2x_2 = 40 \quad \cdots \textcircled{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 = 45 \quad \cdots \textcircled{1} \\ -5x_1 = -50 \quad \cdots \textcircled{2} - \textcircled{1} \times 2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -5x_2 = -75 \quad \cdots \textcircled{1} - \textcircled{2} \times 3 \\ x_1 + 2x_2 = 40 \quad \cdots \textcircled{2} \end{array} \right.$$

- ある等式の両辺を○倍する→連立方程式の解は同じ
- 2つの等式間の足し算・引き算→連立方程式の解は同じ

⇒2つの操作で連立方程式の解は変化しない!

# やさしい問題に変形する

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 44 & \cdots \textcircled{1} \\ 3x_1 - 4x_2 + 18x_3 = 76 & \cdots \textcircled{2} \\ 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 11 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

係数と右辺の値が  
変化していきんだね

→

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 22 & \cdots \textcircled{1}' : \textcircled{1} \times 1/2 \\ 2x_2 + 6x_3 = 10 & \cdots \textcircled{2}' : \textcircled{2} - \textcircled{1} \times 3/2 \\ 9x_2 + x_3 = -33 & \cdots \textcircled{3}' : \textcircled{3} - \textcircled{1} \end{cases}$$

→

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 22 & \cdots \textcircled{1}'' \\ x_2 + 3x_3 = 5 & \cdots \textcircled{2}'' : \textcircled{2}' \times 1/2 \\ -26x_3 = -78 & \cdots \textcircled{3}'' : \textcircled{3}' - \textcircled{2}' \times 9/2 \end{cases}$$

→

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 22 \\ x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_3 = 3 & : \textcircled{3}'' \times (-1/26) \end{cases}$$



ピボット

列

# 係数と右辺の値

行

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 44 \\ 3 & -4 & 18 & 76 \\ 2 & 5 & 9 & 11 \\ 1 & -2 & 4 & 22 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 9 & 1 & -33 \\ 1 & -2 & 4 & 22 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -26 & -78 \\ 1 & -2 & 4 & 22 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1行  $\times 1/2$   
2行  $- 1行 \times 3/2$   
3行  $- 1行$

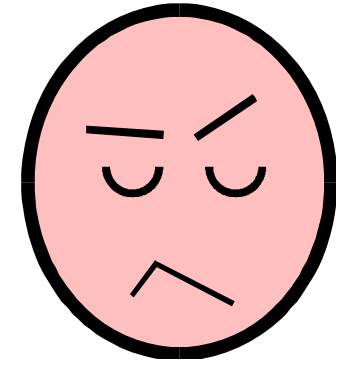
2行  $\times 1/2$   
3行  $- 2行 \times 9/2$

3行  $\times (-1/26)$

- 行列: 数を長方形に並べて括弧 ( ) で括ったもの
- 連立方程式は行列で表現できる

この操作を「掃き出し」という。

# 素朴な消去法



- 連立方程式を行列で表現する
- 対角線上にピボットを選びながら掃き出しを行う.
- やさしい問題に変形できたら, 下から方程式を順に解いていく.

演習1: 以下の連立方程式を消去法で解いてみよう

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 45 & \cdots \textcircled{1} \\ x_1 + 2x_2 = 40 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$



ピボット

# とことん掃出しをしよう

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 44 \\ 3 & -4 & 18 & 76 \\ 2 & 5 & 9 & 11 \\ 1 & -2 & 4 & 22 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 9 & 1 & -33 \\ 1 & 0 & 10 & 32 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -26 & -78 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1行  $\times 1/2$   
2行  $-$  1行  $\times 3/2$   
3行  $-$  1行  $\times 2/2$

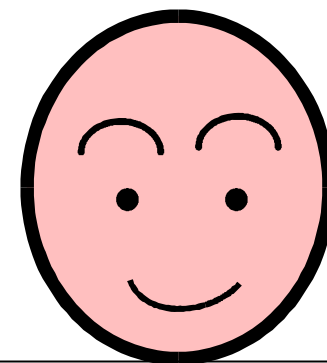
1行  $-$  2行  $\times (-2/2)$   
2行  $\times 1/2$   
3行  $-$  2行  $\times 9/2$

1行  $-$  3行  $\times (10/-26)$   
2行  $-$  3行  $\times (3/-26)$   
3行  $\times (1/-26)$

掃出しの操作を  
上の行にも行えば、  
直接解が求まるよね



# ガウスの消去法



- 連立方程式を行列で表現する
- 対角線上にピボットを選びながらすべての行に対し掃き出しを行う。
- 最後の行まで実行したら終了!!

「ピボット変換」ともいう

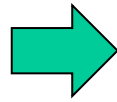
演習2: 以下の連立方程式をガウスの消去法で解いてみよう

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 45 & \cdots \textcircled{1} \\ x_1 + 2x_2 = 40 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

# 練習1-1 ガウスの消去法

連立方程式を解け

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 150 \\ 2x_1 + x_2 = 160 \end{cases}$$



① 行列で表現

$$\left( \begin{array}{cc|c} & & \\ \hline & & \\ \hline & & \end{array} \right)$$

②ピボット  
選択



③ 掃き出し

$$\left( \begin{array}{cc|c} & & \\ \hline & & \\ \hline & & \end{array} \right)$$

②ピボット  
選択

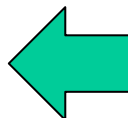


③ 掃き出し

$$\left( \begin{array}{cc|c} & & \\ \hline & & \\ \hline & & \end{array} \right)$$

④ 解の発見

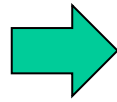
解  $(x_1, x_2) = ( \quad , \quad )$



# 練習1-2 ガウスの消去法

連立方程式を解け

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 160 \\ x_1 + 3x_2 = 150 \end{cases}$$



① 行列で表現

$$\left( \begin{array}{cc|c} & & \\ \hline & & \\ \hline & & \end{array} \right)$$

②ピボット  
選択



③ 掃き出し

$$\left( \begin{array}{cc|c} & & \\ \hline & & \\ \hline & & \end{array} \right)$$

②ピボット  
選択

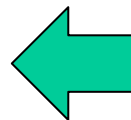


③ 掃き出し

$$\left( \begin{array}{cc|c} & & \\ \hline & & \\ \hline & & \end{array} \right)$$

④ 解の発見

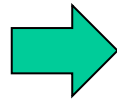
解  $(x_1, x_2) = ( \quad , \quad )$



# 練習2 ガウスの消去法

連立方程式を解け

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ 3x_1 + 4x_2 = 25 \end{cases}$$



① 行列で表現

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 25 \end{array} \right]$$

②ピボット  
選択



③ 掃き出し

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

②ピボット  
選択

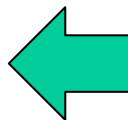


③ 掃き出し

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

④ 解の発見

解  $(x_1, x_2) = ( \quad , \quad )$

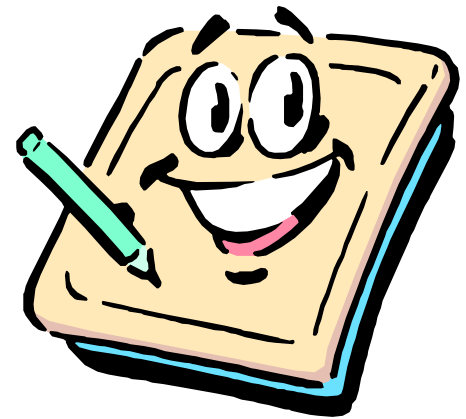


# ここで一息

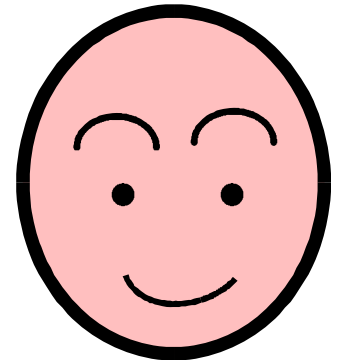
以下の方程式の解は？

(1)  $2x = 6$

(2)  $ax = b$



# ピボットが0になった時(1)

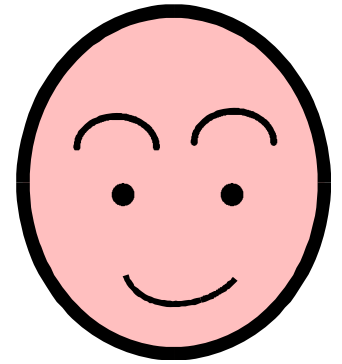


以下の連立方程式を解いてみよう

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 39 \\ 8x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 83 \end{cases}$$

行の入れ替えで最後まで変形できる

# ピボットが0になった時(1)



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 15 \\ 4 & 2 & 5 & 39 \\ 8 & 8 & 9 & 83 \end{pmatrix}$$

行の入れ替えで最後まで変形できる

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 15/2 \\ 0 & 4 & 5 & 23 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/8 & 37/8 \\ 0 & 1 & 5/4 & 23/4 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



## ピボットが0になった時(2)

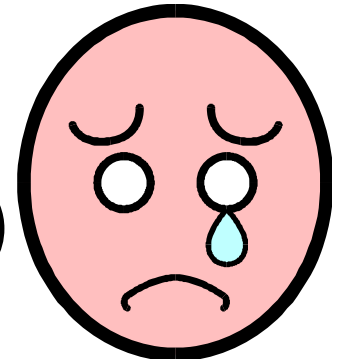


以下の連立方程式を解いてみよう

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 39 \\ 8x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 83 \end{cases}$$

連立方程式は解を持たない場合もある

# ピボットが0になった時(2)



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 15 \\ 4 & 2 & 5 & 39 \\ 8 & 4 & 5 & 83 \end{pmatrix}$$

連立方程式は解を持たない場合もある

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 23 \end{pmatrix}$$

stop

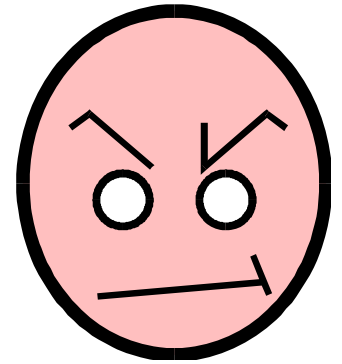
解なし

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$0x=b$

のパターン

# ピボットが0になった時(3)

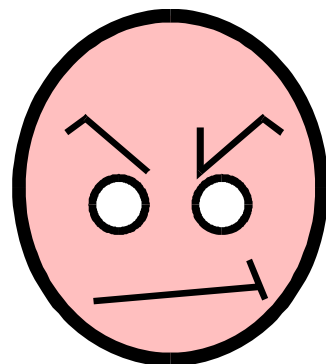


以下の連立方程式を解いてみよう

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 39 \\ 8x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 63 \end{cases}$$

連立方程式は解が定まらない場合もある

# ピボットが0になった時(3)



連立方程式は解が定まらない場合もある

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 15 \\ 4 & 2 & 5 & 39 \\ 8 & 4 & 5 & 63 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

stop

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$0x=0$   
のパターン

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2t + 12 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

任意の  
実数

$$\begin{cases} x_1 + 1/2x_2 = 6 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 1/2x_2 + 1/2x_3 = 15/2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

# 演習3 解いてみよう!



(1)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 13 \\ x_1 + 8x_3 = -5 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_3 = 1 \\ 3x_2 - 5x_3 = 3 \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 = -6 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

(4)

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 = 4 \\ 2x_2 + 4x_4 = -2 \\ 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

# 連立方程式と行列

行列の積を定義すると連立方程式は自然に行列で表現できる.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 44 \\ 3x_1 - 4x_2 + 18x_3 = 76 \\ 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 11 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 3 & -4 & 18 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 76 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 3 & -4 & 18 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 44 \\ 76 \\ 11 \end{pmatrix}$$

とおくと  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$  と書ける.

この記法よりLPを  
 $\max \mathbf{c}^t \mathbf{x}$   
s.t.  $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$   
 $\mathbf{x} \geq 0$   
と書くこともある

# 寄り道 実際に連立方程式を解く

- ガウスの消去法  $O(n^3)$

遅い...

- 現在の理論的な最速解法  $O(n^{2.376})$

- Coppersmith and Winograd(1990)

- でも, 係数が大きく実用的 ×

直接法  
要素の消去

- 実際に解く場合は

- 初期値 → (反復公式) → 解の精度を改善: 反復法

- 行列分解, スパース性等を利用



➡ (大規模) 数値計算の話題へ

