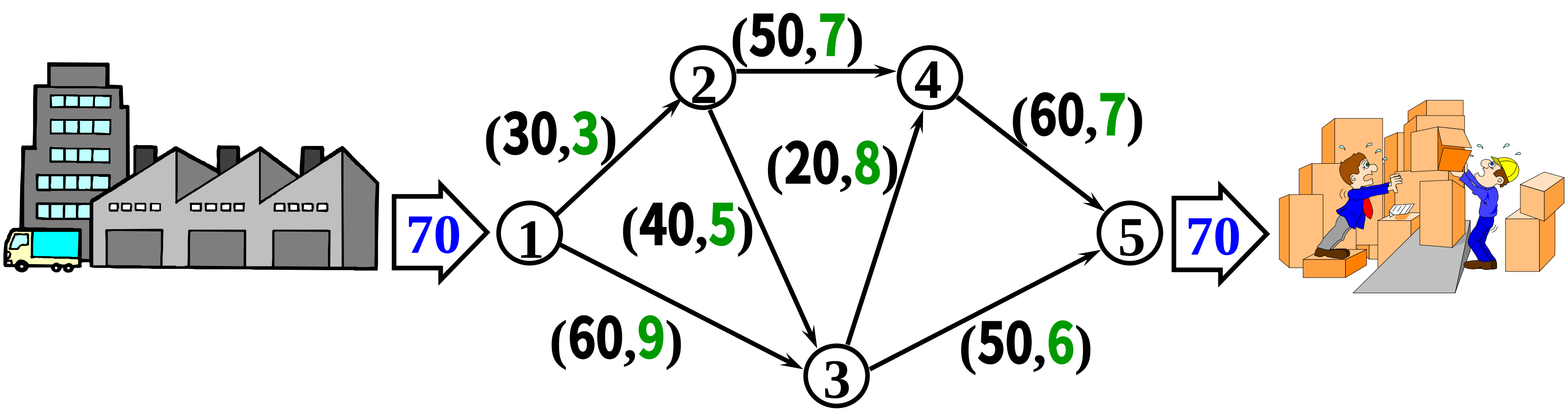
Network Programming IV

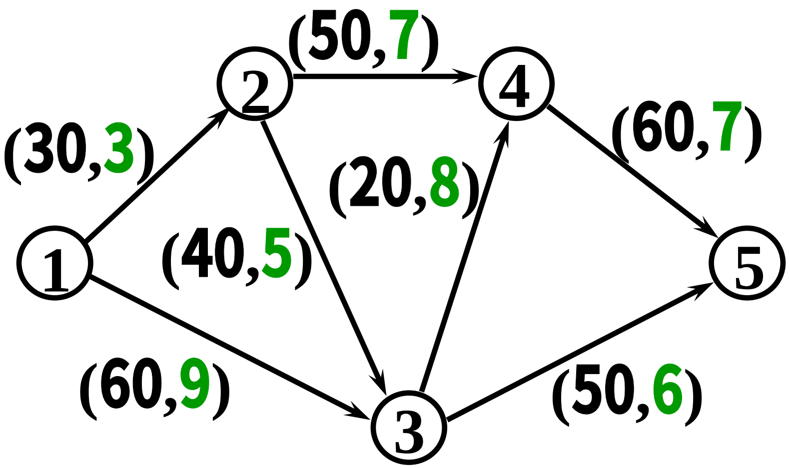
例題8-1 輸送作戦

文教工業では工場から倉庫へ70トン製品を輸送したい．最も費用の安い輸送計画を提案してほしい．

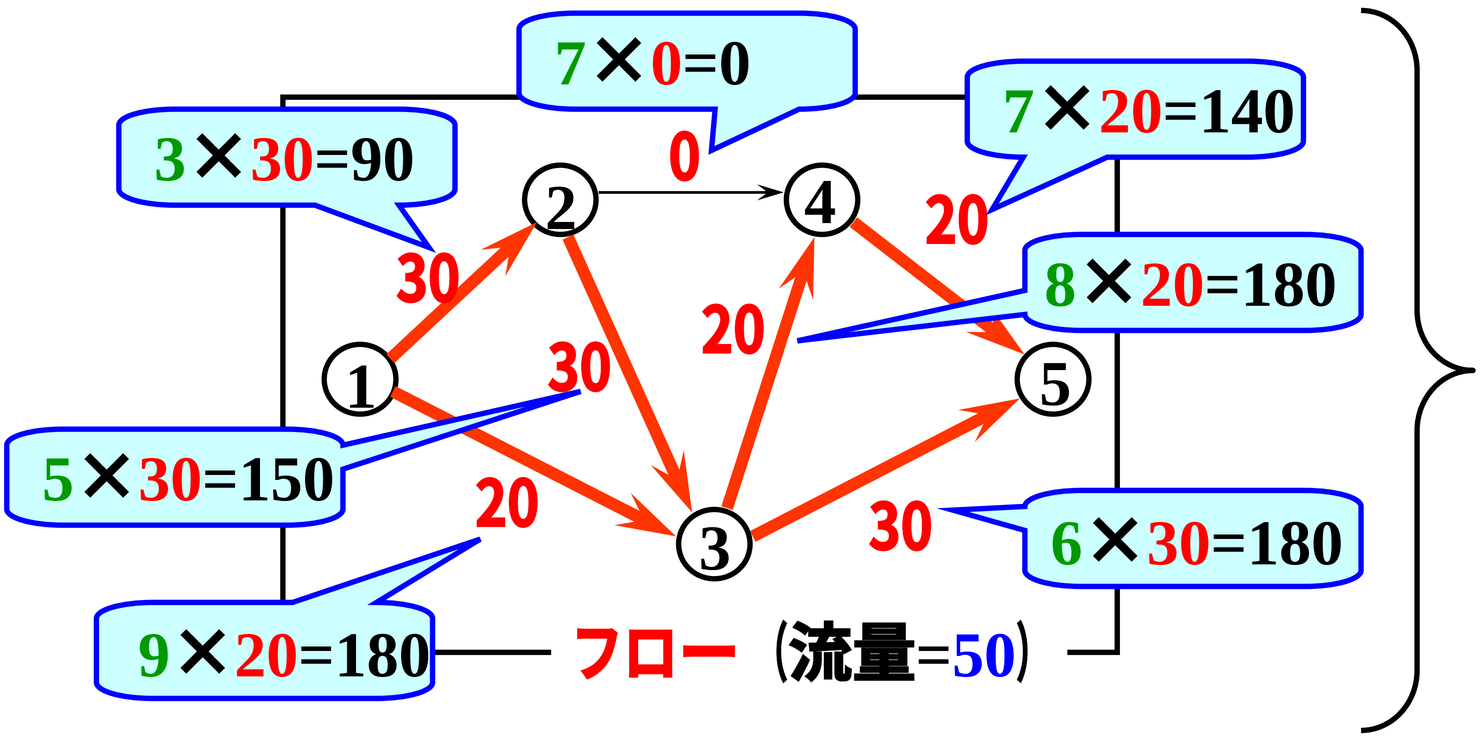


(枝の容量(トン),1トン当たりの費用(万円))

フローにより生じる費用



単位フロー当たりの費用×フロー



このフローに対する費用

920

最小費用フロー問題

目的 フローにより生じる費用→最小

条件 指定された流量の実行可能フローであること

最小費用フロー：指定された流量を持つ
費用最小の実行可能フロー

最小費用流問題に対する主な解法

- 負サイクル法
  - コストがより下がる閉路を見つけて更新する.
  - 簡単. 工夫次第でより高速にできる.
- 最短路繰返し法 (→主双対法)
  - コスト最小路にフローを流す手続きを繰返す.
  - 簡単. 工夫次第でより高速にできる.
- ネットワーク単体法
  - 実用的解法.

他多数の解法が提案されている.

最短路繰返し法

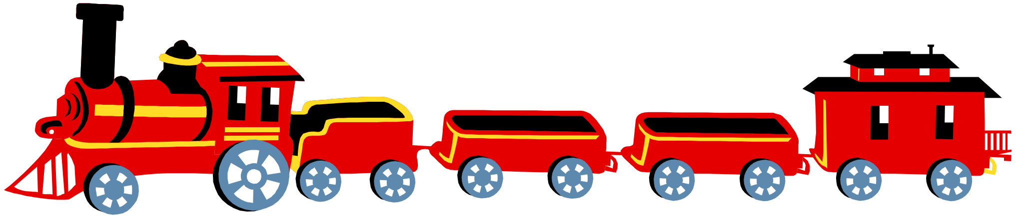
手順1:全枝のフローを0と置く.

手順2:以下を指定流量が得られるまで繰返す.

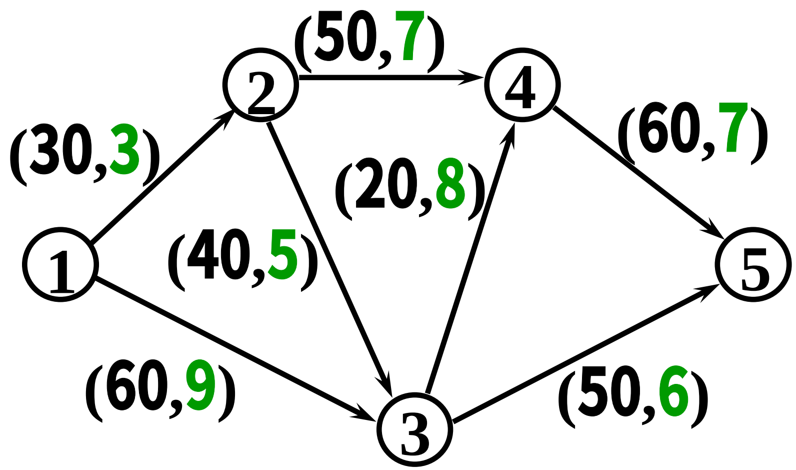
(1) 残余ネットワークを作る.

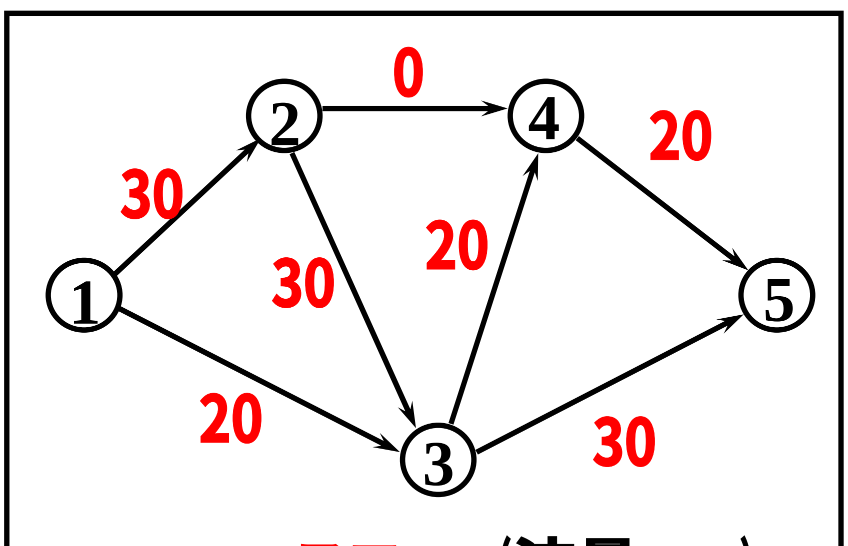
(2) 残余ネットワーク上で供給点から需要点へのコスト最小の路(最短路)を求める.

(3) 最短路に沿って流せるだけフローを流す.

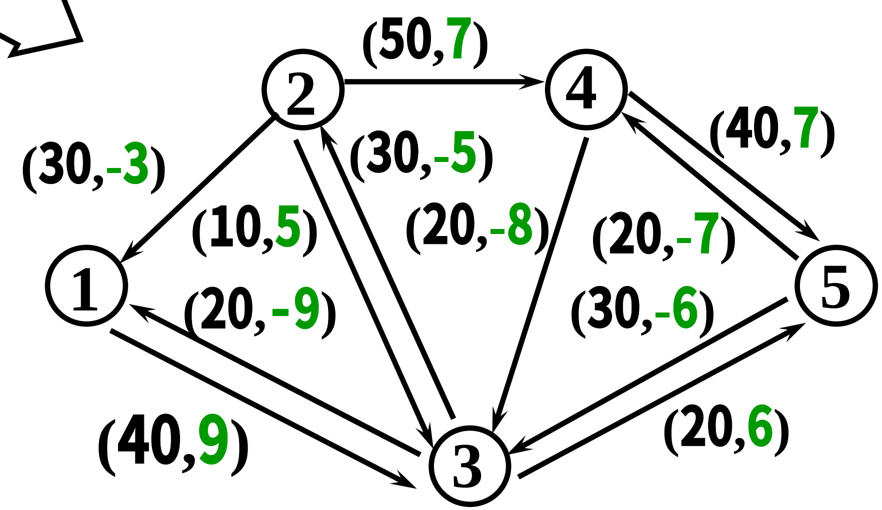


最小費用フローでの残余ネットワーク

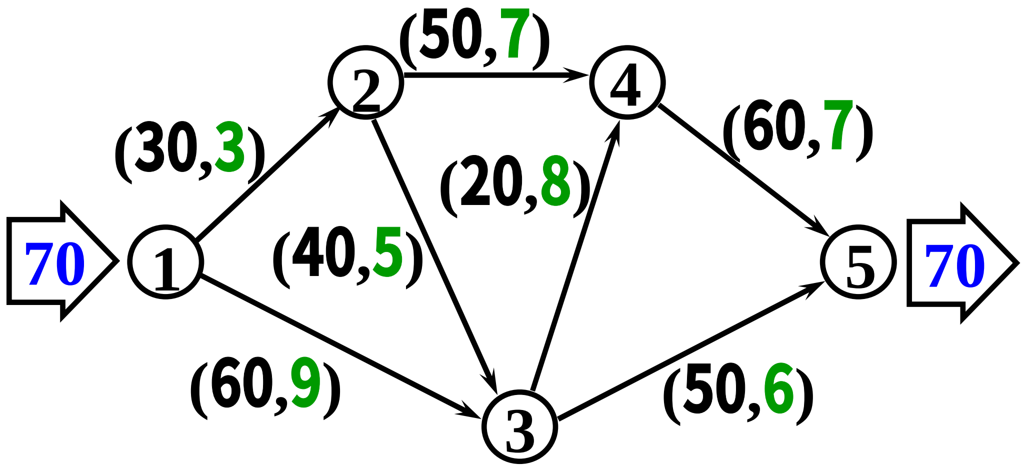




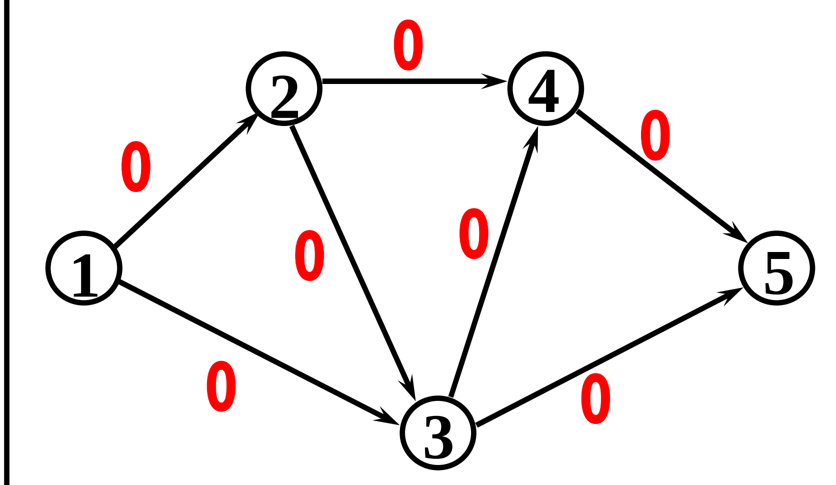
フロー（流量=50）



例題8-2 最短路繰返し法

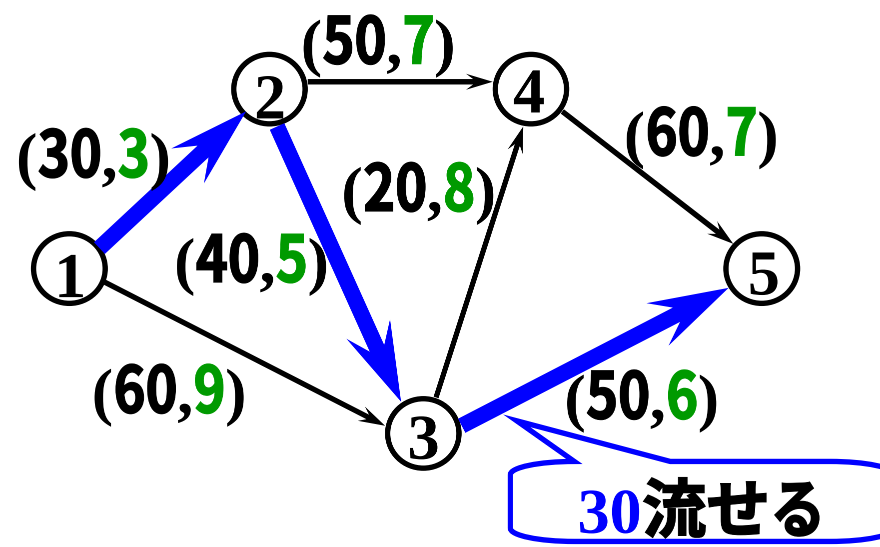


繰返し (1回目)

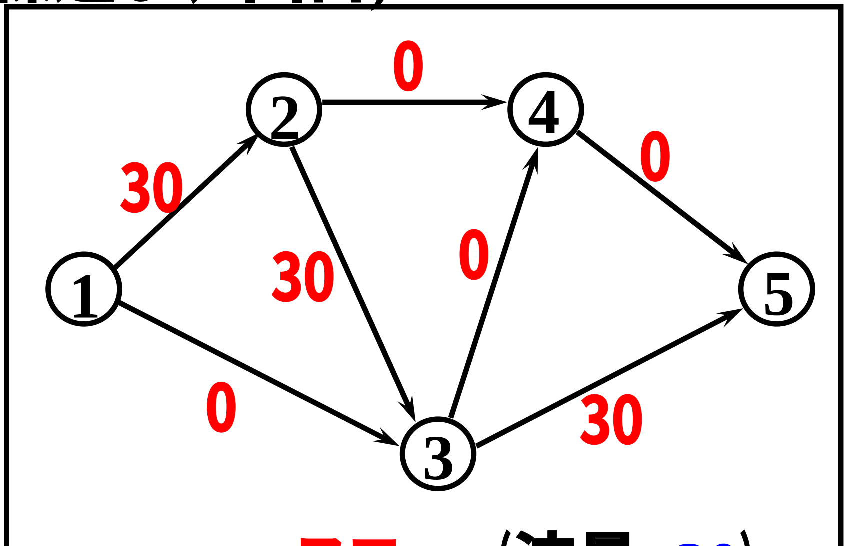


フロー (流量=0)

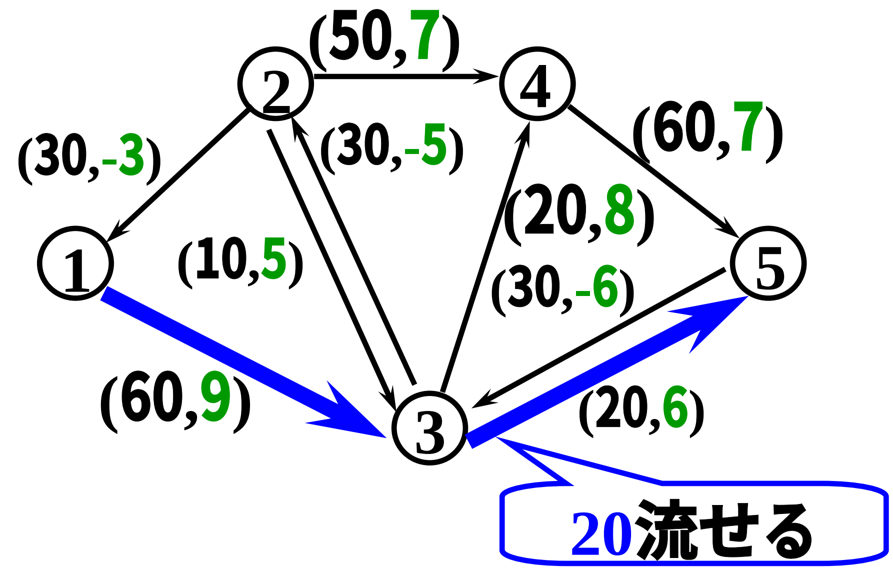
残余ネットワーク



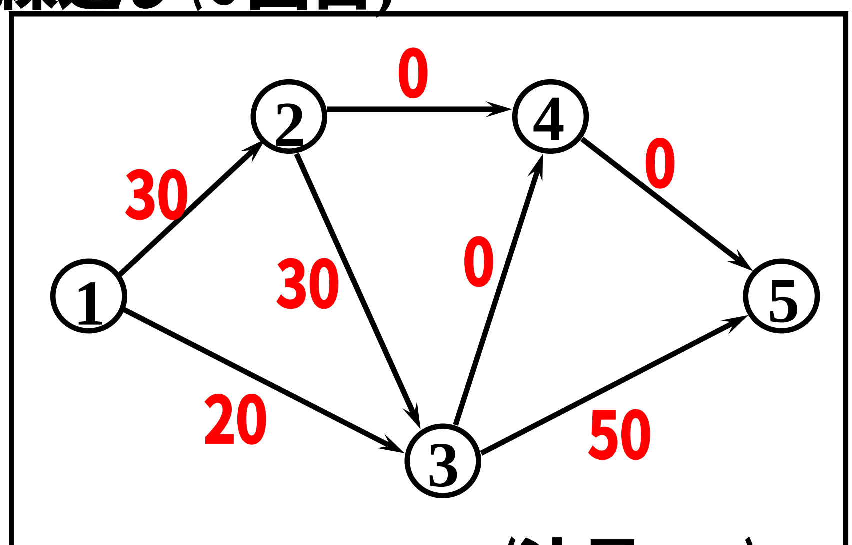
繰返し(2回目)



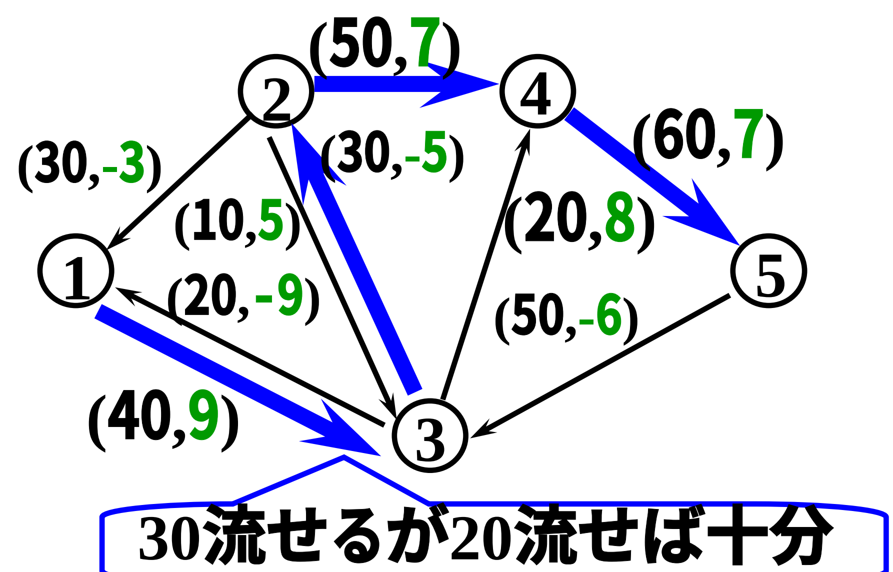
フロー (流量=30)



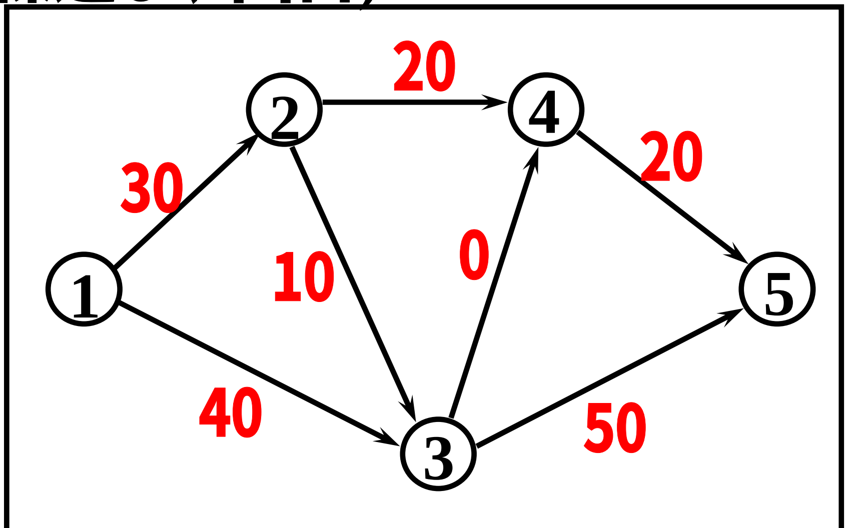
繰返し(3回目)



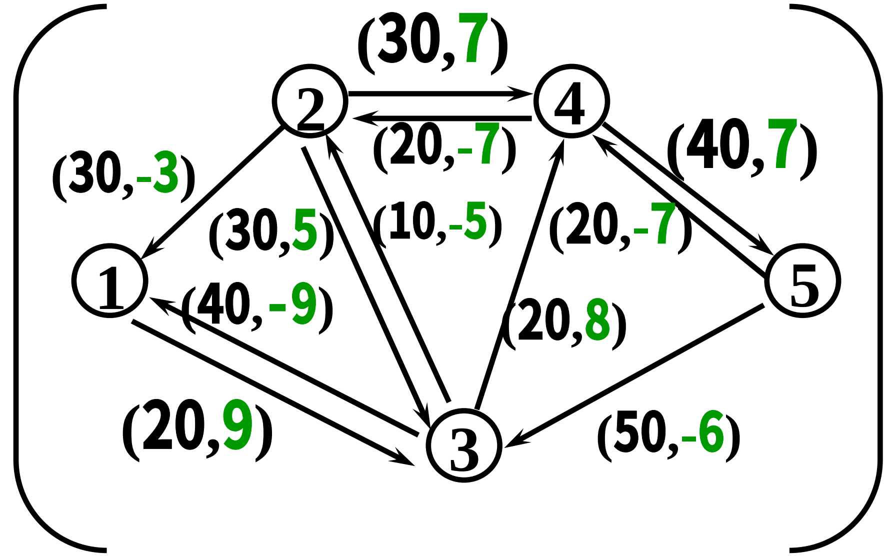
フロー (流量=50)



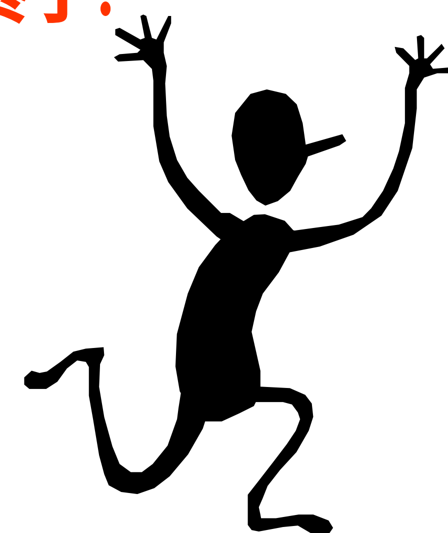
繰返し (4回目)



フロー（流量=70）



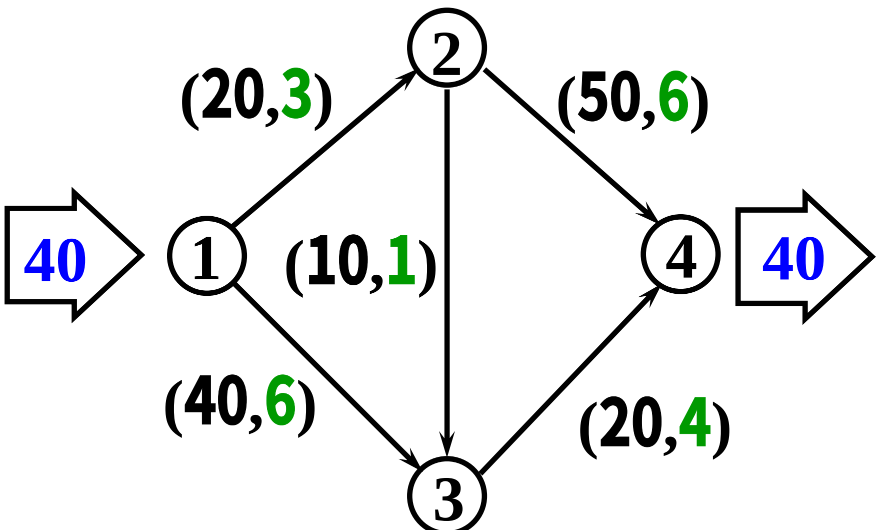
流量が供給量の７０に到達したので終了．



流量７０の最小費用フロー

演習8-1

流量40の最小費用フローを求めよ．また，その時の費用を求めよ．



(容量, 1単位当たりの費用)

最短路繰返し法の弱い点

残余ネットワークに負の長さの枝が現れる.

最短路を求めるのにダイクストラ法が使えない.

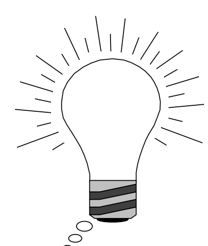
対策1

ダイクストラ法より計算時間はかかるが, 負の長さも扱える解法を利用する.

あまり良い対策ではない

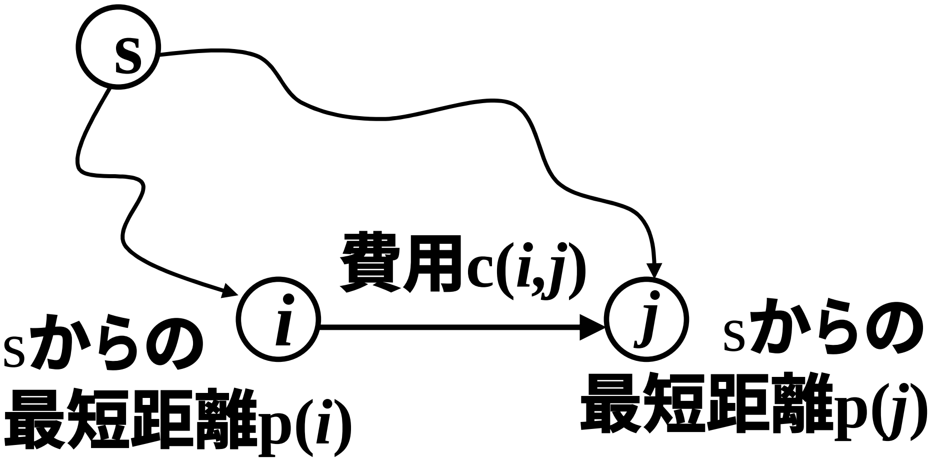
対策2

残余ネットワークを工夫し, 高速なダイクストラ法を利用する.



残余費用の導入

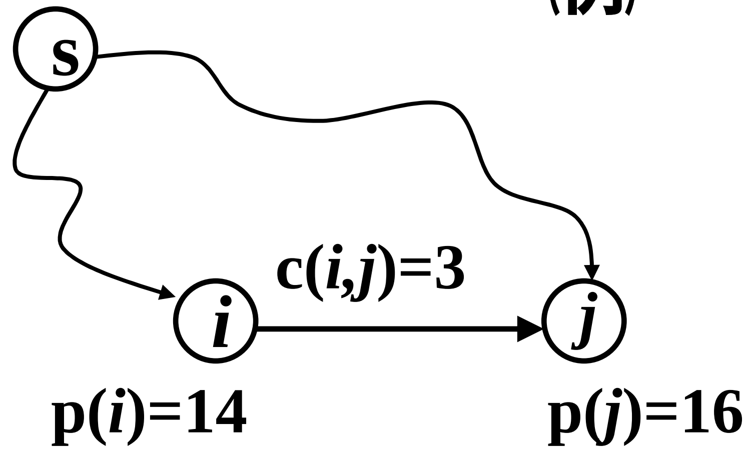
残余費用



残余費用

$\underline{c}(i,j)=c(i,j)+p(i)-p(j)$

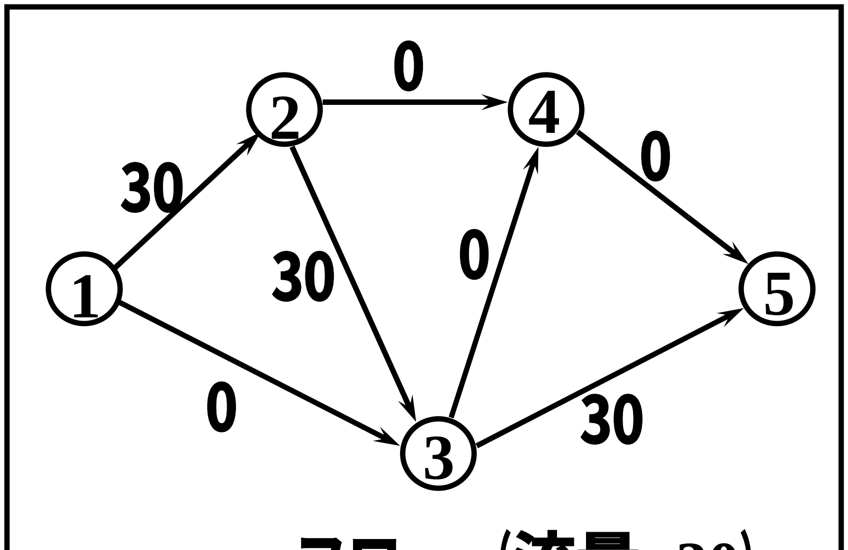
（例）



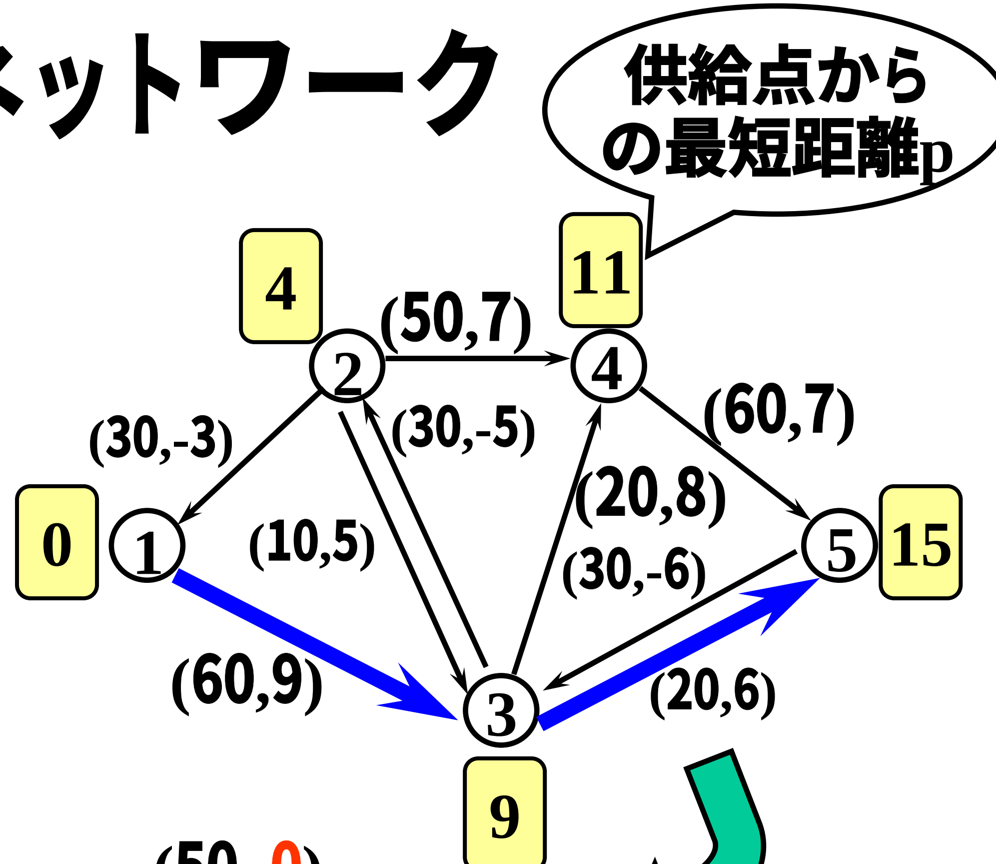
$\underline{c}(i,j)=3+14-16=1$

残余費用は非負である．なぜ？

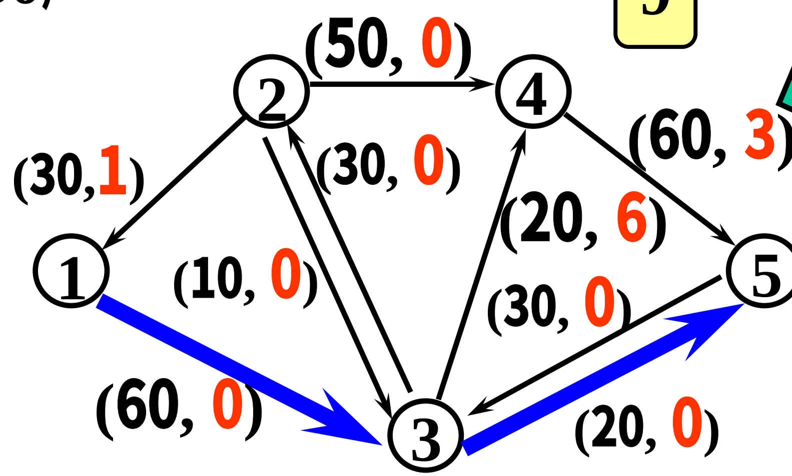
改訂残余ネットワーク



フロー（流量=30）

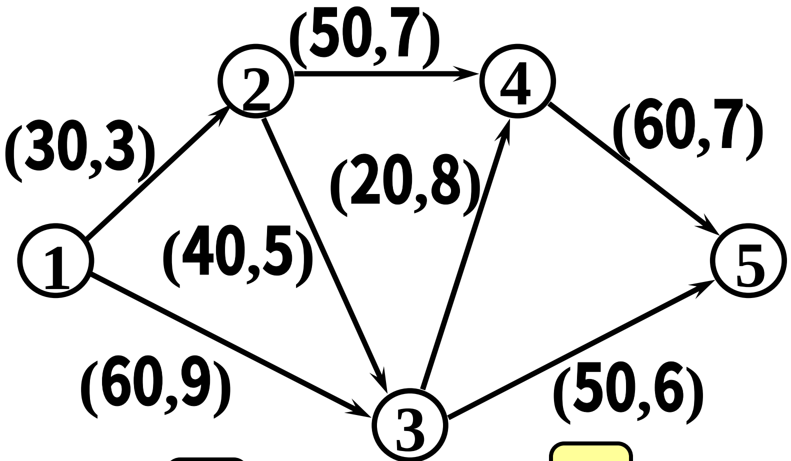


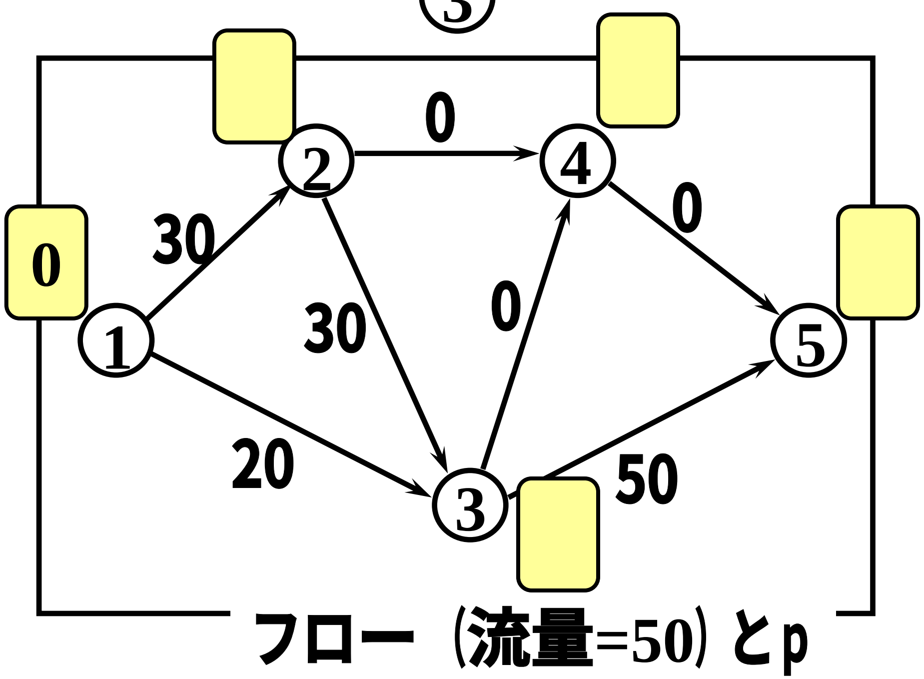
残余費用に置き換える



改訂残余ネットワーク

演習8-2 改訂残余ネットワーク





左のネットワーク上に
左下のようなフローが流れている時，
改訂残余ネットワークはどのように表現されるか？

（改訂残余ネットワーク上における供給点①から全点への現在の最短距離pは各自で求めなさい）

改訂最短路繰り返し法

手順1:全枝のフローを0, 各点での$p(v)$を0とおく.

手順2:以下を指定流量が得られるまで繰返す.

(1) 改訂残余ネットワークを作る.

① 現在のフローに対するネットワークの構造を作る

② 現在のpに対する残余費用を定める

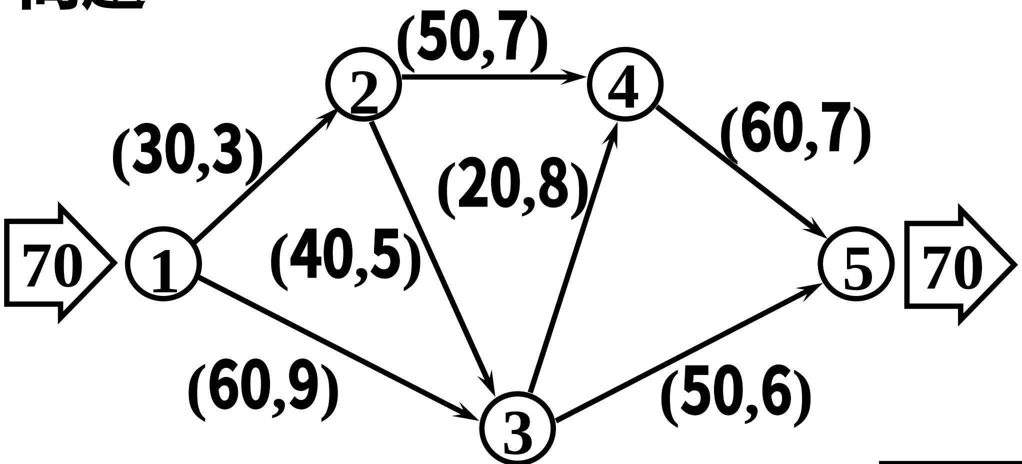
③ 供給点から各点への最短距離$d(v)$ を求める.

(2) 供給点から需要点への最短路に沿って流せるだけフローを流す.

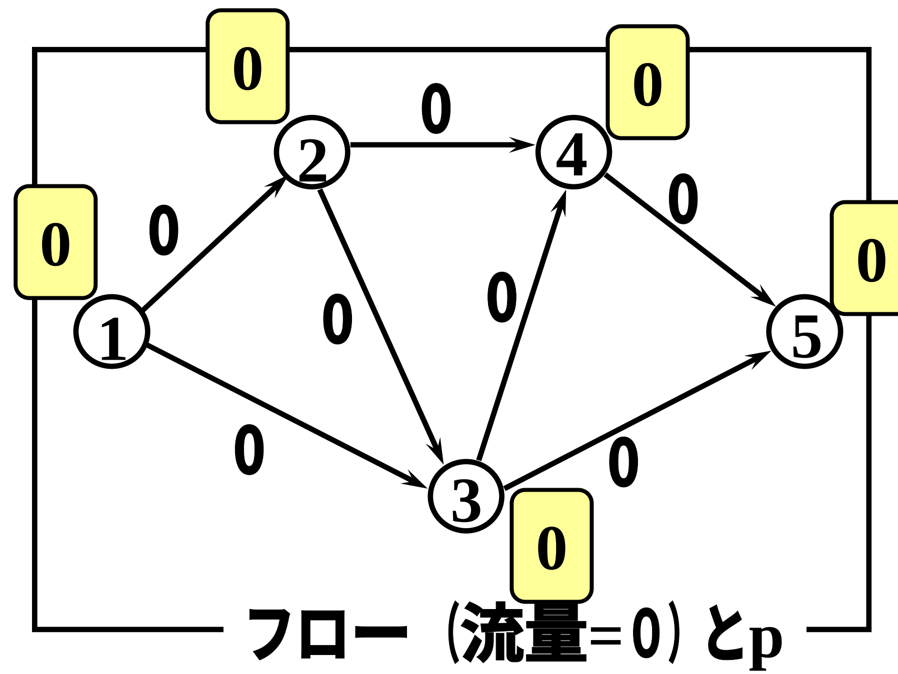
(3) 各点において$p(v) \leftarrow p(v)+d(v)$とおく.

例題8-3 改訂最短路繰返し法

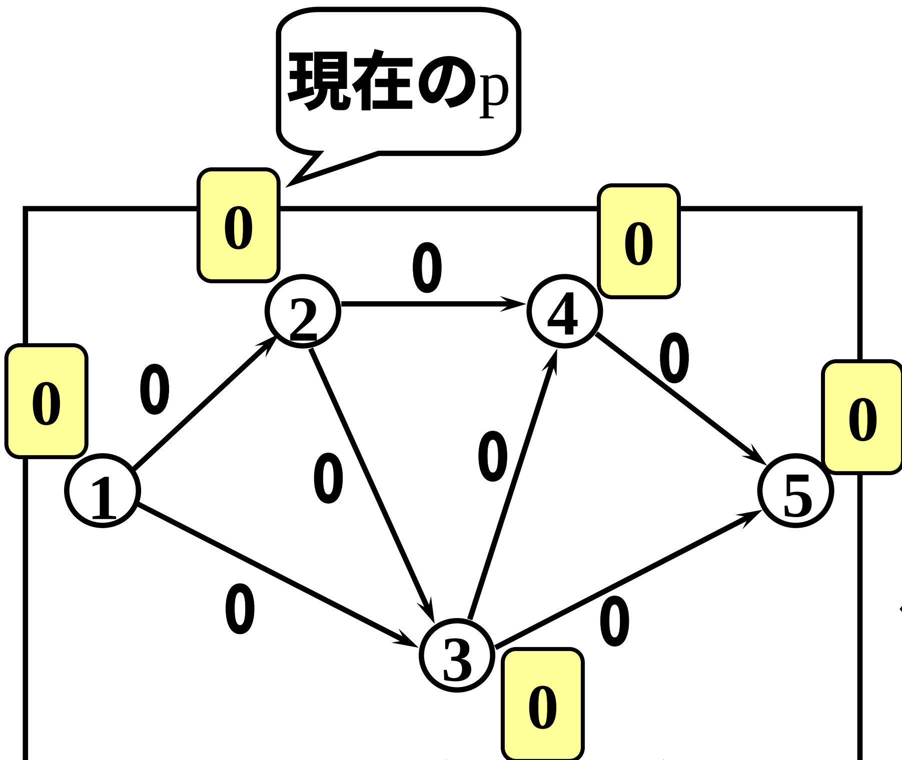
問題



手順1 初期設定

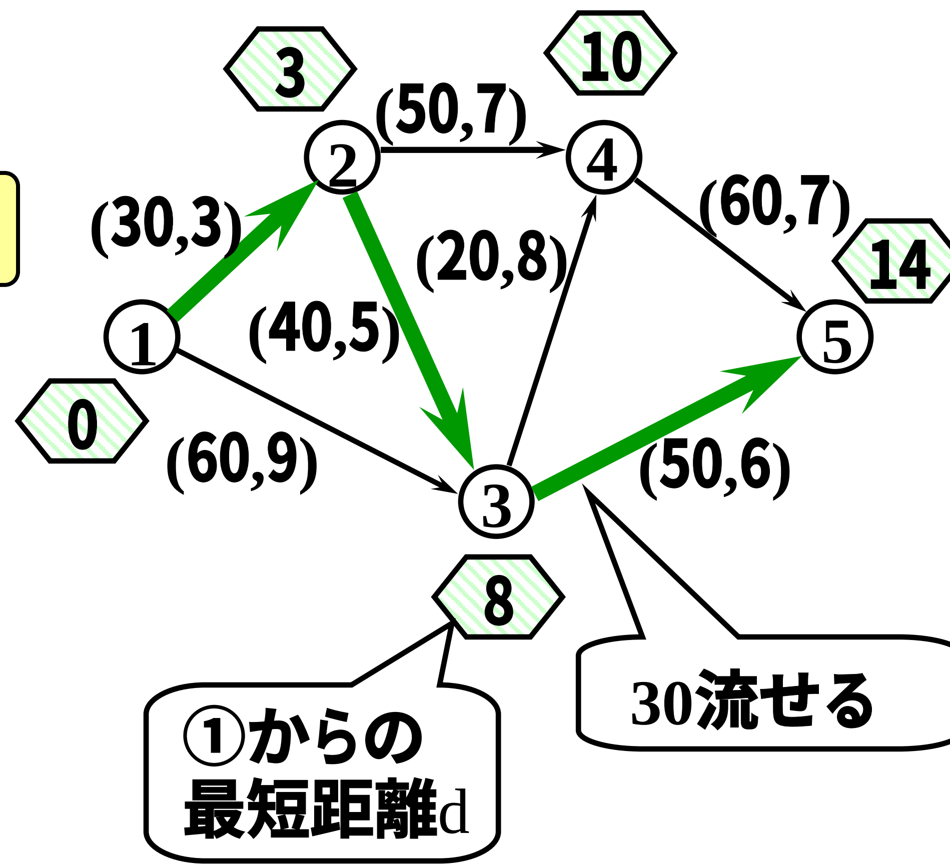


手順2 繰り返し1回目前半

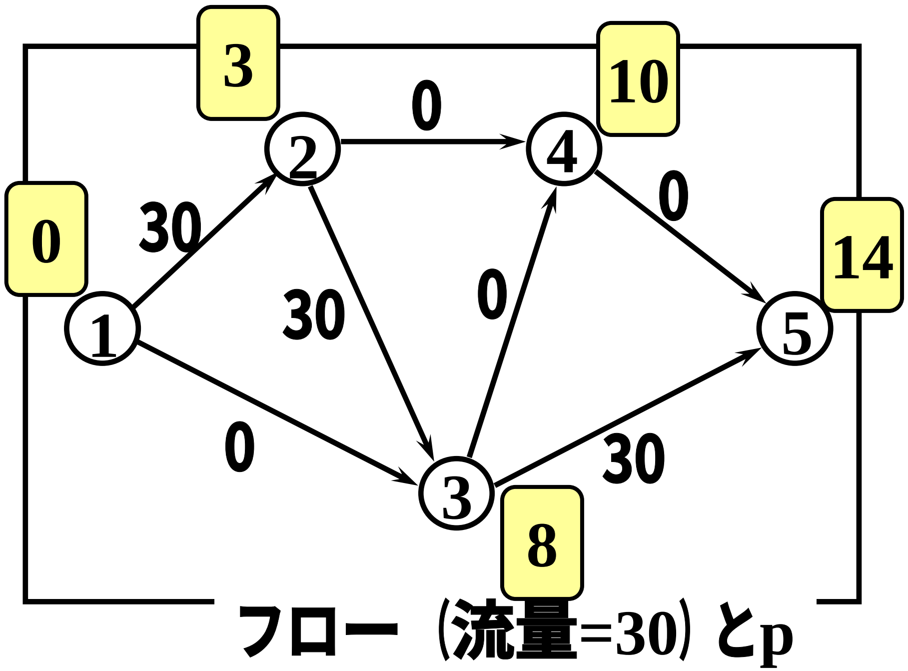


フロー（流量=0）とp

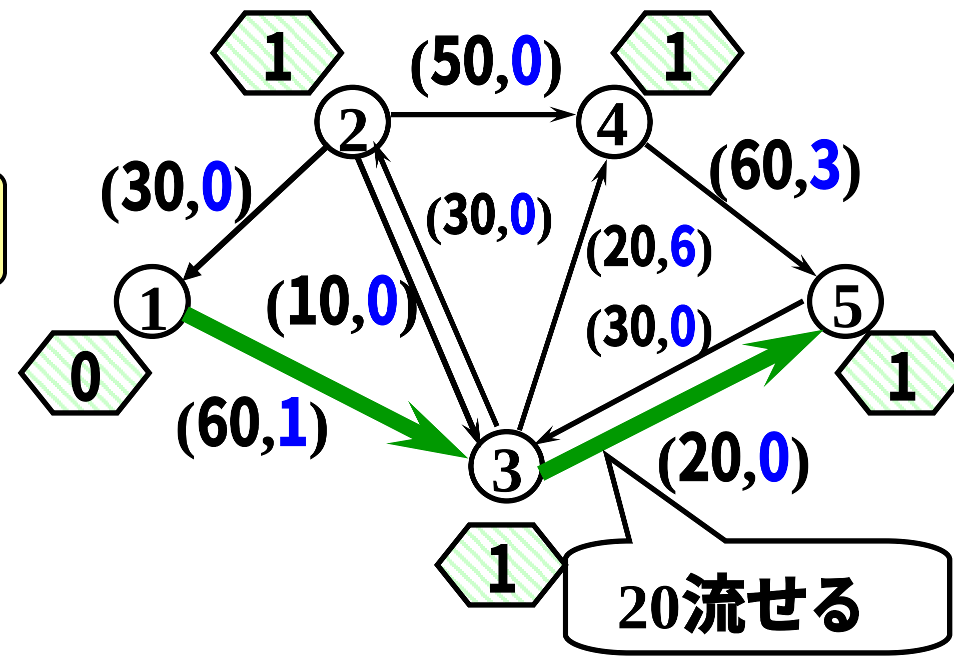
左図のフローとpに対する
改訂残余ネットワーク



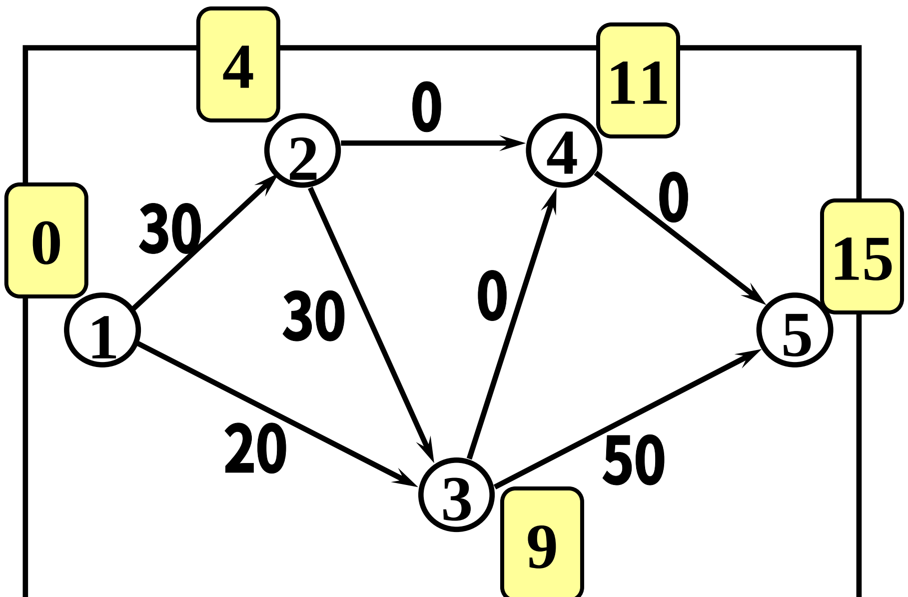
手順2 繰り返し1回目後半+2回目前半



左図のフローとpに対する
改訂残余ネットワーク

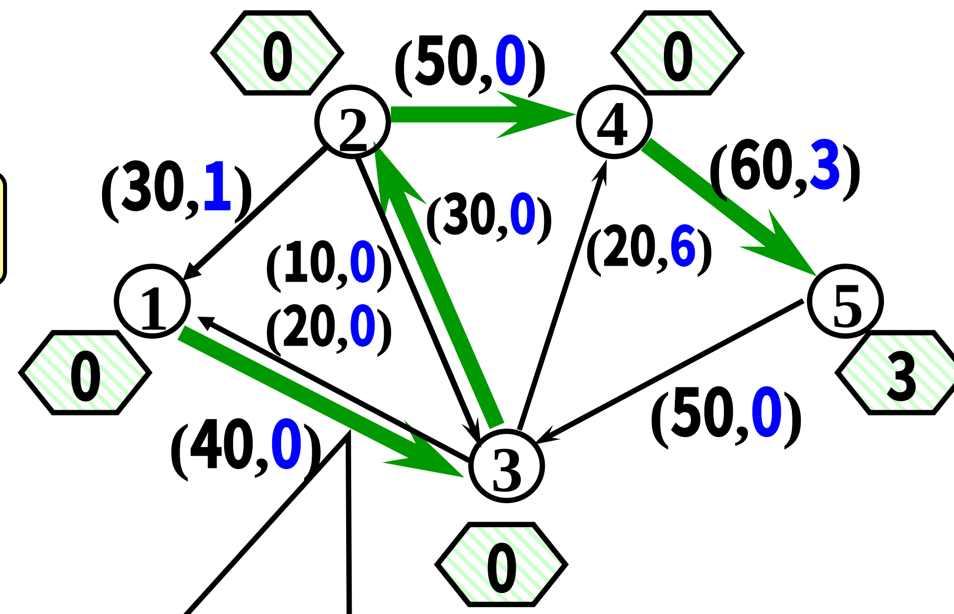


手順2 繰り返し2回目後半+3回目前半



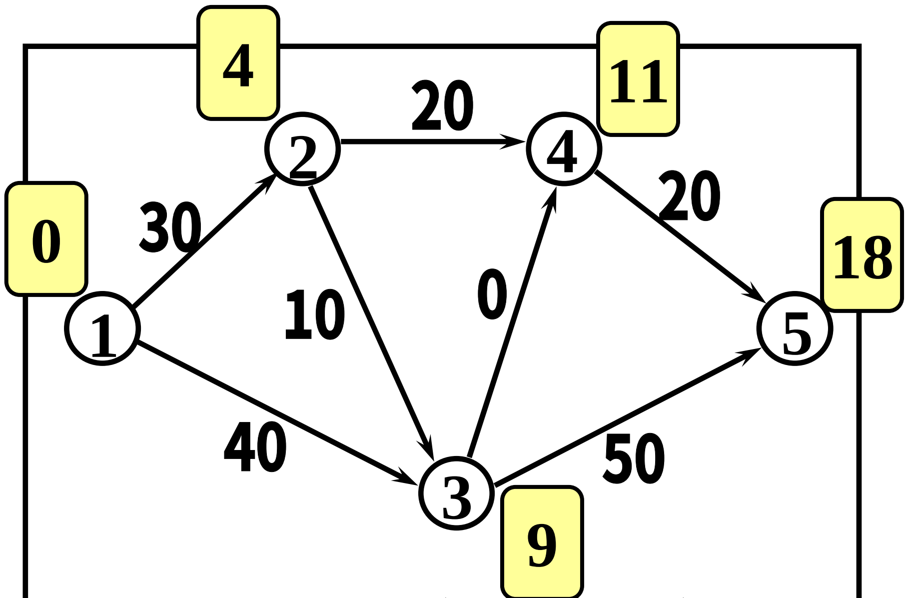
フロー（流量=50）とp

左図のフローとpに対する
改訂残余ネットワーク



30流せるが, 20流せば
流量70を満たす

手順2 繰り返し3回目後半+4回目前半



フロー（流量=70）とp

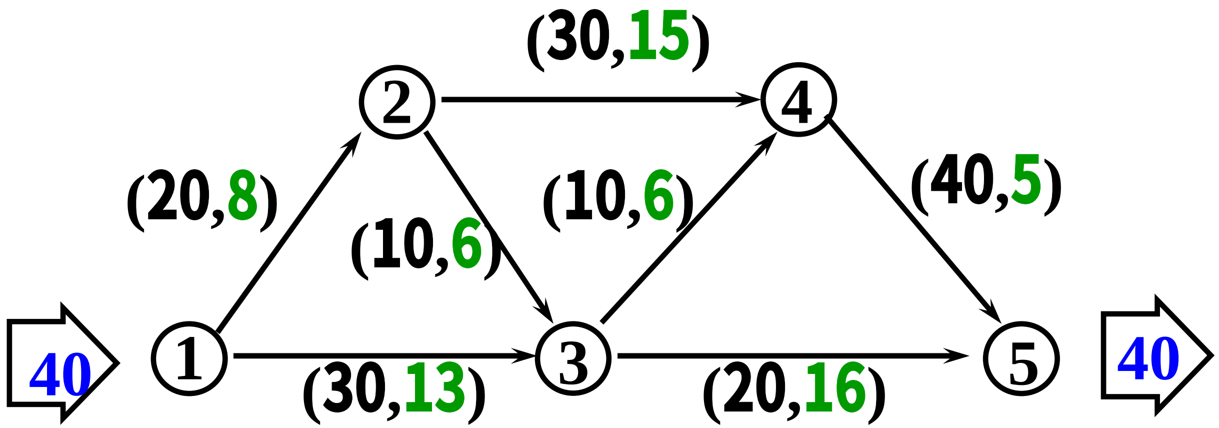
流量が70に到達したので終了

流量70の最小費用フロー

演習8-2
演習8-1において，改訂最短路繰り返し法を用いて最小費用フローを求めてみよう．

演習8-3

流量40の最小費用フローを求めよ．また，その時の総費用も示せ．



(容量，フロー1単位当たりの費用)

例題8-4

文教商事では5つの支社へ一人ずつの人員補強を計画している．5人が希望している任地と，その任地へ赴く際に予想される費用は以下のようにまとめられた．

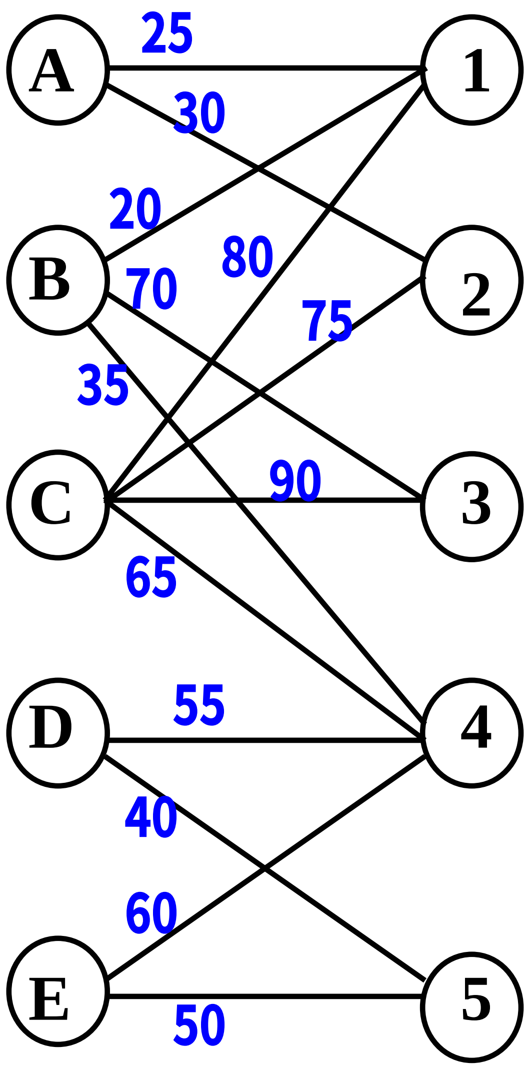
	支社①	支社②	支社③	支社④	支社⑤
Aさん	25	30			
Bさん	20		70	35	
Cさん	80	75	90	65	
Dさん				55	40
Eさん				60	50

空白は希望しない支社

さて，誰をどの支社に配属すれば最も費用が安く済むか?

関連問題：5人を各支社に割り当てることはできるか?

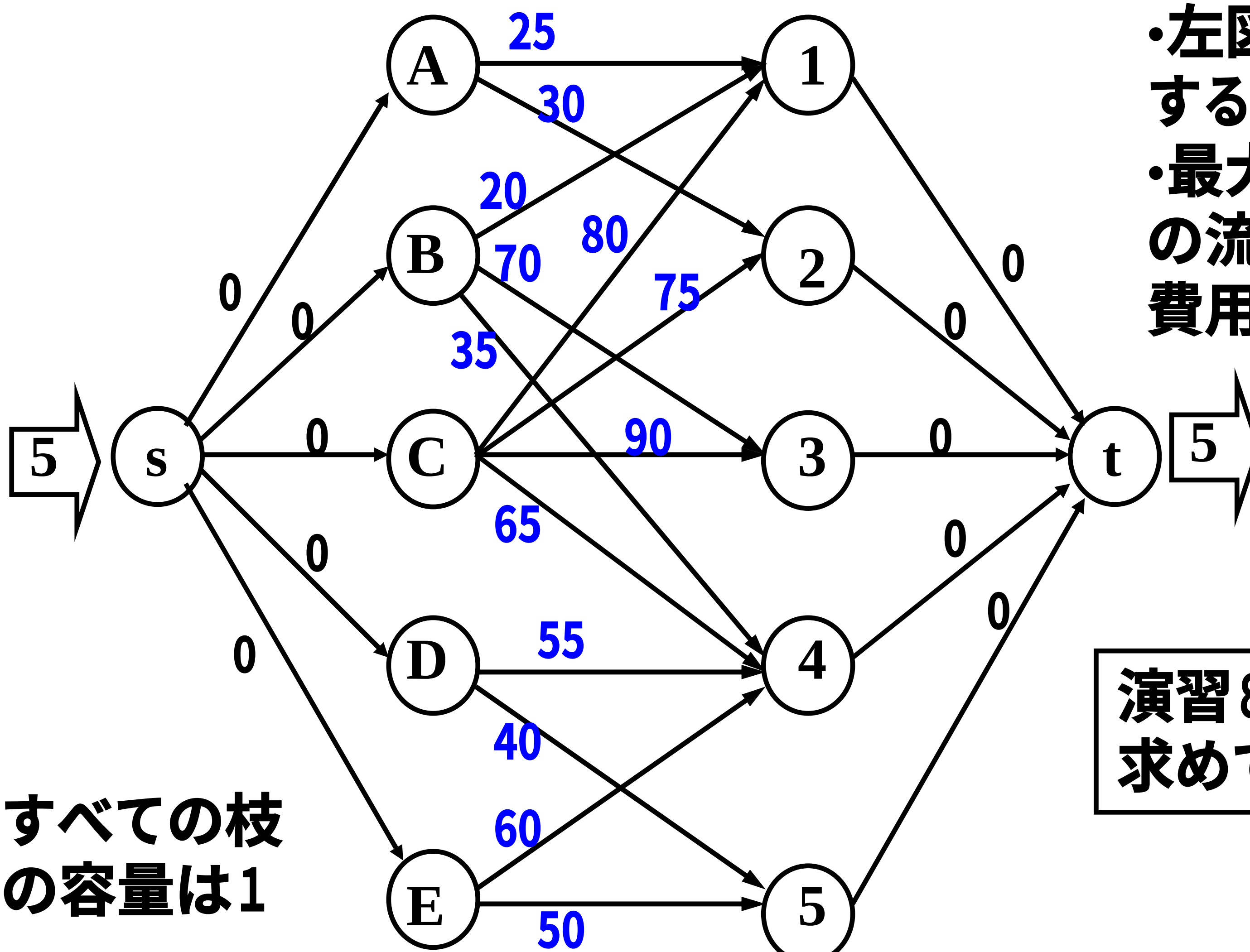
割当問題



完全マッチングの中で
（最大マッチングの中で）
重みの和が最小のマッチングを求める問題

割当問題の一解法

・最大マッチング数を求める．
・左図のように変形する．
・最大マッチング数の流量を持つ最小費用フローを求める．



すべての枝の容量は1

演習8-4
求めてみよう!!

演習8-5

文教建設では資格の必要な4つの仕事のために新規に4人採用した．採用された各ワーカーは資格のランクが異なるので与えられた仕事により給料が異なる．人件費を最小にするには誰にどの仕事を割当てれば良いか?

	仕事①	仕事②	仕事③	仕事④
Aさん	45	無資格	無資格	30
Bさん	50	55	15	無資格
Cさん	無資格	60	25	75
Dさん	45	無資格	無資格	35

(単位:万円)

演習8-6（応用） 輸送問題

文教サイクルは，3つの工場と4つの販売店を有している．各工場の週間製造台数，工場から販売店への輸送費，各販売店の週間需要は以下の通りである．

輸送費（千円/1台）	販売店①	販売店②	販売店③	販売店④	各工業の週間製造台数
工場A	6	7	3	7	100
工場B	8	3	6	5	250
工場C	5	4	5	6	150
各販売店の週間需要台数	80	160	60	200	

総輸送費を最小にするには，各工場から各販売店へどのように製品を輸送すれば良いか．