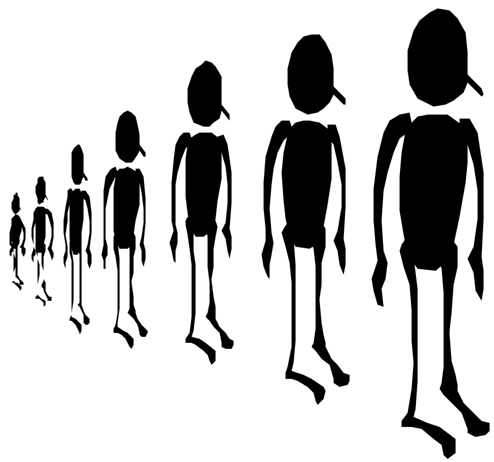
Queueing theory II

待ち行列の解析

待ち行列を分類する

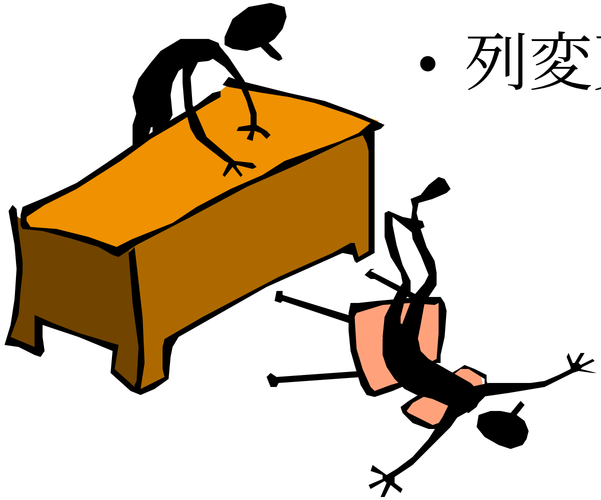
- 客の母集団
  - 有限or無限
- 客の到着（次のページ）
- 待ち行列の形態
  - 長さ
  - 本数



- 窓口
  - 窓口数
  - ステップ数
  - サービス時間
    - でたらめ **(指数分布サービス)**
    - 一定 など
  - サービス規則
    - 優先有
    - FIFO など

客の到着

- 到着パターン
  - でたらめな到着（ポアソン到着）
  - 一定
- 到着のサイズ
  - 1単位ずつ
  - 団体
- 客の振舞い
  - 待つ
  - 待たない
    - 辞退する
    - 途中で立ち去る
    - 列変更



分類表記法

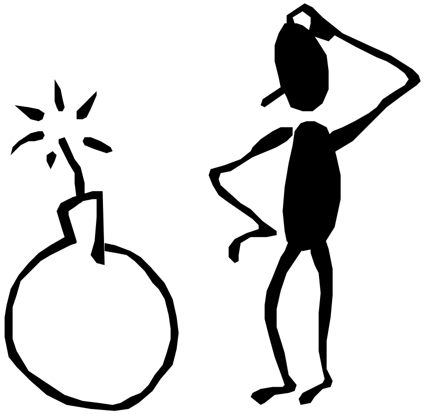
- 待ち行列のタイプは多彩
  → わかりやすい分類表記法が有ると便利

ケンドール（Kendall）の記号 A/B/s (n)

A:到着間隔分布
B:サービス時間分布
s: 窓口数
n: 待ち行列の長さ制限

- M:指数分布
- D:一定分布
- G:一般の分布

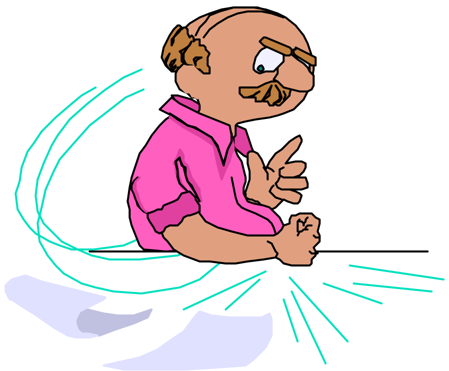
ケンドール記号の例



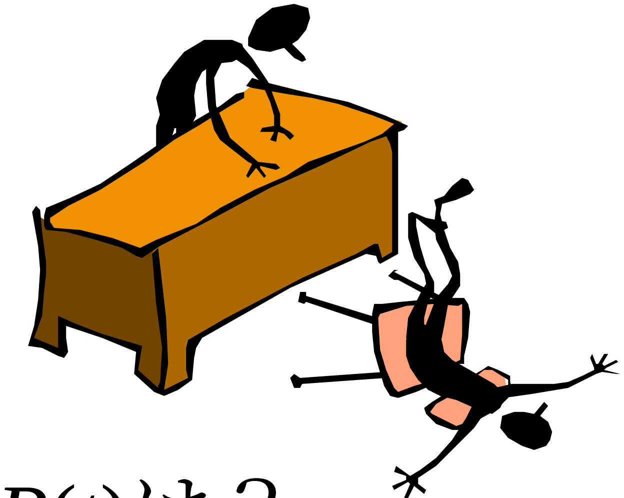
- M/M/1 (0)
  - ポアソン到着, 指数分布サービス, 窓口一つ, 待ち行列の最大長が０（つまり, 待ち行列を許さない）
  - 例：電話
- M/M/5 (∞)
  - ポアソン到着, 指数分布サービス, 窓口5つ, 無限の長さの待ち行列を許す.
  - 例：スーパーのレジ, 銀行窓口

待ち行列を解析する

- シンプルなモデルは解析的に様々な情報を得ることができる
  - 例 M/M/1(0), M/M/s(0), M/M/1(∞), M/M/s(∞)
  - より複雑なモデルの解析研究が進んでいる
- 複雑なモデルの待ち行列はシミュレーションにより様々なデータを得る試みが多い



M/M/1(0)を解析しよう



- 客の到着率 λ
- 窓口のサービス率 μ

窓口の稼動状況を知りたい

時刻*t*に窓口が空いている確率*R*(*t*)は？

- *t*+Δ*t*時点での窓口の状況を考えるみよう
- Δ*t* :わずかな時間 微小時間）

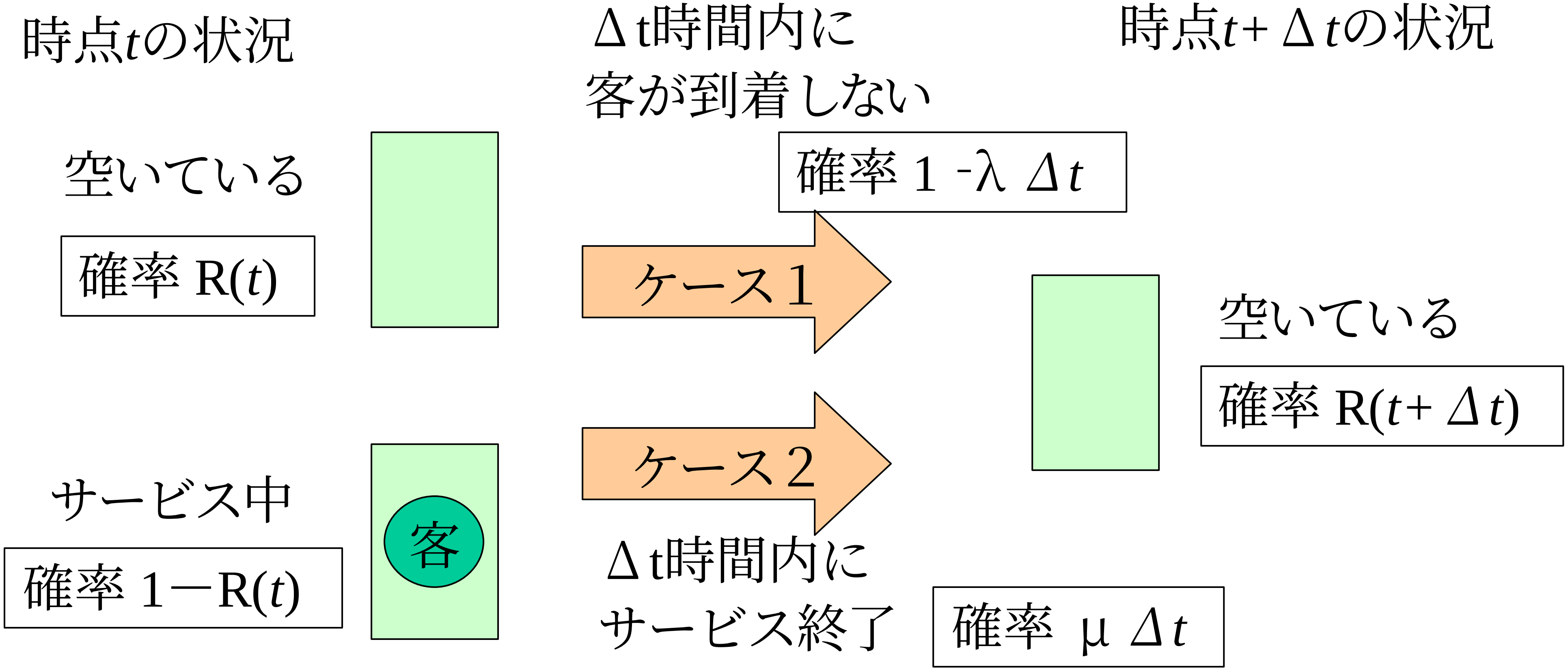
デルタと読む

すべての客が到着後Δ*t*内にサービスを終了することはないという条件を満たすくらいわずかな時間. (Δ*t*の微小性)

解析の準備

- Δt 時間内に客が1人到着する確率は?
  - λ に比例するだろう.
  - Δt を十分小さくとり細かなところを無視すると
    (Δt 時間内に客が1人到着する確率)＝ $\lambda\,\Delta t$
- Δt 時間内に客のサービスが終了する確率は?
  - 上記と同じ論理で
    (Δt 時間内に客のサービスが終了する確率)＝ $\mu\,\Delta t$

$R(t+\Delta t)$の導出



よって，$R(t+\Delta t) = R(t) \times (1-\lambda\Delta t) + (1-R(t)) \times \mu\Delta t$

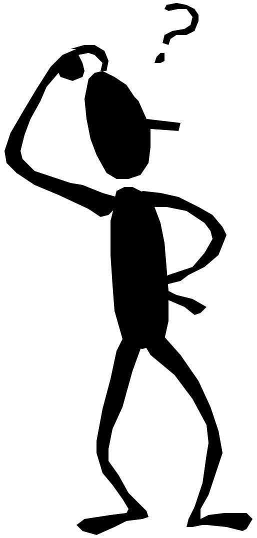
※Δtの微小性より，到着した客がΔt内にサービスを終了することはない

$R(t)$の導出

$R(t+\Delta t) = R(t) \times (1-\lambda\Delta t) + (1-R(t)) \times \mu\Delta t$ より

$$\frac{R(t+\Delta t)-R(t)}{\Delta t} = -l R(t) + m(1-R(t))$$

$R(t)$の時点tでの変化率



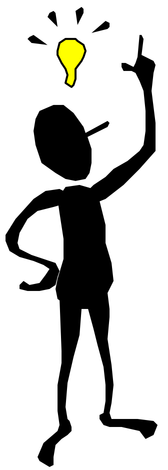
定常状態なら(左辺)＝ 任意の時点での変化率)＝0

よって,

$$R(t) = \frac{m}{l+m}$$

例題1 M/M/1 (0)

- 通信販売の注文を1つの電話で受ける
  - 注文は 1時間平均30本ででたらめに到着する
  - 注文の処理能力は一時間平均 40件は可能
- 問題 :注文の電話をした時話し中の確率は？



M/M/1(0)の例だね

M/M/*s* (0) の解析

- 窓口*s*個の場合
  - サービス率が*s*倍⇒*s* μ
- M/M/1(0)の解析結果より

$$R(t) = \frac{sm}{l + sm}$$

例題２チケット販売

- 人気コンサートの電話によるチケット販売
  - 注文は時間平均600本が予想される
  - 電話1台の1時間の処理能力は平均30本
- 注文の電話をした時に通話中である確率を1/3以下にしたい．電話を少なくとも何台用意する必要が有るか?

M/M/1(∞)の解析

- 解析が比較的楽なので多くの場面で適応される.
- 現実での例
  - 生物の出生死亡現象
  - 一窓口の切符売場,小売店
  - 一台のサーバーでの情報処理

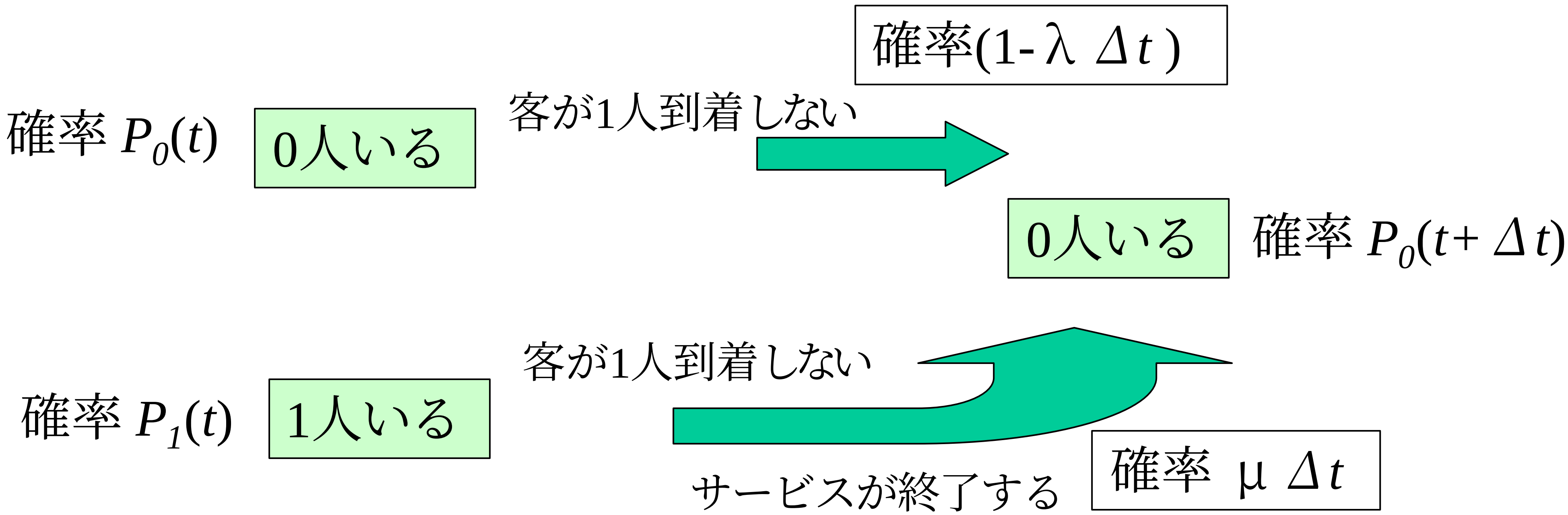
待ち行列が
無限大を許す？
集団で到着？

•現実例への適応は, 適応限界に留意して行うべき.

Δt時間内での変化の観察(1)

- $P_n(t)$:時刻tで系内にn人いる確率

$P_0(t)$と$P_1(t)$の関係を求めよう



※Δtの微小性より, 到着した客がΔt内にサービスを終了することはない

状態方程式（1）

$$P_0(t+\Delta t)$$
$$=(1-l\Delta t)P_0(t)+(1-l\Delta t)m\Delta t P_1(t)$$
$$=(1-l\Delta t)P_0(t)+(m\Delta t-lm\Delta t^2)P_1(t)$$
$$=(1-l\Delta t)P_0(t)+m\Delta t P_1(t)$$

λμΔt^2=0
とみなせる

よって $$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-lP_0(t)+mP_1(t)$$

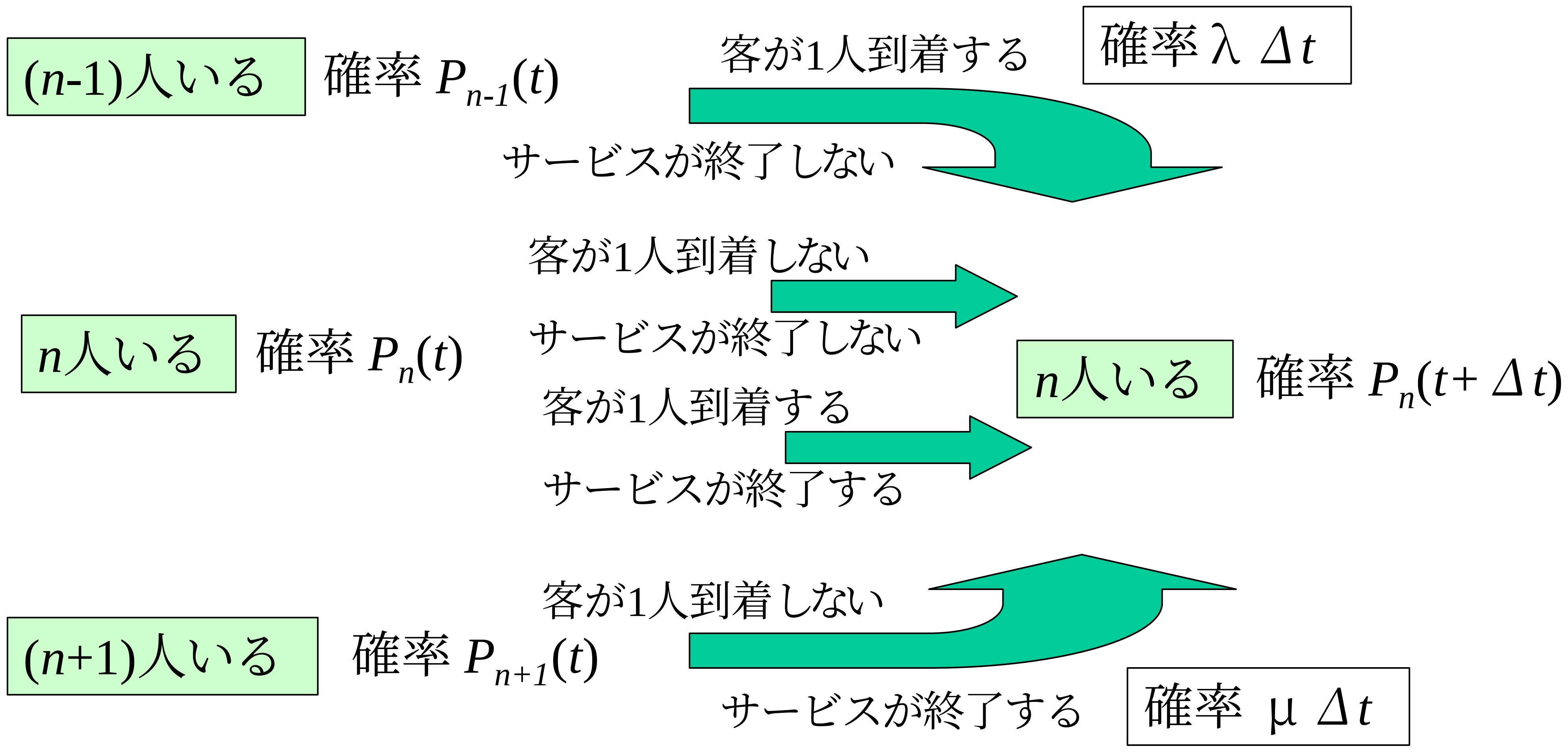
(左辺)=0より $$mP_1(t)=lP_0(t)$$

$$P_1(t)=\frac{l}{m}P_0(t)$$

状態方程式

Δt時間内での変化の観察（2）

- 一般的な場合　　（$n \geqq 1$）



状態方程式（2）

$$P_n(t+\Delta t)$$

$$= l\Delta t(1-m\Delta t)P_{n-1}(t)+(1-l\Delta t)(1-m\Delta t)P_n(t)$$

$$+ l\Delta t\cdot m\Delta t P_n(t)+(1-l\Delta t)m\Delta t P_{n+1}(t)$$

$$=(l\Delta t-lm\Delta t^2)P_{n-1}(t)+(1-l\Delta t-m\Delta t+2lm\Delta t^2)P_n(t)$$

$$+(m\Delta t-lm\Delta t^2)P_{n+1}(t)$$

$$= l\Delta t P_{n-1}(t)+(1-l\Delta t-m\Delta t)P_n(t)+m\Delta t P_{n+1}(t)$$

λμΔt^2=0
とみなせる

よって

$$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}= lP_{n-1}(t)-(l+m)P_n(t)+mP_{n+1}(t)$$

(右辺)=0より

$$lP_{n-1}(t)+mP_{n+1}(t)=(l+m)P_n(t)$$

$$P_{n+1}(t)-P_n(t)=\frac{l}{m}(P_n(t)-P_{n-1}(t))$$

状態方程式を解く（1）

（1）より $$P_1(t) = \frac{l}{m} P_0(t)$$

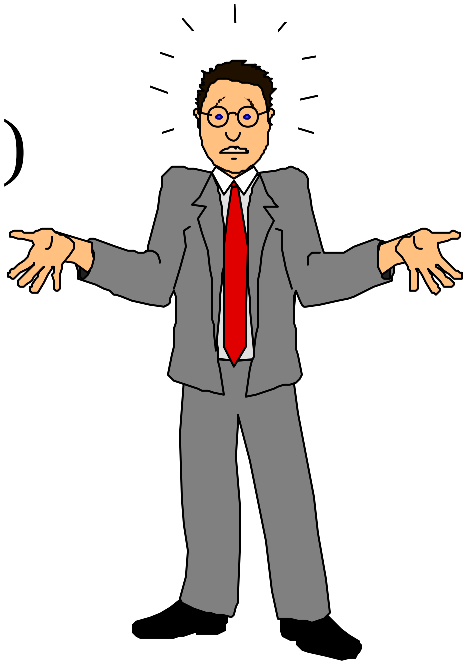
（2）より $$P_{n+1}(t) - P_n(t) = \frac{l}{m}(P_n(t) - P_{n-1}(t))$$ （n≧1）

$P_n(t)$を求めよう

$$P_2(t) = P_1(t) + \frac{l}{m}(P_1(t) - P_0(t)) = (\frac{l}{m})^2 P_0(t)$$

同様に

$$P_n(t) = (\frac{l}{m})^n P_0(t)$$



状態方程式を解く（2）

$P_n(t)$は確率⇒ $P_0(t)+P_1(t)+\cdot\cdot+P_n(t)+\cdot\cdot=1$

$$P_0(t)+(\frac{l}{m})^1P_0(t)+\cdots+(\frac{l}{m})^nP_0(t)+\cdots=1$$

$$\left(1+(\frac{l}{m})^1+\cdots+(\frac{l}{m})^n+\cdots\right)P_0(t)=1$$

λ/μ<1の時のみ
収束する

$$\frac{1}{1-\frac{l}{m}}P_0(t)=1$$

$$P_0(t)=1-\frac{l}{m}$$

状態方程式を解く（3）

状態方程式を解く（1）より $P_n(t) = (\frac{l}{m})^n P_0(t)$

状態方程式を解く（2）より $P_0(t) = 1 - \frac{l}{m}$

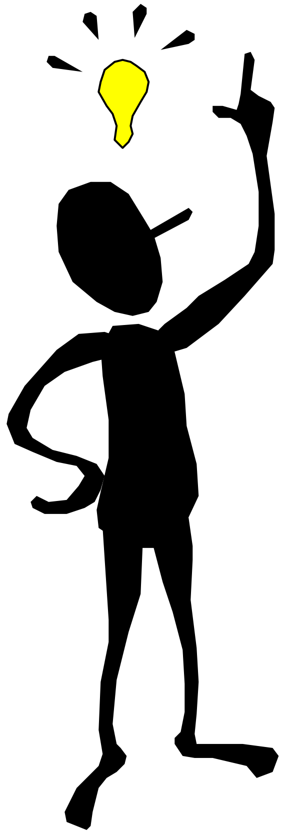
よって $P_n(t) = (\frac{l}{m})^n (1 - \frac{l}{m})$

$\frac{l}{m} = r$ とおくと $P_n(t) = r^n (1 - r)$

ローと読む

定常性より時刻tの概念は不要

$$P_n = r^n (1 - r)$$



ρの意味

- n=0の時⇔系内に客が1人もいない確率

$$P_0 = r^0(1-r) = 1-r$$

⇔系内に客がいる確率　ρ
⇔窓口が稼動している確率　ρ
⇔ρは<u>稼働率</u>（利用率, トラフィック密度）
　とも呼ばれる

- ρ<1の時のみ$P_0(t)$は定まる
  ⇔ρ≧1の時待ち行列は安定しない（長くなる一方）

系内滞留人数の平均

- $P_n = \rho^n(1-\rho)$を利用する
- （系内滞留人数の期待値）

$=0$人$\times P_0 + 1$人$\times P_1 + \cdot\cdot + k$人$\times P_k + \cdot\cdot$

$= 1\times\rho^1(1-\rho) + \cdot\cdot + k\times\rho^k(1-\rho) + \cdot\cdot$

$$= \frac{r}{1-r}$$

待ち人数の平均

- (待ち人数)

  =(系内滞留人数)－(サービス中の人数)

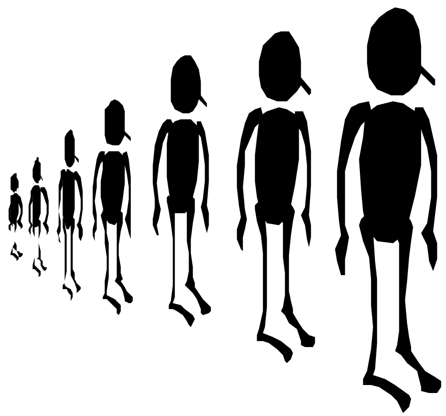
  ※M/M/1(∞)の場合 サービス中は1人

- （待ち人数の期待値）

  $=(1-1)$人$\times P_1+\cdot\cdot+(k-1)$人$\times P_k+\cdot\cdot$

  $=1\times\rho^2(1-\rho)+\cdot\cdot+(k-1)\times\rho^k(1-\rho)+\cdot\cdot$

  $$=\frac{r^2}{1-r}$$



演習１

- 湘南台駅の切符売場窓口の朝
  - 平均窓口利用人数 15人/時間
  - 一時間で処理できる平均件数 30件
- 以下の問に答えよ
  - 窓口の稼働率は？
  - 系内滞留人数の平均は？
  - 待ち人数の平均は?

演習2

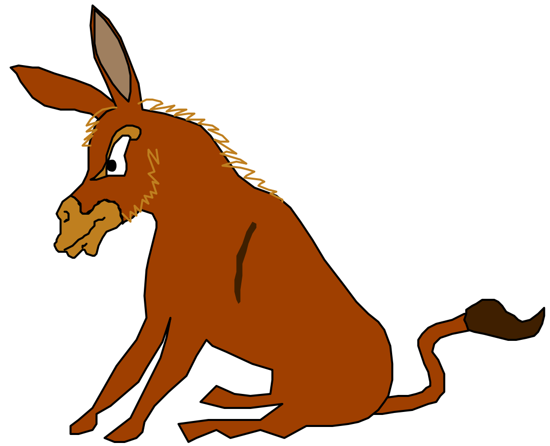
- 演習1の設定で, 窓口の処理能力のみ以下のように変化した.
  - 1時間で処理できる平均件数 :20件
  - 1時間で処理できる平均件数 :10件
- 各場合での稼働率,系内滞留時間の期待値,待ち人数の期待値を求めよ.
- 処理能力の変化と待ち行列の長さの変化の様子に関して考察せよ.

様々な解析値

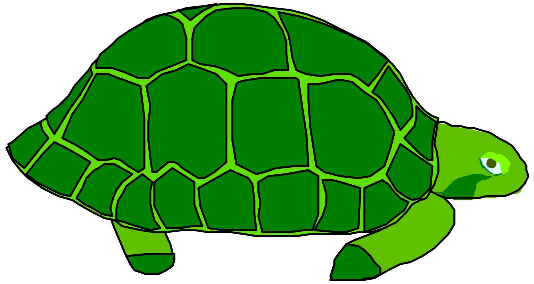
- 導出にはもう少しの学習が必要だが…
  - 待ち時間の期待値：　$\dfrac{r}{m-l}$
  - 系内滞留時間の期待値：　$\dfrac{r}{m-l}+\dfrac{1}{m}$
  - t 時間以上待つ確率：　$r\,e^{-(m-l)t}$

演習3

- 演習1の設定で以下の問に答えよ
  - 待ち時間の期待値を求めよ.
  - 系内滞留時間の期待値を求めよ.
- 待ち人数の期待値と待ち時間の期待値にはどのような関係が有るか.考察せよ.



演習4



- 湘南大学では同じマシンを多数導入している.
- 20分に1回の割合でどこかで故障が発生する.
- 修理は1人の担当者が行い平均15分かかる.

(1)担当者の修理能力は1時間あたり何回？

(2)担当者が休む時間は1時間あたり平均何分?

(3)故障発生時にすぐに修理を始められる確率は?

(4)故障発生から修理開始までの平均待ち時間は?

(5)故障発生から修理開始までの平均待ち時間を18分以内にするには, 平均何分で修理すれば良いか?