

選挙の数理

文教大学 情報学部

堀田 敬介

2010/4/22

選挙の選択（代表者の決定方法）

➤ 考察のための選挙のルール

- ✓ 複数の立候補者の中から**1人**を選ぶ
- ✓ 有権者は**全**立候補者に対する**選好**をもつ
- ✓ 立候補者が有権者の**過半数の支持**を得たら当選

（過半数得たのに落選という方法は許さないという意味で、過半数得ないと当選を認めないとは言っていない）

➤ 問い

- ✓ どんな選挙をすれば**公平**か？（選挙法を考えて！）
- ✓ 公平とは何か？
- ✓ 公平な選挙は実施**できる**のか？

選挙の選択（代表者の決定方法）

- 代表的な選挙方式

- 勝ち抜き投票方式 … 1対1の対決を繰り返す
- 総当り決戦投票方式 … 1対1の総当り戦. 勝ち星最多が当選
- 単記投票方式 … 有権者は1人を投票, 最大支持者当選
- 上位2者決戦投票方式 … 単記投票で過半数当選がいなければ上位2名の決選投票をする
- 勝ち抜き決戦投票方式 … 単記投票で過半数当選がいなければ, 最下位候補の票を振り分ける, これを繰り返し
- 順位評点方式 … 有権者は順位をつけ, 順位に応じた得点の総点最大者が当選
- etc.

選挙の選択(代表者の決定方法)

- コンドルセのパラドクス(A,B,C3人の選好)

- A: $X > Y > Z$
 - B: $Y > Z > X$
 - C: $Z > X > Y$
- 勝ち抜き投票方式
- 1) $X \text{ vs } Y \rightarrow X, X \text{ vs } Z \rightarrow Z$ Z win!
 - 2) $Y \text{ vs } Z \rightarrow Y, Y \text{ vs } X \rightarrow X$ X win!
 - 3) $Z \text{ vs } X \rightarrow Z, Z \text{ vs } Y \rightarrow Y$ Y win!

- ボルダのパラドクス(A~G7人の選好)

- A: $X > Y > Z$
 - B: $X > Y > Z$
 - C: $X > Y > Z$
 - D: $Y > Z > X$
 - E: $Y > Z > X$
 - F: $Z > Y > X$
 - G: $Z > Y > X$
- 単記投票方式
- 1) 最も好き [X:3票, Y:2票, Z:2票] $\rightarrow$ 最も好き=X
 - 2) 最も嫌い [X:4票, Y:0票, Z:2票] $\rightarrow$ 最も嫌い=X

- A: $X > Y > Z$
- B: $X > Y > Z$
- C: $X > Y > Z$
- D: $Y > Z > X$
- E: $Y > Z > X$
- F: $Y > Z > X$
- G: $Z > X > Y$

• フランス大統領選挙
• オリンピック開催地選定

上位2者決戦投票方式

(過半数獲得者がいないなら上位2者決戦投票)

- 1) 最も好き [X:3票, Y:3票, Z:1票]
 $\rightarrow X \text{ vs } Y \rightarrow 4 \text{ vs } 3 \rightarrow$ 最も好き=X
- 2) 最も嫌い [X:3票, Y:1票, Z:3票]
 $\rightarrow X \text{ vs } Z \rightarrow 4 \text{ vs } 3 \rightarrow$ 最も嫌い=X

選挙の選択(代表者の決定方法)

- コンドルセ勝者

- X > Y > Z : 10人
- X > Z > Y : 29人
- Y > X > Z : 11人
- Y > Z > X : 24人
- Z > X > Y : 11人
- Z > Y > X : 20人

勝ち抜き投票方式

- 1) X(50) vs Y(55) → Y
- 2) Y(45) vs Z(60) → Z
- 3) Z(55) vs X(50) → Z

1位:Z, 2位:Y, 3位:X

単記投票方式

X:39票, Y:35票, Z:31票 → 1位:X, 2位:Y, 3位:Z

総当たり決戦方式 (1vs1総当たりで勝ち星数の多い順)

1位:Z, 2位:Y, 3位:X

コンドルセ勝者

選挙の選択(代表者の決定方法)

• ボルダ点

- A: $W > X > Y > Z$
- B: $W > X > Y > Z$
- C: $W > X > Y > Z$
- D: $Z > W > X > Y$
- E: $Z > W > X > Y$
- F: $Y > Z > W > X$
- G: $Y > Z > W > X$

順位評点方式

(順位をつけ上位から点数をつける. 3人なら1位3点, 2位2点, 3位1点)

ボルダ点:

$$W(4 \times 3 + 3 \times 2 + 2 \times 2 = 22)$$

$$X(3 \times 3 + 2 \times 2 + 1 \times 2 = 15)$$

$$Y(2 \times 3 + 1 \times 2 + 4 \times 2 = 16)$$

$$Z(1 \times 3 + 4 \times 2 + 3 \times 2 = 17)$$

1位:W

2位:Z, 3位:Y, 4位:X

ここでWを除いてボルダ点を考えると...

ボルダ点:

$$X(3 \times 3 + 2 \times 2 + 1 \times 2 = 15)$$

$$Y(2 \times 3 + 1 \times 2 + 3 \times 2 = 14)$$

$$Z(1 \times 3 + 3 \times 2 + 2 \times 2 = 13)$$

1位:X, 2位:Y, 3位:Z

「無関係対象からの独立性」
を満たさない

※)「無関係対象からの独立性」 ← 民主主義の根本原則の一つ
X,Y,Zの選好順位は, Wがいるかいないかに関係ない(独立)

選挙の選択(代表者の決定方法)

- 戦略的操作可能性(嘘をつく)

- A: $W > X > Y > Z$
- B: $W > X > Y > Z$
- C: $X > W > Y > Z$

↓Cが嘘をつく

- A: $W > X > Y > Z$
- B: $W > X > Y > Z$
- C: $X > Y > Z > W$

Xを選びたいためにWを4位に

ボルダ点:

$$\begin{aligned} W(4 \times 2 + 3 \times 1 &= 11) \\ X(3 \times 2 + 4 \times 1 &= 10) \\ Y(2 \times 3 &= 6) \\ Z(1 \times 3 &= 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(4 \times 2 + 1 \times 1 &= 9) \\ X(3 \times 2 + 4 \times 1 &= 10) \\ Y(2 \times 2 + 3 \times 1 &= 7) \\ Z(1 \times 2 + 2 \times 1 &= 4) \end{aligned}$$

順位評点方式

1位:W, 2位:X, 3位:Y, 4位:Z



1位:X, 2位:W, 3位:Y, 4位:Z

「戦略的操作可能」

選挙の選択(代表者の決定方法)

- パウロスの全員当選モデル (ジョン・パウロス1991)

- $V > W > X > Y > Z$: 18人
- $Z > X > W > Y > V$: 12人
- $Y > Z > X > W > V$: 10人
- $W > Y > X > Z > V$: 9人
- $X > Z > W > Y > V$: 4人
- $X > Y > W > Z > V$: 2人

$V(18), W(9), X(6), Y(10), Z(12)$

単記投票方式

Vが当選

上位2者決選投票方式

$V(18)$ vs $Z(12+10+9+4+2=37)$ → **Z**が当選

勝ち抜き決選投票方式

→ $V(18), W(9), Y(10+2), Z(12+4)$

→ $V(18), Y(10+2+9), Z(12+4)$

→ $V(18), Y(10+2+9+12+4)$ → **Y**が当選

(有権者: 55人, 過半数28人)

順位評点方式

$V(5*18+1*37=127)$

$W(5*9+4*18+3*18+2*10=191)$

$X(5*6+4*12+3*37=189)$

$Y(5*10+4*11+2*34=162)$

$Z(5*12+4*14+2*11+1*18=156)$ → **W**が当選

総当り投票方式

X vs $V(37$ vs $18), X$ vs $W(28$ vs $27),$

X vs $Y(36$ vs $19), X$ vs $Z(33$ vs $22)$ → **X**が当選

選挙の選択（代表者の決定方法）

- アロウの一般不可能性定理（ケネス・アロウ1951）

- 合理的な個人選好が満たすべき2つの条件

1. 選好の連結律: $X > Y$ or $X < Y$ が成立 (どんな選択肢も選好順位付け可能)
2. 選好の推移律: $X > Y$ and $Y > Z \rightarrow X > Z$

- 民主主義社会に必要な不可欠な4つの条件

- a. 個人選好の無制約性 ... 個人はいかなる選好順序ももてる
- b. 市民の主権性 (パレート最適性) ... 全ての個人が $X > Y$ なら社会も $X > Y$ など
- c. 無関係対象からの独立性 ...
- d. 非独裁性 ... 独裁者は存在しない

- 完全民主主義モデル

- 個人が2つの条件を満たし、社会が4つの条件を満たす

- 社会的選択関数

- 2人以上の個人が3つ以上の有限個の選択肢に選好順序を持つ場合の全ての社会的決定方式を表す

定理『完全民主主義モデルには、社会的選択関数は存在しない』

選挙の選択（代表者の決定方法）

- アロウの一般不可能性定理（ケネス・アロウ1951）

- 合理的な個人選好が満たすべき2つの条件

1. 選好の連結律: $X > Y$ or $X < Y$ が成立 (どんな選択肢も選好順位付け可能)
2. 選好の推移律: $X > Y$ and $Y > Z \rightarrow X > Z$

- 民主主義社会に必要な不可欠な4つの条件

- a. 個人選好の無制約性
- b. 市民の主権性 (パレート最適性)
- c. 無関係対象からの独立性
- d. 非独裁性

- 勝ち抜き投票方式 $\Rightarrow$ コンドルセのパラドクス
- 単記投票方式 $\Rightarrow$ ボルダのパラドクス
- 上位2者決選投票方式 $\Rightarrow$ ボルダのパラドクス
- 総当たり決選方式 $\Rightarrow$
- 複数記名方式 $\Rightarrow$
- 順位評点方式 (ボルダ点) $\Rightarrow$ 無関係対象から独立でない, 戦略的操作可能性

参考文献

[1] 高橋昌一郎「理性の限界 ―不可能性・不確定性・不完全性―」講談社(2008)