

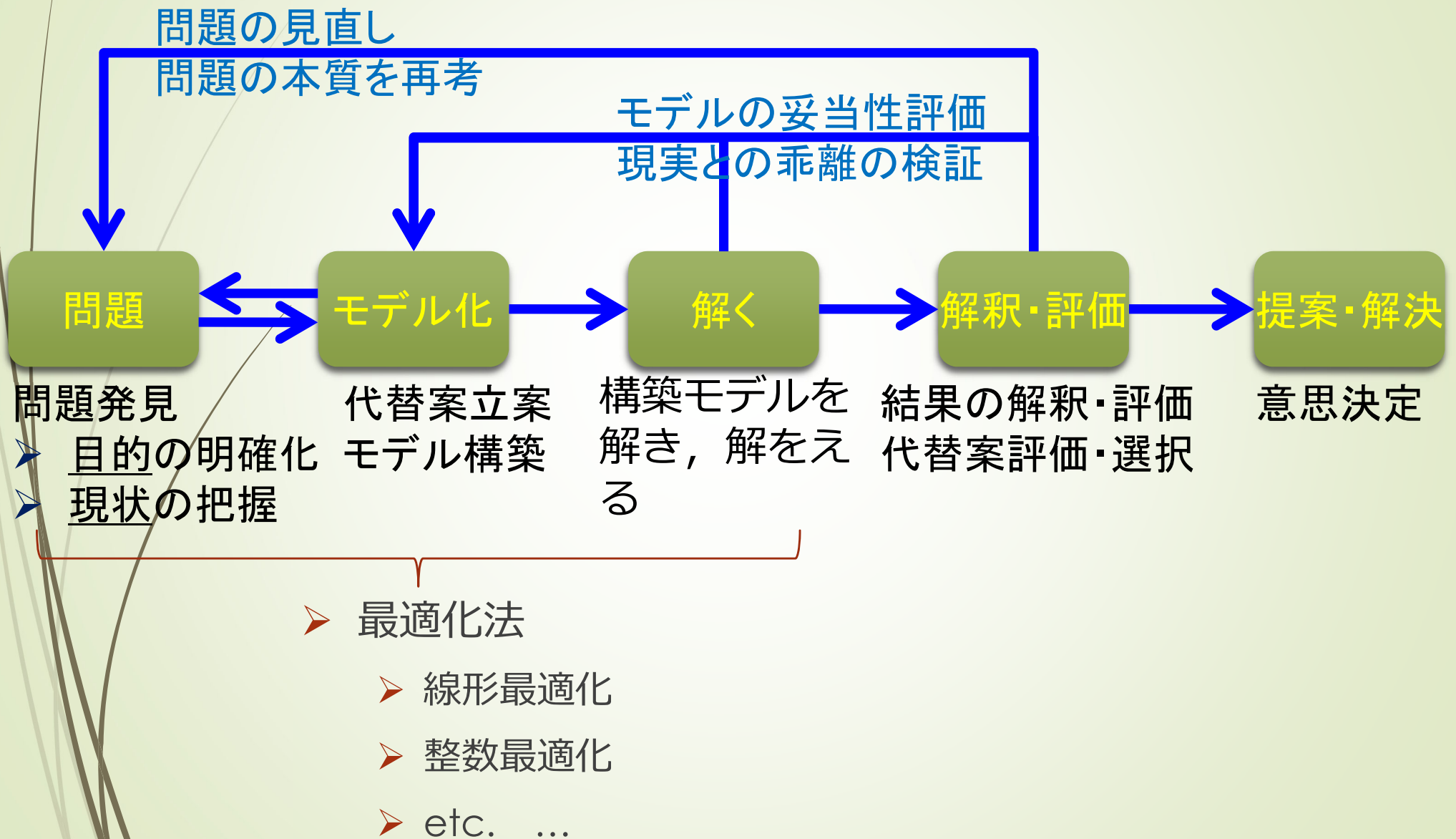
意思決定科学

最適化法：線形最適化

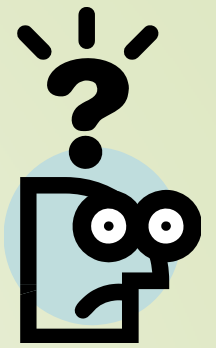
堀田 敬介

2021/9/30, Thu.

はじめに



線形最適化



➡ 例題：効率的なアルバイト

- ➡ 時給1200円の清掃作業，時給900円のウェ이터ー2つ
- ➡ 仕事を行うとストレスがたまり 各々時間あたり5, 3である

¥1,200/h
5 stress/h



¥900/h
3 stress/h



- ➡ アルバイトをする時間は，週末に5時間である
- ➡ 健康のため，ストレス許容量を21とする
- ➡ これらの条件のもとで最大のアルバイト料を得るには，どちらのアルバイトをどれだけすればよいか？

時給1200円 $\geq$ 時給900円
だから、5時間全てを清掃作業で！

でも...，
ストレス： $5 \times 5 = 25 > 21$ （許容量）

線形最適化

■ 例題：効率的なアルバイト

- 時給1200円の清掃作業，時給900円のウェ이터ー2つ
- 仕事を行うとストレスがたまり 各々時間あたり5, 3である
- アルバイトをする時間は，週末に5時間である
- 健康のため，ストレス許容量を21とする

定式化

$$\max. 1200x_1 + 900x_2$$

$$\text{s. t.} \quad x_1 + x_2 \leq 5$$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 21$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

← アルバイト代**最大化**

← アルバイト時間**制約**

← 許容ストレス**制約**

← アルバイト時間は**非負**

最適化モデル

線形最適化, LP; Linear Program (optimization)

線形最適化

■ 解いてみよう

$$\begin{array}{ll}\max. & 12x_1 + 9x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

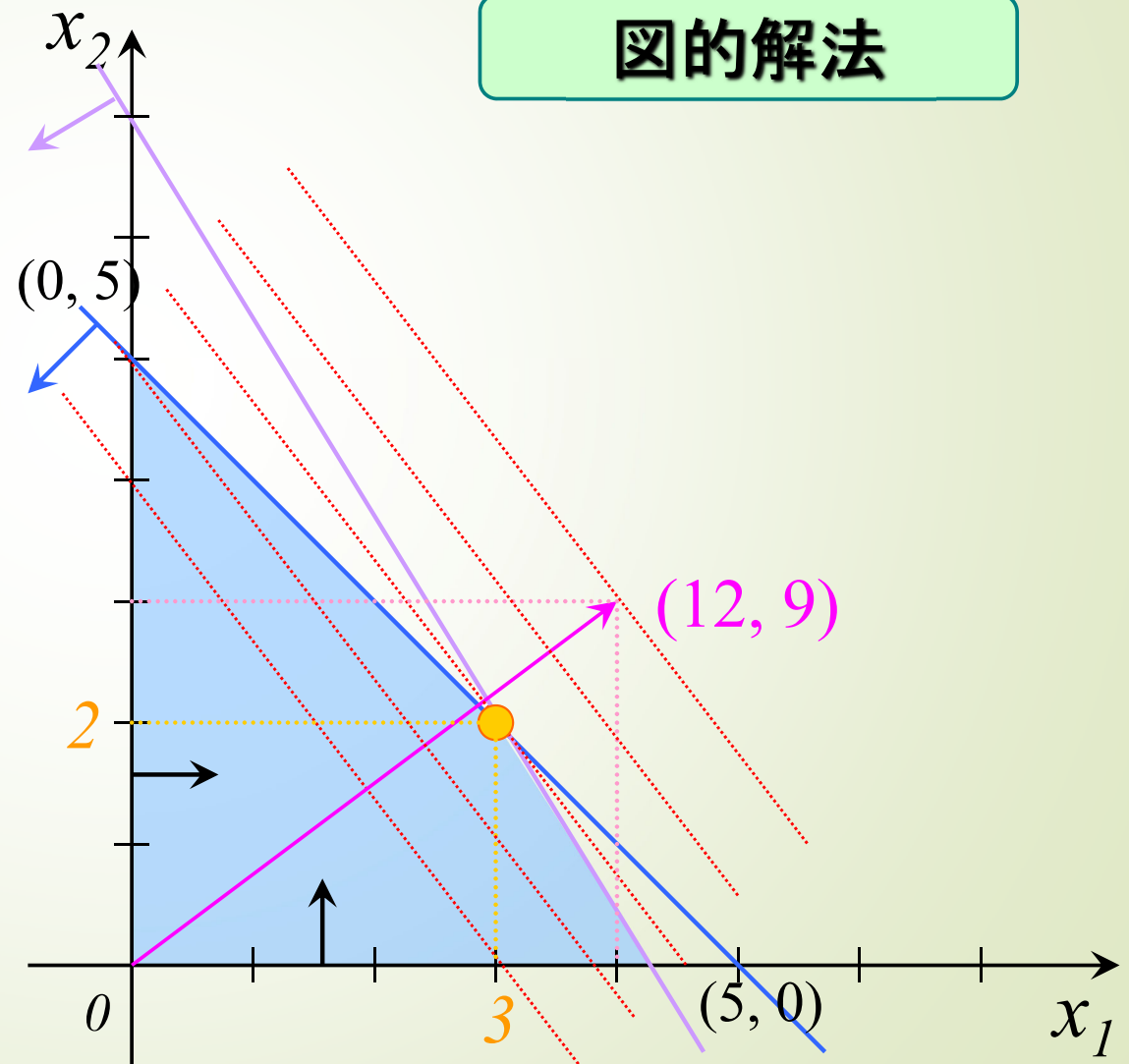
最適解: $(x_1, x_2) = (3, 2)$

{ 清掃作業を3時間
ウェ이터を2時間

最適値: ¥5,400

注: 図的解法が使えるのは
2次元 (頑張って3次元) ま
で. それ以上の高次元はど
うするの?

図的解法



演習：LPによる定式化と図解による求解

■ 最適勉強時間

- 太郎君は期末試験に備えて2科目A, Bの勉強をしたい
 - Aの勉強時間1時間あたり期末試験15点アップできる
 - Bの勉強時間1時間あたり期末試験20点アップできる
 - Aの勉強時間1時間あたり20の疲労度がたまる
 - Bの勉強時間1時間あたり30の疲労度がたまる
 - 太郎君に残された勉強時間は最大10時間
 - 太郎君の許容できる蓄積総疲労度は最大240
 - 単位取得のために, AもBも60点以上が必要
- 2科目の総得点が最大となるように A, B の勉強時間を割り振りたい.
それぞれ何時間ずつ勉強すればよいか?
 1. 変数を設定する (求めたいものを変数にする)
 2. LPに定式化する
 3. 図解で求解する

線形最適化

$$\begin{aligned} \max. & 12x_1 + 9x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

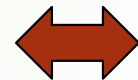
$$\begin{aligned} \max. & 12x_1 + 9x_2 \quad -z = 0 \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 + s_1 = 5 \\ & 5x_1 + 3x_2 + s_2 = 21 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max. & 9/5x_2 - 12/5s_2 - z = -252/5 \\ \text{s. t.} & 2/5x_2 + s_1 - 1/5s_2 = 4/5 \\ & x_1 + 3/5x_2 + 1/5s_2 = 21/5 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

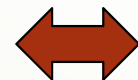
$$\begin{aligned} \max. & -9/2s_1 - 3/2s_2 - z = -54 \\ \text{s. t.} & x_2 + 5/2s_1 - 1/2s_2 = 2 \\ & x_1 - 3/2s_1 + 1/2s_2 = 3 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

初期解

$$(x_1, x_2, s_1, s_2) \\ (0, 0, 5, 21)$$

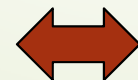


$$(x_1, x_2, s_1, s_2) \\ (21/5, 0, 4/5, 0)$$



最適解

$$(x_1, x_2, s_1, s_2) \\ (3, 2, 0, 0)$$



単体法 (simplex method) の実行ループ

1. 被約費用で正を見つける → ない場合終了
2. ratio test をし, 最小値を見つける
3. pivot (掃き出し) で基底変数と非基底変数を交換

reduced cost nonbasic variable simplex tableau

	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	ratio test
Obj	12	9	0	0	0	
s_1	1	1	1	0	5	5/1
s_2	5	3	0	1	21	21/5

pivot

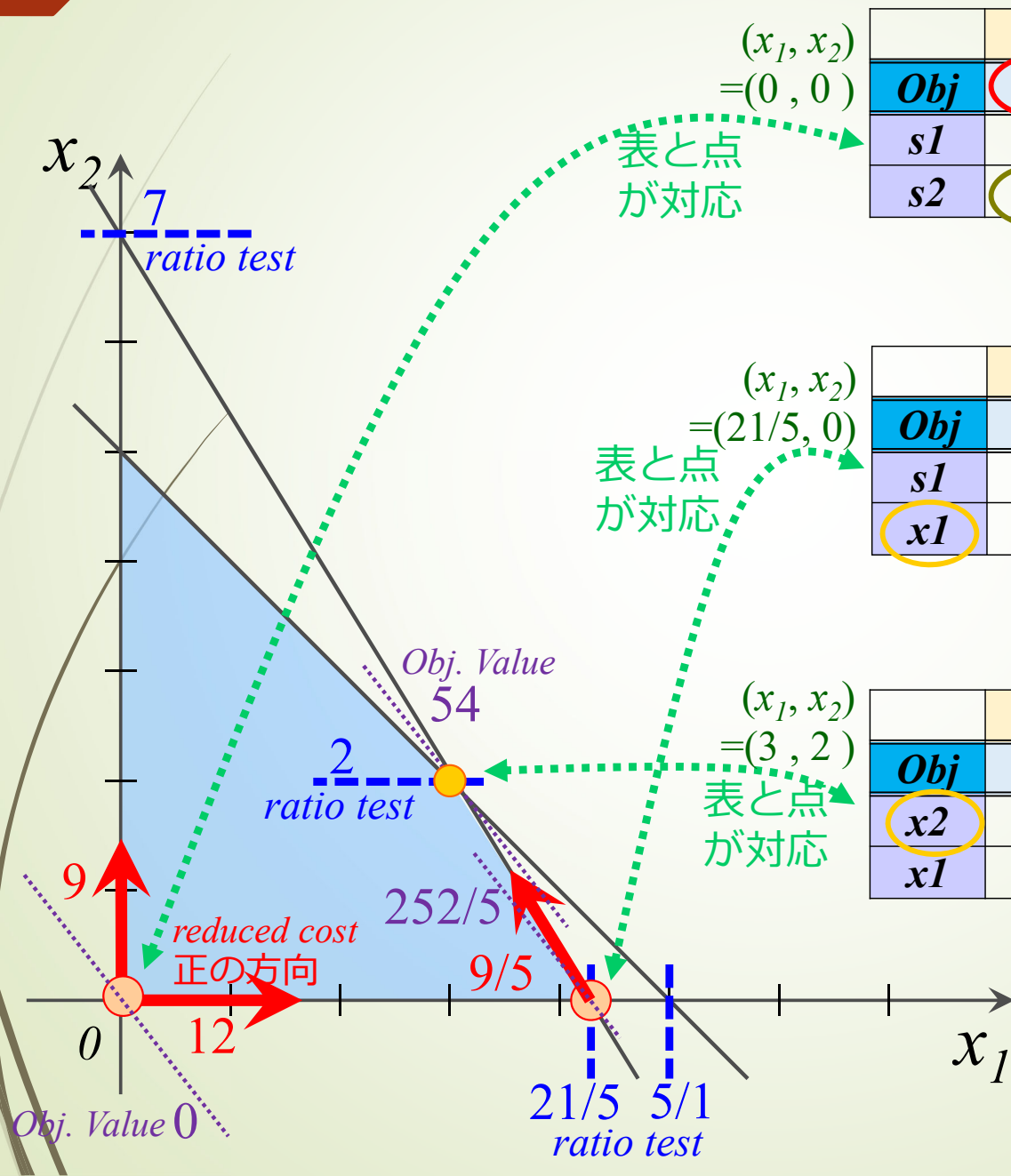
	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	
Obj	0	9/5	0	-12/5	-252/5	
s_1	0	2/5	1	-1/5	4/5	2
x_1	1	3/5	0	1/5	21/5	7

	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs
Obj	0	0	-9/2	-3/2	-54
x_2	0	1	5/2	-1/2	2
x_1	1	0	-3/2	1/2	3

線形最適化

単体法は何をしているのか？

単体法 (simplex method)



(x_1, x_2)
 $= (0, 0)$

表と点
が対応

	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	x_1
Obj	12	9	0	0	0	
s_1	1	1	1	0	5	$5/1$
s_2	5	3	0	1	21	$21/5$



(x_1, x_2)
 $= (21/5, 0)$

表と点
が対応

	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	x_2
Obj	0	$9/5$	0	$-12/5$	$-252/5$	
s_1	0	$2/5$	1	$-1/5$	$4/5$	2
x_1	1	$3/5$	0	$1/5$	$21/5$	7



(x_1, x_2)
 $= (3, 2)$

表と点
が対応

	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs
Obj	0	0	$-9/2$	$-3/2$	-54
x_2	0	1	$5/2$	$-1/2$	2
x_1	1	0	$-3/2$	$1/2$	3

線形最適化

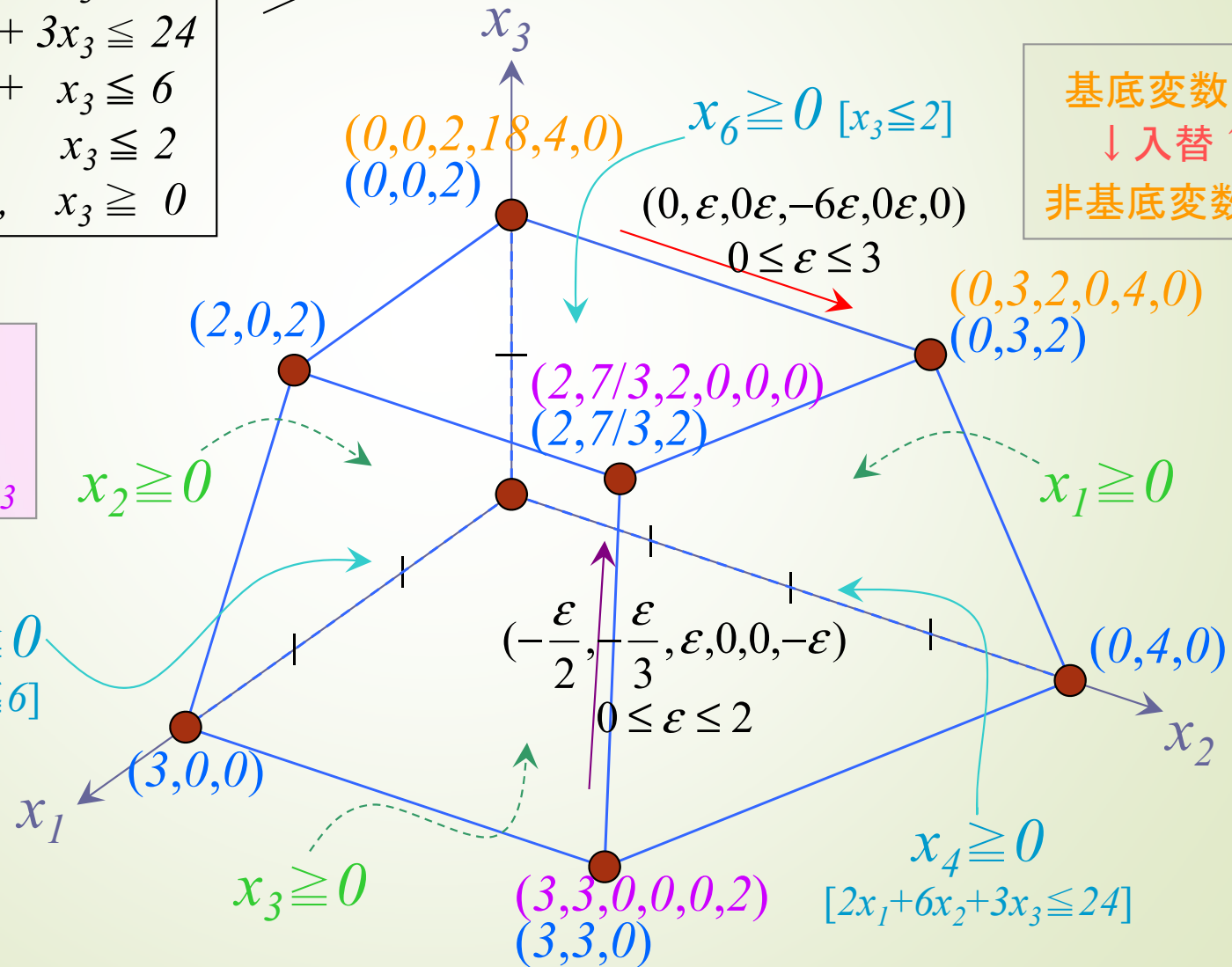
単体法の幾何学的意味

$$\begin{aligned}
 \max. \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 24 \\
 & 2x_1 + x_3 \leq 6 \\
 & x_3 \leq 2 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \max. \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 24 \\
 & 2x_1 + x_3 + x_5 = 6 \\
 & x_3 + x_6 = 2 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

基底変数 x_6
↓入替↑
非基底変数 x_3

基底変数 x_4
↓入替↑
非基底変数 x_2



※この例題では
全端点で非退化

演習 3 : 単体法と幾何学的意味

単体法で解こう

$$\begin{aligned}
 \max. \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 24 \\
 & 2x_1 + x_3 \leq 6 \\
 & x_3 \leq 2 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \max. \quad & z = x_1 + x_2 + x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 24 \\
 & 2x_1 + x_3 + x_5 = 6 \\
 & x_3 + x_6 = 2 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	rhs	ratio test
Obj	1	-1	-1	-1	0	0	0	0	
x_4	0	2	6	3	1	0	0	24	24/2
x_5	0	2	0	1	0	1	0	6	6/2
x_6	0	0	0	1	0	0	1	2	2/0

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	rhs	ratio test
Obj	1	0	-1	-1/2	0	1/2	0	3	
x_4	0	0	6	2	1	-1	0	18	18/6
x_1	0	1	0	1/2	0	1/2	0	3	3/0
x_6	0	0	0	1	0	0	1	2	2/0

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6; z)$

$(0, 0, 0, 24, 6, 2; 0)$

非基底
変数

基底
変数

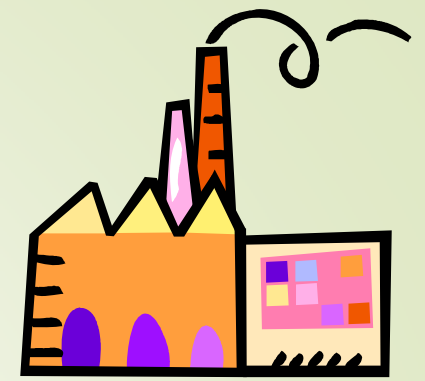
$(3, 0, 0, 18, 0, 2; 3)$

非基底
変数

基底
変数

$(3, 3, 0, 0, 0, 2; 6)$

演習：LPによる定式化



■ 最適生産量問題

- ある工場では3つの製品A, B, Cを作っている
- A, B, Cを1単位作るのに各々以下の材料が必要
 - 材料Pが其々 6kg , 2kg , 3kg ,
 - 材料Qが其々 3kg , 2kg , 5kg ,
 - 材料Rが其々 4l , 3l , 2l ,
 - 材料Sが其々 5g , 1g , 9g
- この工場で使用できる材料P, Q, R, Sの量は, 其々 2500kg , 3000kg , 1800l , 5000g である
- A, B, Cを1単位売って得られる利益が各々7万円, 4万円, 5万円
- 利益最大となるA, B, Cの生産単位はいくつか？

PCソフトを利用してLPを解く

※赤字は湘南校舎PC
で使えるソフト

ソフトを利用して解く

- gurobi 商用, Academic利用期間限定無料
- FICO Xpress 商用, 学生試用版無料
- IBM Ilog cplex 商用, Academic利用無料
- SCIP フリー
- Excel Solver 商用
- LINGO/LINDO 商用
- GLPK フリー
- Matlab 商用
- Octave フリー
- Scilab フリー
- etc.

参考：数理モデル

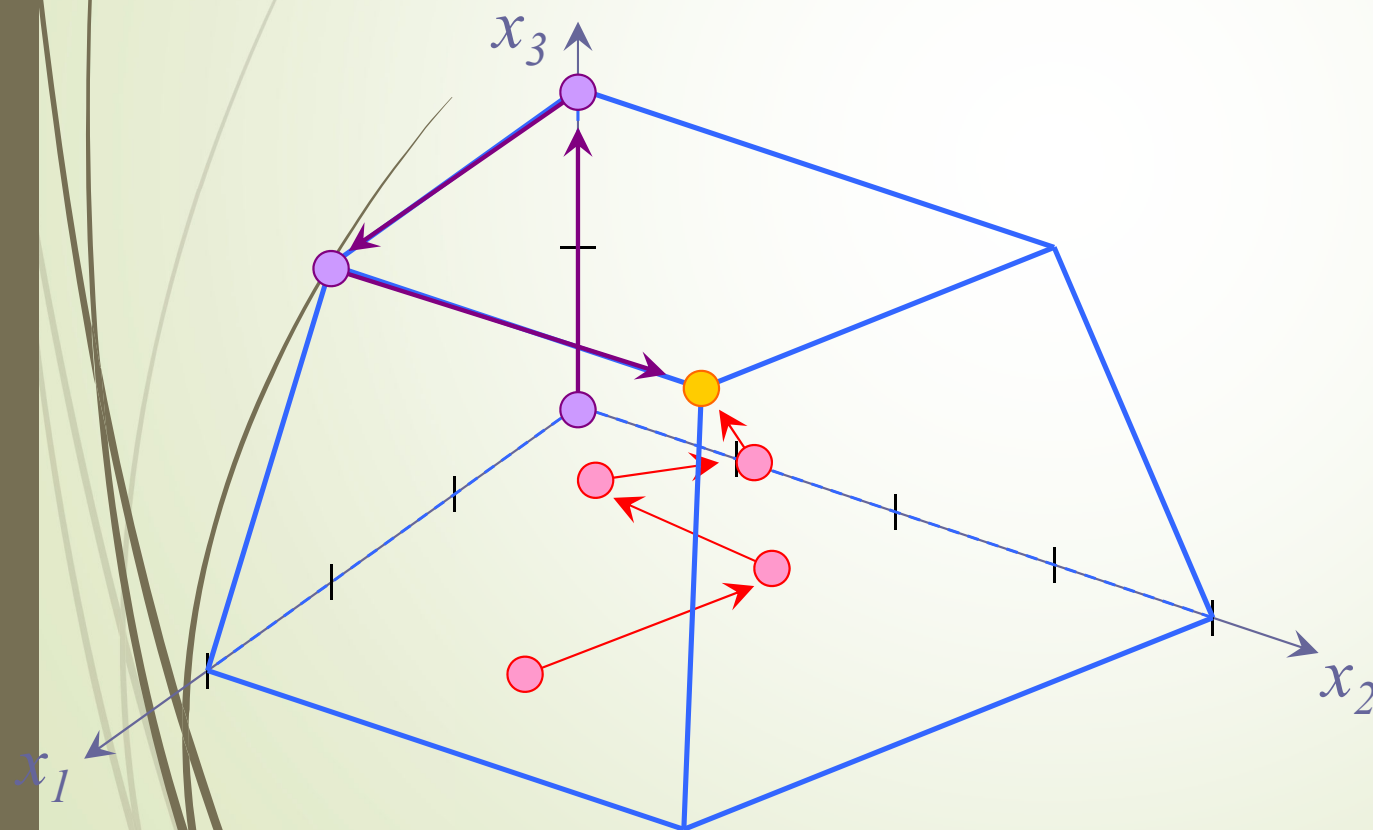
線形計画問題を解く2つの解法

単体法 (*simplex method*)

G.B.Dantzig (1947)

内点法 (*interior point method*)

N.Karmarkar (1984)



参考：主双対内点法

主・双対問題(行列表記)

$$\begin{array}{ll} \max. \mathbf{c}^t \mathbf{x} & \min. \mathbf{b}^t \mathbf{y} \\ \text{s.t. } \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} & \text{s.t. } \mathbf{A}^t \mathbf{y} + \mathbf{s} = \mathbf{c} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Newton方程式

$$\begin{bmatrix} A & O & O \\ O & A^t & I \\ S & O & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{y} \\ \Delta \mathbf{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}$$

Jacobi行列

Newton方向ベクトル

$$d_j = \mu - x_j s_j \\ (j=1, \dots, n)$$

Coffee break simplex ?

Def. Let S be an arbitrary set in E_n . The convex hull of S , denoted by $H(S)$, is the collection of all convex combination of S .

In other words, $\mathbf{x} \in H(S)$ if and only if

- $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{x}_j$
- $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 (\forall j)$
- $\mathbf{x}_j \in S (\forall j)$

Def. The convex hull of a finite number of points $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1}$ in E_n is called a polytope.

Def. A collection of vectors $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ in E_n is considered to be linearly independent, if $\sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{x}_j = 0$ implies that $\lambda_j = 0$ for all j .

Def. A collection of vectors $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1}$ in E_n is considered to be affinely independent, if $(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1), \dots, (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_1)$ are linearly independent.

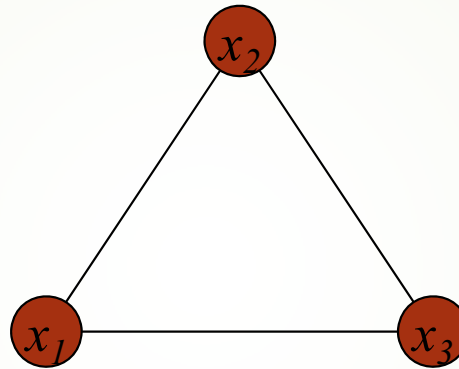
Def. If $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1}$ are affinely independent, $H(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1})$ is called a simplex with $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1}$.

Coffee break simplex ?

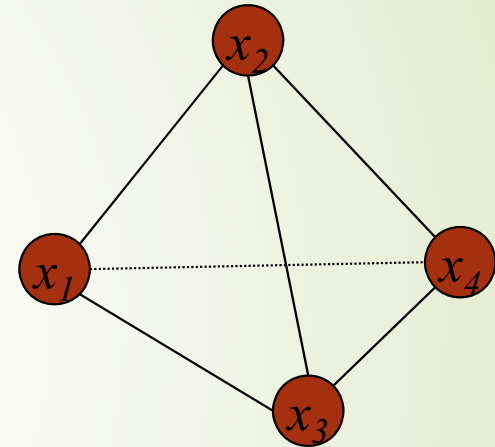
The regular n -dimensional simplex



$n=1$



$n=2$



$n=3$

双対問題

Primal

Dual

➡ 主問題 (P)

$$\begin{array}{ll}\max. & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

➡ 双対問題 (D)

$$\begin{array}{ll}\min. & 5y_1 + 21y_2 \\ \text{s. t.} & y_1 + 5y_2 \geq 4 \\ & y_1 + 3y_2 \geq 3 \\ & y_1, y_2 \geq 0\end{array}$$

対称型の主・双対問題

$$\begin{array}{ll}\max. & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 = 5 \\ & 5x_1 + 3x_2 = 21 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\min. & 5y_1 + 21y_2 \\ \text{s. t.} & y_1 + 5y_2 \geq 4 \\ & y_1 + 3y_2 \geq 3\end{array}$$

標準型の主・双対問題

一般的には...



双対定理

(P)

$$\begin{array}{ll}\max. & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

(D)

$$\begin{array}{ll}\min. & 5y_1 + 21y_2 \\ \text{s. t.} & y_1 + 5y_2 \geq 4 \\ & y_1 + 3y_2 \geq 3 \\ & y_1, y_2 \geq 0\end{array}$$

弱双対定理

任意の実行可能解 $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ について
$$4x_1 + 3x_2 \leq 5y_1 + 21y_2$$

が成り立つ

証明)

$$\begin{aligned} & 4x_1 + 3x_2 \\ & \leq (y_1 + 5y_2)x_1 + (y_1 + 3y_2)x_2 \\ & = (x_1 + x_2)y_1 + (5x_1 + 3x_2)y_2 \\ & \leq 5y_1 + 21y_2 \end{aligned}$$

一般的には...



双対定理

主問題(P) に最適解 (x_1^*, x_2^*) が存在するならば,
双対問題(D) にも最適解 (y_1^*, y_2^*) が存在し, 最適値は等しい, 即ち
$$4x_1^* + 3x_2^* = 5y_1^* + 21y_2^*$$

が成り立つ

証明略

双対定理

(P)

$$\begin{array}{ll} \max. & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(D)

$$\begin{array}{ll} \min. & 5y_1 + 21y_2 \\ \text{s. t.} & y_1 + 5y_2 \geq 4 \\ & y_1 + 3y_2 \geq 3 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

相補性定理

主問題(P) と双対問題(D) の実行可能解 (x_1, x_2) , (y_1, y_2) が (P), (D) の最適解であるための必要十分条件は,

$$\begin{cases} x_1(y_1 + 5y_2 - 4) = 0 \\ x_2(y_1 + 3y_2 - 3) = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} y_1(5 - x_1 + x_2) = 0 \\ y_2(21 - 5x_1 + 3x_2) = 0 \end{cases}$$

が成立することである

証明略

双対問題

双対問題の考え方

$$\begin{array}{l}
 \text{(P)} \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \max. \quad \underline{15}x_1 + \underline{13}x_2 \\
 \text{s. t.} \quad x_1 + 3x_2 \leq 5 \quad \dots \textcircled{1} \\
 \quad \quad 3x_1 + x_2 \leq 7 \quad \dots \textcircled{2} \\
 \quad \quad 11x_1 + x_2 \leq 17 \quad \dots \textcircled{3} \\
 \quad \quad x_1, x_2 \geq 0
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{(D)} \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \min. \quad 5y_1 + 7y_2 + 17y_3 \\
 \text{s. t.} \quad y_1 + 3y_2 + 11y_3 \geq 15 \\
 \quad \quad 3y_1 + y_2 + y_3 \geq 13 \\
 \quad \quad y_1, y_2, y_3 \geq 0
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\textcircled{1} \times 3 + \textcircled{2} \times 4 + \textcircled{3} \times 0$$

$$\underline{15}x_1 + \underline{13}x_2 \leq 43 \quad \Rightarrow \quad \text{目的関数値は43以下！}$$

$$\textcircled{1} \times 4 + \textcircled{2} \times 0 + \textcircled{3} \times 1$$

$$\underline{15}x_1 + \underline{13}x_2 \leq 37 \quad \Rightarrow \quad \text{目的関数値は37以下！}$$

$$\textcircled{1} \times y_1 + \textcircled{2} \times y_2 + \textcircled{3} \times y_3$$

$$(x_1 + 3x_2)y_1 + (3x_1 + x_2)y_2 + (11x_1 + x_2)y_3 \leq 5y_1 + 7y_2 + 17y_3$$

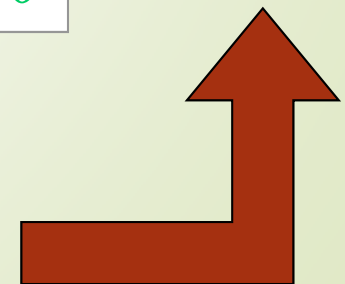
$$\Leftrightarrow (\underline{y_1 + 3y_2 + 11y_3})x_1 + (\underline{3y_1 + y_2 + y_3})x_2 \leq 5y_1 + 7y_2 + 17y_3$$

$$\textcircled{*}) \quad x_1, x_2 \geq 0$$

$$\begin{array}{c} \text{VII} \\ \underline{15} \end{array} x_1 + \begin{array}{c} \text{VII} \\ \underline{13} \end{array} x_2$$

$$\textcircled{*}) \quad y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

minimize



双対理論からの解法の考察

(i)~(iii)全てを満たす
 $(x_1^*, x_2^*), (y_1^*, y_2^*)$
が (主・双対) 最適解

➡ (対称型の) 主・双対線形計画問題を解くことは

$$(i) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 21 \end{cases} \quad x_1, x_2 \geq 0$$

主実行可能条件

$$(ii) \quad \begin{cases} y_1 + 5y_2 \geq 4 \\ y_1 + 3y_2 \geq 3 \end{cases} \quad y_1, y_2 \geq 0$$

双対実行可能条件

$$(iii) \quad \begin{cases} x_1(y_1 + 5y_2 - 4) = 0 \\ x_2(y_1 + 3y_2 - 3) = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} y_1(5 - x_1 + x_2) = 0 \\ y_2(21 - 5x_1 + 3x_2) = 0 \end{cases}$$

相補性条件

を満たす解 $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ を見つけること.

(主) 単体法 (*simplex method*)

(i), (iii)を満たしつつ, (ii)の成立で終了

双対単体法 (*dual simplex method*)

(ii), (iii)を満たしつつ, (i)の成立で終了

(主双対) 内点法 (*primal-dual IPM*)

(i), (ii)を満たしつつ, (iii)の成立で終了

注: 反復中(i),
(ii)を満たさないなどバリ
エーションがある

一般的には...



参考文献

- 今野浩 「線形計画法」 日科技連(1987)
- 反町洋一 「線形計画法の実際」 産業図書(1992)
- H.P.Williams 「数理計画モデルの作成法」 産業図書(1995)
- 大山達雄 「最適化モデル分析」 日科技連(1993)
- 福島雅夫 「数理計画入門」 朝倉書店(1996)
- 田村明久・村松正和 「最適化法」 共立出版(2002)
- 藤田宏・今野浩・田邊國士 「最適化法」 岩波書店(1994)
- 小島正和・土谷隆・水野眞治・矢部博 「内点法」 朝倉書店(2001)
- 森雅夫・松井知己 「オペレーションズ・リサーチ」 朝倉書店(2004)