

問題解決

# 最適化基礎

堀田 敬介

# 行列 matrix

- 数値を長方形の形に並べて括弧でくくったものを**行列matrix**とよぶ
- 横の並びを**行row**, 縦の並びを**列column**とよぶ
- 行数が $m$ , 列数が $n$ の行列を **$m \times n$ 行列**とか **$(m,n)$ 型行列**とよぶ
- 行数と列数の組合せである $(m, n)$ を行列の**大きさsize**とよぶ
- 行数 $m$ と列数 $n$ が等しい時, 即ち $n \times n$ 行列を **$n$ 次正方行列**とよぶ
- 行列内の数値を, 行列の**成分component** (or **要素element**) とよぶ

– 例)  $2 \times 3$  行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

(2,3) 成分

「2行2列目の成分が-4だよ」の様に使う

3次正方行列

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

正方行列の**対角成分diagonal elements**  
正方行列は行数と列数が同じなので、  
対角成分は左上の(1,1)成分～右下の  
( $n,n$ )成分となる

(※例では(1,1), (2,2), (3,3)成分)

※外側の括弧は, ( ) の代わりに [ ] を使う場合もある (特に決まりはない. 好みの問題)

# ベクトル vector

- $m \times 1$  行列を **m次元ベクトル m-dimensional vector** とよぶ
- $1 \times n$  行列を **n次元ベクトル n-dimensional vector** よぶ

– 例) 3次元ベクトル

$$(4 \quad 7 \quad -2)$$

2次元ベクトル

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**次元 dimension** とは, 単にベクトルの 成分の数 だと思えば良い

※3次元ベクトルは, 数値が3つあるので3次元

※図に描画する場合に, 座標が何個あるかに関係するので次元という言葉が出てくる  
(2次元ベクトルは, 2次元空間上に, 3次元ベクトルは3次元空間上に描画される)

※ベクトルを「行(横)」で書くか「列(縦)」で書くかは好みだが, どちらかに統一して話を進める. ここでは「列(縦)ベクトル」に統一して話を進める

## ➤ 行列とベクトルの表現

– 例えば, 行列は大文字のアルファベットで表記する  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

– 例えば, ベクトルは小文字の太字で表記する  $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

# 単位行列と零行列, 行列の転置

- ▶ 対角成分が全て1でそれ以外が0の行列を**単位行列identity matrix, unit matrix** とよび, 記号 $I$ で表す

– 例) 3次元単位行列

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2次元単位行列

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ▶ 要素が全て0の行列を**零行列zero matrix**とよび,  $O$ で表す

– 例) 3次元零行列

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2次元零行列

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ 行列 $A$ の $(i,j)$ 成分を全て $(j,i)$ 成分に替えたものを**転置行列transposed matrix**とよび $A^T$ と書く. また, この操作を「行列 $A$ を**転置する**」とよぶ

- ▶ 例えば $(1,3)$ 成分 $\rightarrow(3,1)$ 成分に,  $(2,4)$ 成分 $\rightarrow(4,2)$ 成分など. よって, 対角成分は転置しても変化しない(例:  $(2,2)$ 成分 $\rightarrow(2,2)$ 成分)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow A \text{を転置する} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

# 行列とベクトルの計算1

## ▶ 行列の加法(減法)

- ▶ 足し算は、**サイズ**の**同じ**行列どうしで、**対応する成分**について計算する
- ▶ 引き算も同様

### ▶ 例) (2,3)行列どうしの足し算

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 3+4 & -2+0 \\ 2+(-1) & -4+(-2) & 7+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & -2 \\ 1 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$

### ▶ サイズの異なる足し算(引き算)は**できない**

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \times \text{(計算不能)}$$

### ▶ 例) 2次元ベクトルどうしの引き算

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3) - 2 \\ 1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

# 行列とベクトルの計算2

## ➤ 行列の乗法

- 掛けられる行列の列数と掛ける行列の行数が同じ場合のみ、掛け算できる
- $(m,n)$ 行列  $\times$   $(n,p)$ 行列  $=$   $(m,p)$ 行列となる
- 行列の除算(割り算)はない
- 掛け算の記号「 $\times$ 」は省略することが多い

$n$ が一致していると掛け算可能で  
結果の行列サイズは  $m \times p$ となる

- 例)  $(1,3)$ 行列  $\times$   $(3,2)$ 行列の掛け算

$$(3 \quad 2 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = (3 \times 1 + 2 \times 4 + 1 \times (-2) \quad 3 \times 2 + 2 \times (-3) + 1 \times 5) \\ = (9 \quad 5)$$

$n=3$ が一致しているので掛け算可能で  
結果の行列サイズは  $1 \times 2$ となる

- 掛けられる行列の列数と掛ける行列の行数が異なると、掛け算できない

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

**$\times$  掛け算不可能**

$(2,3)$ 行列と $(2,3)$ 行列で  
 $3 \neq 2$ なので掛け算不可能

# 行列とベクトルの計算3

## ▶ 行列のスカラー倍

- ▶ 行列(やベクトル)にスカラーを掛け算可能(行列のスカラー倍とよぶ)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

行列にスカラー(普通の数値)を掛ける演算は、  
行列の全要素それぞれにスカラーを掛けること

- ▶ 例) 行列Aを3倍する

$$3A = 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 2 \\ 3 \times 4 & 3 \times (-3) \\ 3 \times (-2) & 3 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & -9 \\ -6 & 15 \end{pmatrix}$$

ベクトルにスカラーを掛ける場合も同様

- ▶ 例) ベクトルxを-2倍する

$$-2x = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \times 3 \\ -2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

# 行列演算の性質

## ➤ 加法(減法)の性質

➤ 同一サイズの行列 $A, B, C$ とスカラー $p, q$ に対し, 次が成り立つ

✓  $1A=A,$                        $0A=O,$                        $A - A=O$

✓  $(pq)A = p(qA)$

✓  $(A+B) + C = A + (B+C)$                       結合則

✓  $A+B = B+A$     交換則

✓  $(p+q)A = pA + qA$                                       分配則

✓  $p(A+B) = pA + pB$                                       分配則

## ➤ 乗法の性質

➤ 積が計算できる行列 $A, B, C$ とスカラー $p$ に対し, 次が成り立つ

✓  $(AB)C = A(BC)$     結合則

✓  $p(AB) = (pA)B = A(pB)$                                       スカラー倍

✓  $A(B+C) = AB + AC$     分配則(右)

✓  $(A+B)C = AC + BC$     分配則(左)

➤ 積が計算できる行列 $A, B$ に対し, 交換則が成り立つとは限らない

✓  $AB = BA$  の場合と,  $AB \neq BA$  の場合がある