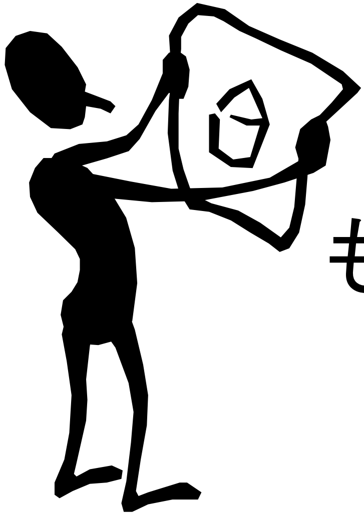
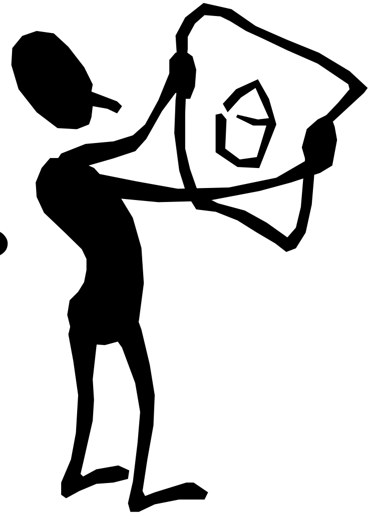
Sensitivity Analysis

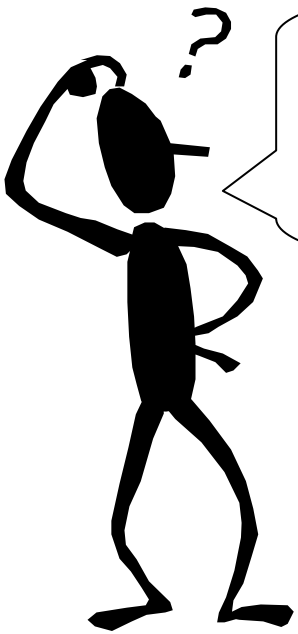


感度分析

もし○○○だったどうする？

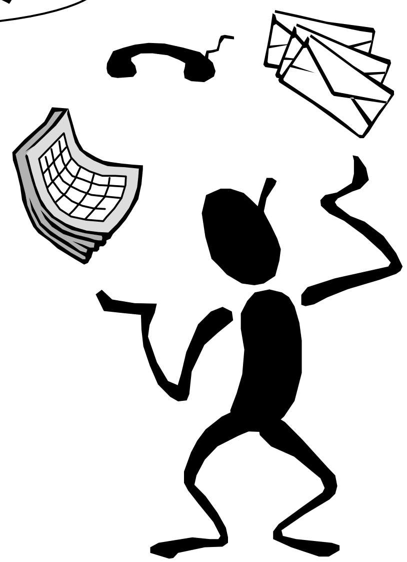


線形計画は
最適解を出すだけではない



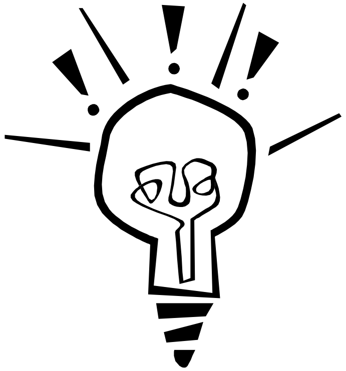
もし原料の在庫量が増えたら
生産計画はどうなる?
再計算でシミュレーションしようかな

その必要はないよ
最適解を導出した時の
データからわかるよ



感度分析

Sensitivity Analysis



感度分析
Sensitivity Analysis

- 条件･数値の変化→最適解の変化を分析
  - **What-if分析**
- 数理モデルで用いられる数値
  - 変化しやすい場合あり
  - 不正確な場合あり
    ⇒解が受ける影響を知ることが重要

例題1 生産計画

- 2つの液体製品P,Qは機械A,Bを用いて加工される
- 利益が最大になる1週間の製品P,Qの加工量は？

	液体P 1ml	液体Q 1ml	使用可能時間
機械A	3(h)	1(h)	45(h/週)
機械B	1(h)	2(h)	40(h/週)
利益	6(万円)	5(万円)	

⇨ シンプレックス法で最適解と最適値を求めてみよう.

シンプレックス法で解く

x_1：液体Pの生産量
x_2：液体Qの生産量

定式化

$$
\begin{aligned}
\max.\ & z=6x_1+5x_2 \\
\text{s.t.}\ & 3x_1+\ \ x_2 \leqq 45 \\
& x_1+2x_2 \leqq 40 \\
& x_1,\ x_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

標準形に変形

$$
\begin{aligned}
\max.\ & z \\
\text{s.t.}\ & 3x_1+\ \ x_2+s_1 \qquad =45 \\
& x_1+2x_2 \qquad +s_2=40 \\
& z-6x_1-5x_2 \qquad = 0 \\
& x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

シンプレックス表
(初期)

基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項	増加限界
s_1	0	3	1	1	0	45	
s_2	0	1	2	0	1	40	
z	1	-6	-5	0	0	0	

練習：最適解を求めてみよう.

例題1 解答例

	基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項	増加限界
①	s_1	0	3	1	1	0	45	15
②	s_2	0	1	2	0	1	40	40
③	z	1	-6	-5	0	0	0	

①	x_1	0	1	1/3	1/3	0	15	45
②	s_2	0	0	5/3	-1/3	1	25	10
③	z	1	0	-3	2	0	90	

①	x_1	0	1	0	2/5	-1/5	10	
②	x_2	0	0	1	-1/5	3/5	15	
③	z	1	0	0	7/5	9/5	135	

掃き出し操作の記録

①×1/3
②−①×1/3
③−①×(-2)

①−②×1/5
②×3/5
③−②×(-9/5)

最適

最適解(x_1,x_2)=(10,15), 最適値 135

例題1 定数項の変化

お知らせ

臨時に労働条件の変更有
機械の稼働時間を
のべ10(時間/週) 延長可能

利益最大にしたい
増えた10時間の
有効活用案は?

現在	使用可能時間
機械A	45(h/週)
機械B	40(h/週)

解決案のポイント

- 機械Aの使用可能時間増加に対する利益の増加量
- 機械Bの使用可能時間増加に対する利益の増加量

比較

算出方法は?

限界価値

シンプレックス表(最終)

s_1：機械Aの未稼働時間
s_2：機械Bの未稼働時間

基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項
x_1	0	1	0	3/5	1/5	10
x_2	0	0	1	-1/5	3/5	15
z	1	0	0	7/5	9/5	135

$$z = 0x_1 + 0x_2 - \frac{7}{5}s_1 - \frac{9}{5}s_2 + 135$$

機械A(B)未稼働時間を1時間増加→利益が7/5(9/5)万円減少

機械A(B)未稼働時間を1時間減少→利益が7/5(9/5)万円増加

||

機械A(B)の使用可能時間を1時間増加

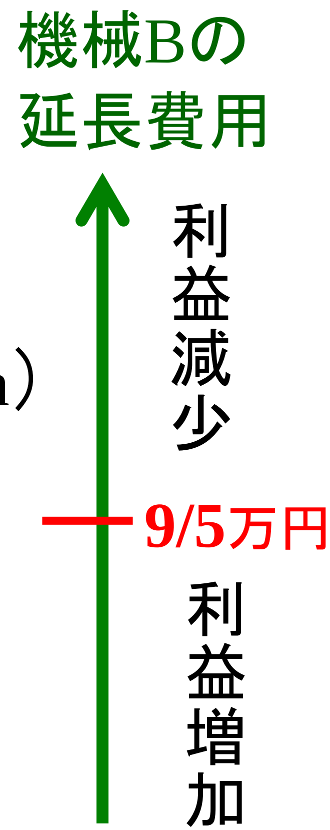
限界価値(影の価格)

marginal price (shadow price)

限界価値の解釈

- (機械Aの稼働時間増加の利益率: 7/5万円/h)
  ≦(機械Bの稼働時間増加の利益率: 9/5万円/h）
- （機械Bの延長費用）< 9/5万円/h ⇒時間延長
  （機械Bの延長費用）> 9/5万円/h ⇒現状維持

限界費用



機械Bの使用時間を無制限に増やしても利益を生むか？
→増加限界

増加限界

仮定

機械Aの使用可能時間を変えずに,
機械Bの使用可能時間を Δ 増やした

デルタ

微量変化を示す記号

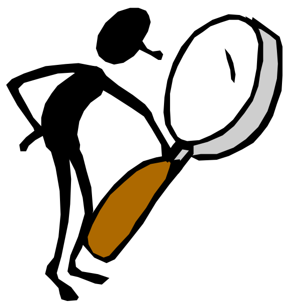
知りたいこと

最適値はどう変化する?
その変化が有効な範囲は?

限界価値

増加限界

最適解周辺での変化を観察



max. z

s.t. $3x_1 + x_2 + s_1 = 45$

$x_1 + 2x_2 + s_2 = 40 + \Delta$

$z - 6x_1 - 5x_2 = 0$

$x_1, x_2, s_1, s_2 \geqq 0$

最適解発見経路の追跡

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項
① s_1	0	3	1	1	0	45
② s_2	0	1	2	0	1	40＋Δ
③ z	1	-6	-5	0	0	0
① x_1	0	1	1/3	1/3	0	15
② s_2	0	0	5/3	-1/3	1	25＋Δ
③ z	1	0	-3	2	0	90
x_1	0	1	0	2/5	-1/5	10-1/5Δ
x_2	0	0	1	-1/5	3/5	15+3/5Δ
z	1	0	0	7/5	9/5	135+9/5Δ

最適解発見時の記録を利用

掃き出し操作記録

①×1/3
②－①×1/3
③－①×(-2)

①－②×1/5
②×3/5
③－②×(-9/5)

最適解を得て停止

最適解(x_1,x_2)=(10-1/5Δ,15+3/5Δ), 最適値 135+9/5Δ

増加限界の導出

最適解が
実行可能である
ための条件

シンプレックス表(最終)

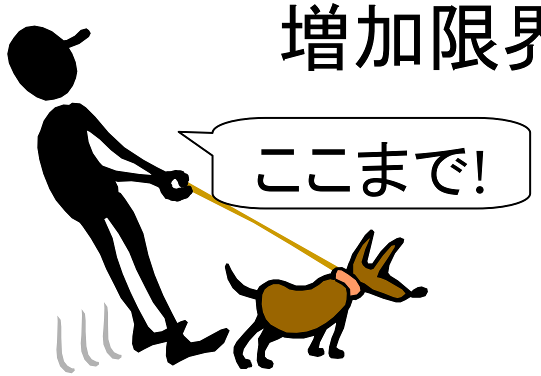
	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項	
x_1	0	1	0	2/5	-1/5	10-1/5Δ	≧0
x_2	0	0	1	-1/5	3/5	15+3/5Δ	≧0
z	1	0	0	7/5	9/5	135+9/5Δ	

$$\begin{cases} 10-1/5\Delta \geqq 0 \\ 15+3/5\Delta \geqq 0 \end{cases}$$

$$-25 \leqq \Delta \leqq 50$$

最適解(x_1, x_2)=(10-1/5Δ,15+3/5Δ)
最適値 135+9/5Δ

増加限界は(40+50=)90時間



機械B:利益率9/5万円/hの有効範囲
使用制限時間が15h～40h～90hの時

増加限界（別な導出法）

機械Aの未使用時間(s_1=0)を変えずに,

機械Bの未使用時間(s_2)の変化可能範囲を見つける

x_1	0	1	0	2/5	-1/5	10
x_2	0	0	1	-1/5	3/5	15
z	1	0	0	7/5	9/5	135

$$0z + 1x_1 + 0x_2 + \frac{2}{5}s_1 - \frac{1}{5}s_2 = 10$$

$$x_1 = \frac{1}{5}s_2 + 10 \geq 0$$

$$s_2 \geq -50$$

$$0z + 0x_1 + 1x_2 - \frac{1}{5}s_1 + \frac{3}{5}s_2 = 15$$

$$x_2 = -\frac{3}{5}s_2 + 15 \geq 0$$

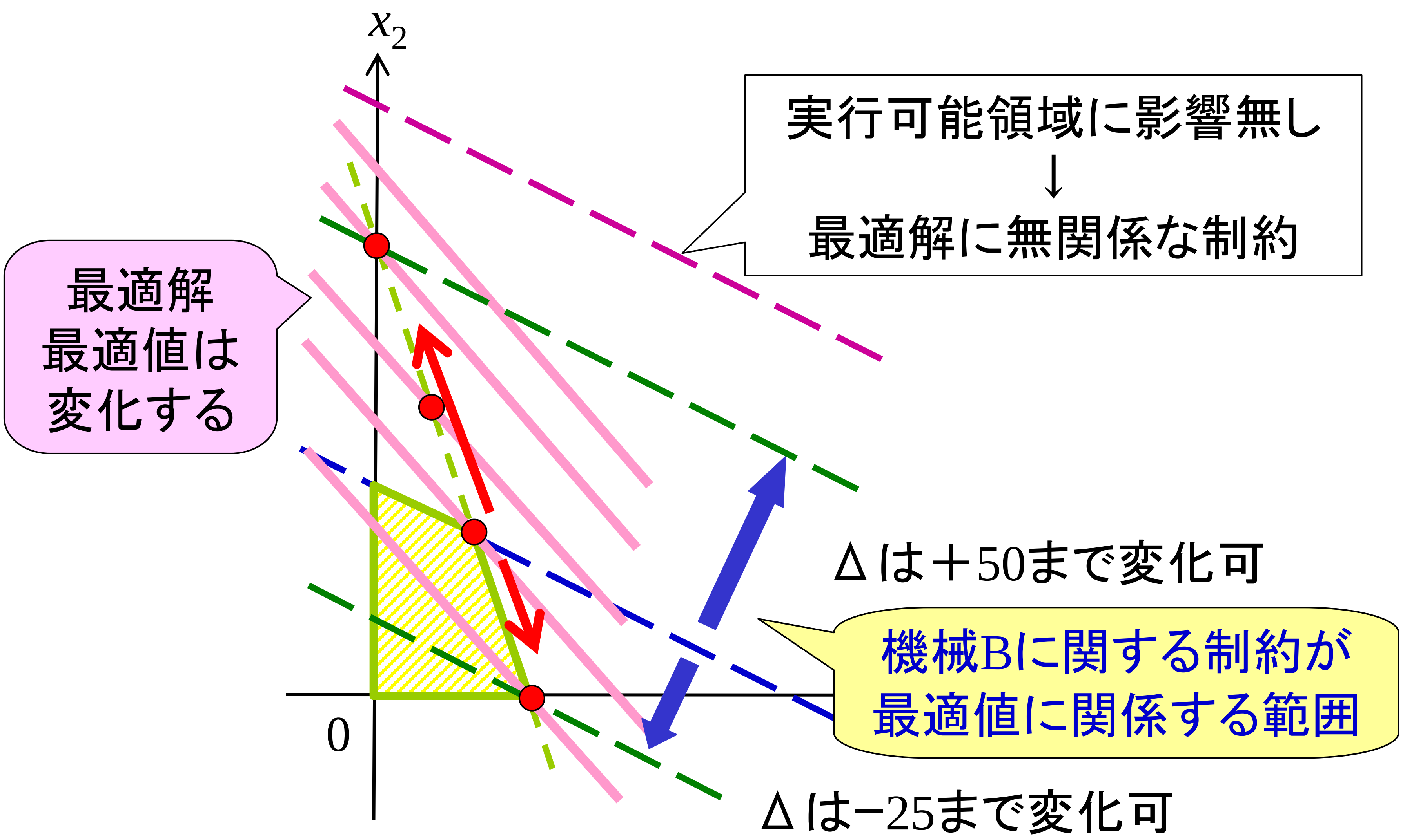
$$s_2 \leq 25$$

$$-50 \leq s_2 \leq 25$$

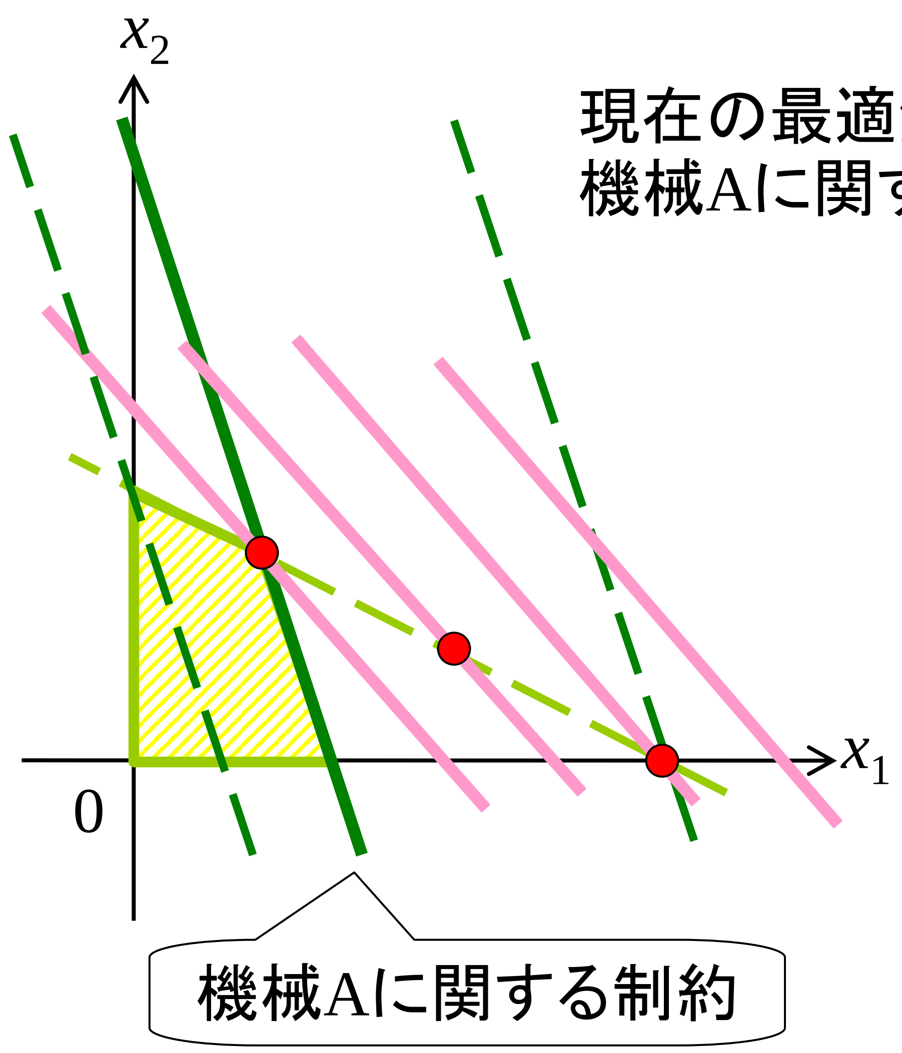
s_2は非負制約を50まで破れる

増加限界は50

増加限界の図的解釈


x_2
実行可能領域に影響無し
↓
最適解に無関係な制約
最適解
最適値は
変化する
Δは＋50まで変化可
機械Bに関する制約が
最適値に関係する範囲
0
Δは−25まで変化可

練習　機械Aについて



現在の最適解に対して，
機械Aに関する増加限界を求めよう

練習 機械Aの増加限界

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項
① s_1	0	3	1	1	0	45+Δ
② s_2	0	1	2	0	1	40
③ z	1	-6	-5	0	0	0

① x_1	0	1	1/3	1/3	0	15+1/3Δ
② s_2	0	0	5/3	-1/3	1	25-1/3Δ
③ z	1	0	-3	2	0	90+2Δ

x_1	0	1	0	2/5	-1/5	10+2/5Δ
x_2	0	0	1	-1/5	3/5	15-1/5Δ
z	1	0	0	7/5	9/5	135+7/5Δ

最適解発見時の記録を利用

掃き出し操作記録

①×1/3
②−①×1/3
③−①×(-2)

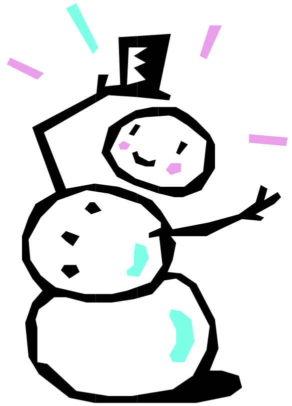
①−②×1/5
②×3/5
③−②×(-9/5)

最適解を得て停止

10+2/5Δ≧0
15-1/5Δ≧0

-25≦Δ≦75

機械Bの増加限界 75h



演習1

文教工業では原料A,B,Cから
2種類の液体製品P,Qを作っている.

	製品P 1000ml	製品Q 1000ml	使用限度
原料A	1kg	7kg	140kg
原料B	2kg	4kg	100kg
原料C	3kg	2kg	120kg
利益	3万円	2万円	

問題：情報を読み取りなさい

① 利益を最大にする1週間当たりの生産計画を求めよ.

② 原料A,B,Cの限界価値を求めよ. また, その数値の意味を具体的に説明せよ.

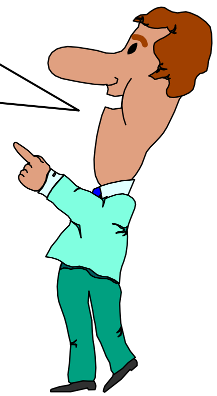
③ 上記①で求めた生産計画を行ったとき, 原料A,B,Cの増加限界を求めよ.

応用 新製品Rは投入すべきか?

新らしい液体製品Rの概要

- 製品Rを1(ml)生産に
  機械Aは3(h)，機械Bは2(h)必要
- 製品Rの1(ml)当たりの予想利益は8（万円）.
- 機械A,Bの使用可能時間は変化なし（各45h,40h）

例題1の設定で
新たに製品Rの生産を開始すべきか？



判断の基準

現在時点で新製品Rを1(ml)作る

機械A,Bを使用＝製品P,Q減産＝利益減

比較

新製品Rが生み出す利益

製品R製造の影響評価

新たに製品Rを製造
⇒最適量で製造している製品P,Q減産
⇒製品P,Qから得ていた利益は減少

製品Rを1(ml)製造

機械A 3(h), 機械B 2(h) 使用

機械A 現在の限界価値:7/5 万円/h
機械B 現在の限界価値:9/5 万円/h

製品Rを1(ml)製造に対する
製品P,Qから得ていた利益の減少額:3×7/5+2×9/5=39/5万円

製品R 1(ml)の予想利益 8万円

利益が出るね!

演習2 製品Cは製造すべきか?

現在の状況（演習1と同一）

	製品P 1000ml	製品Q 1000ml	使用限度
原料A	1kg	7kg	140kg
原料B	2kg	4kg	100kg
原料C	3kg	2kg	120kg
利益	3万円	2万円	

開発製品C1000(ml)あたりの情報

- 生産に必要な原料A,B,Cは各々3，2，4（kg）
- 予想利益は1万円

例題2 利益の変化

	液体P 1ml	液体Q 1ml	使用可能時間
機械A	3(h)	1(h)	45(h/週)
機械B	1(h)	2(h)	40(h/週)
利益	6(万円)	5(万円)	

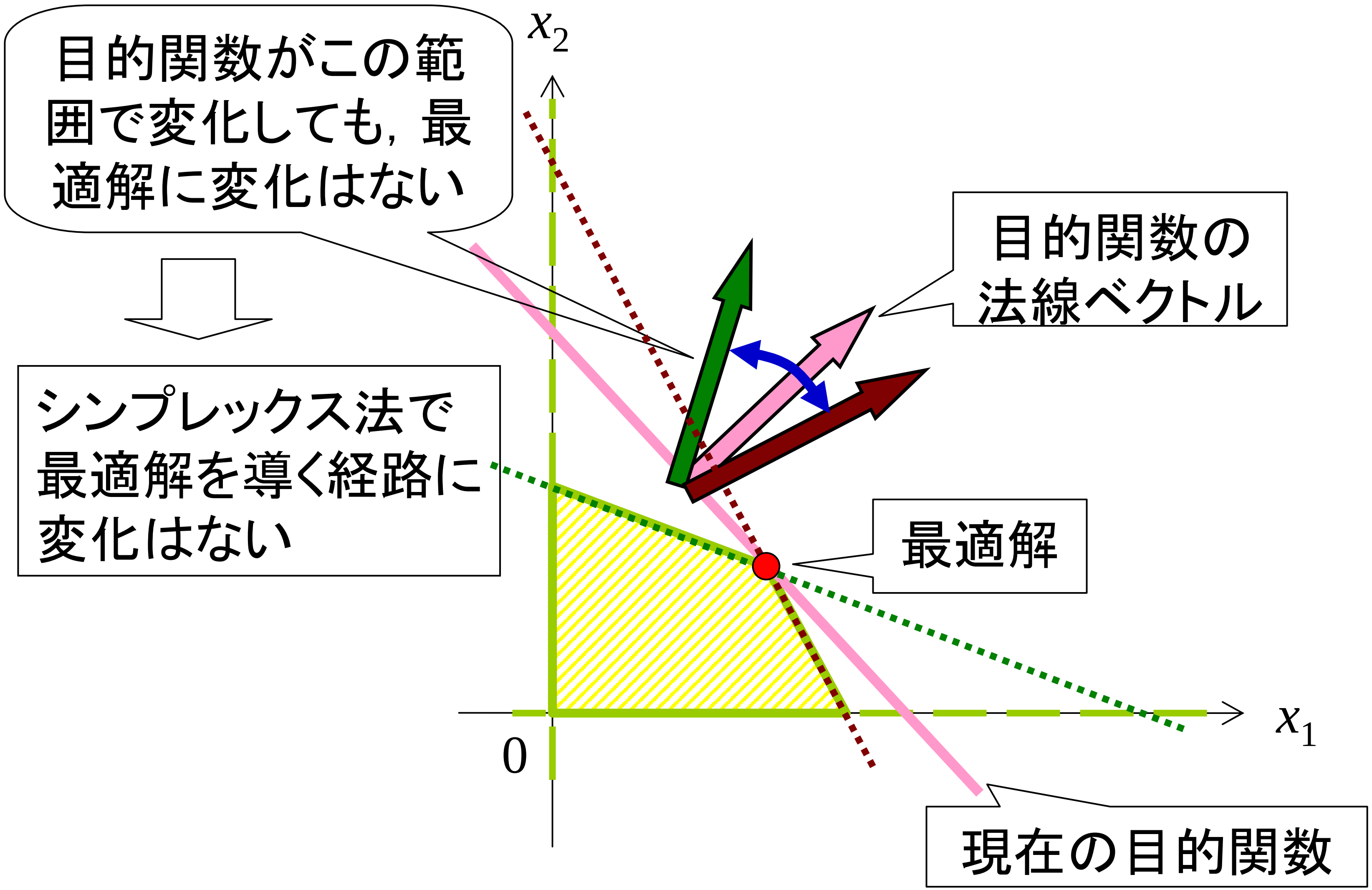
最適生産計画
液体P : 10 ml
液体Q : 15 ml

お知らせ

液体Qの利益が8万円/klに変化

生産計画は変更必要?

目的関数の係数の変化


目的関数がこの範囲で変化しても，最適解に変化はない
シンプレックス法で最適解を導く経路に変化はない
x_2
目的関数の法線ベクトル
最適解
0
x_1
現在の目的関数

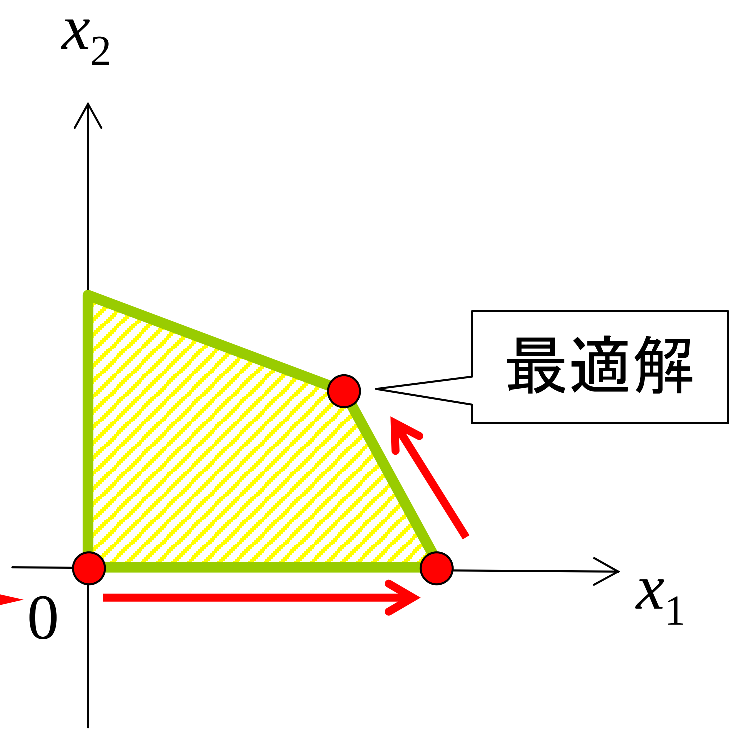
もし利益がΔだけ変化したら…

製品Pの利益：6万円/ml（変化無し）
製品Qの利益：（5+Δ）万円/ml

$$
\begin{aligned}
\text{max. } & z=6x_1+(5+\Delta)x_2 \\
\text{s.t. } & 3x_1+\ x_2 \leqq 45 \\
& x_1+2x_2 \leqq 40 \\
& x_1,\ x_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

最適解が変化しないとしたら・・・

同じ経路で最適解に
辿りつくはず



最適解発見経路の追跡

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項
s_1	0	3	1	1	0	45
s_2	0	1	2	0	1	40
z	1	-6	-5-Δ	0	0	0
x_1	0	1	1/3	1/3	0	15
s_2	0	0	5/3	-1/3	1	25
z	1	0	-3-Δ	2	0	90
x_1	0	1	0	2/5	-1/5	10
x_2	0	0	1	-1/5	3/5	15
z	1	0	0	7/5-Δ/5	9/5+3Δ/5	135+15Δ

最適解発見時の記録を利用

掃き出し操作記録

①×1/3
②−①×1/3
③−①×(-2)

①−②×1/5
②×3/5
③-②×(-9/5-3/5Δ)

最適解を得て停止

最適解(x_1,x_2)=(10,15), 最適値 135+15Δ

最適解が変化しないΔの範囲

x_1	0	1	0	2/5	-1/5	10
x_2	0	0	1	-1/5	3/5	15
z	1	0	0	7/5-Δ/5	9/5+3Δ/5	135+15Δ

$$\frac{7}{5}-\frac{\Delta}{5}\geq 0$$

$$\Delta \leq 7$$

$$\frac{9}{5}+\frac{3\Delta}{5}\geq 0$$

$$\Delta \leq -3$$

現在の基底解が最適
⇔z行の要素がすべて非負

よって，-3≦Δ≦7 の範囲の時，最適解は変わらない

⇒ 製品Qの利益が2万円/ml～12万円/mlの間で変化しても最適解は変化しない

練習 製品Pの利益率の変化

	液体P	液体Q	使用可能時間
機械A	3(h/ml)	1(h/ml)	45(h/週)
機械B	1(h/ml)	2(h/ml)	40(h/週)
利益	6(万円/ml)	5(万円/ml)	

最適生産計画
液体P : 10 ml
液体Q : 15 ml

現在の最適解が維持される
液体Pの利益の変化の範囲を求めよ

演習3 製品Q利益情報の頑健性

現在の状況（演習1と同一）

	製品P 1000ml	製品Q 1000ml	使用限度
原料A	1kg	7kg	140kg
原料B	2kg	4kg	100kg
原料C	3kg	2kg	120kg
利益	3万円	2万円	

製品Qの利益は推定値

- 製品Qに関する利益情報の曖昧さは最適な生産計画にどのような影響を与えるか?

演習3 解答例
観察:目的関数を示すz行の変化

Z行の変化

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	s3	定数項
s1	0	1	7	1	0	0	140
s2	0	2	4	0	1	0	100
s3	0	3	2	0	0	1	120
z	1	−3	−2	0	0	0	0

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	s3	定数項
s1	0	0	19/3	1	0	−1/3	100
s2	0	0	8/3	0	1	−2/3	20
x1	0	1	2/3	0	0	1/3	40
z	1	0	0	0	0	1	120

ピボット列のz行の値

ピボット行

$$(\text{z行}) - \frac{-3}{3} \times (\text{3行})$$

ピボットの値

演習3 解答例
もし利益がΔだけ変化したら…

製品Pの利益:3万円/kg(変化無し)
製品Qの利益:(2+Δ)万円/kg に変化した

変化後の最適解が変化前と同じなら，同じ経路で最適解に辿りつくはず

Z行の変化

$$(z行) - \frac{-3}{3} \times (3行)$$

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	s3	定数項
s1	0	1	7	1	0	0	140
s2	0	2	4	0	1	0	100
s3	0	3	2	0	0	1	120
z	1	−3	−2−Δ	0	0	0	0

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	s3	定数項
s1	0	0	19/3	1	0	−1/3	100
s2	0	0	8/3	0	1	−2/3	20
x1	0	1	2/3	0	0	1/3	40
z	1	0	−Δ	0	0	1	120

演習3 解答例
最適解が変化しないΔの範囲

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	s3	定数項
s1	0	0	19/3	1	0	−1/3	100
s2	0	0	8/3	0	1	−2/3	20
x1	0	1	2/3	0	0	1/3	40
z	1	0	−Δ	0	0	1	120

現在の基底解が最適
⇔z行の要素がすべて非負

$$-\Delta \geq 0$$

$$\Delta \leq 0$$

よって，Δ≦0の範囲の時，
最適解は変わらない

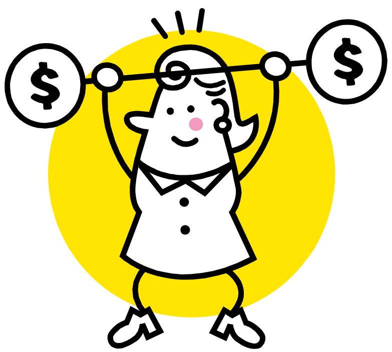
製品Q1000mlの実際の利益が2万円以下の時は影響なし

2万円という推定値は解を変動させやすく注意が必要

製品Q1000mlの実際の利益が2万円を超すと最適解の変更要

まとめ

- シンプレックス法を利用し，
  最適解の周辺情報を得ることができる
  感度分析
- 感度分析で得た値から，
  問題解決の糸口を得ることができる



寄り道 辿った経路の記憶法

基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項	増加限界			
① s_1	0	3	1	1	0	45	15	1	0	0
② s_2	0	1	2	0	1	40	40	0	1	0
③ z	1	-6	-5	0	0	0		0	0	1

①×1/3
②−①×1/3
③−①×(-2)

この情報で記憶可

① x_1	0	1	1/3	1/3	0	15	45	1/3	0	0
② s_2	0	0	5/3	-1/3	1	25	10	-1/3	1	0
③ z	1	0	-3	2	0	90		2	0	1

寄り道 辿った経路の記憶法(2)

	基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項	増加限界			
①	x_1	0	1	1/3	1/3	0	15	45	1/3	0	0
②	s_2	0	0	5/3	-1/3	1	25	10	-1/3	1	0
③	z	1	0	-3	2	0	90		2	0	1

①－②×1/5
②×3/5
③－②×(-9/5)

掃き出しを記録

x_1	0	1	0	2/5	-1/5	10		2/5	-1/5	0
x_2	0	0	1	-1/5	3/5	15		-1/5	3/5	0
z	1	0	0	7/5	9/5	135		7/5	9/5	1

寄り道 記憶の利用(1)

掃き出しの記録

2/5	-1/5	0
-1/5	3/5	0
7/5	9/5	1

×

初期のシンプレックス表

z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項
0	3	1	1	0	45
0	1	2	0	1	40
1	-6	-5	0	0	0

＝

0	1	0	2/5	-1/5	10
0	0	1	-1/5	3/5	15
1	0	0	7/5	9/5	135

最後のシンプレックス表

寄り道 記憶の利用(2)

掃き出しの記録

2/5	-1/5	0
-1/5	3/5	0
7/5	9/5	1

×

初期のシンプレックス表

z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項
0	3	1	1	0	45+Δ
0	1	2	0	1	40
1	-6	-5	0	0	0

＝

0	1	0	2/5	-1/5	10+2/5Δ
0	0	1	-1/5	3/5	15-1/5Δ
1	0	0	7/5	9/5	135+7/5Δ

最後のシンプレックス表

寄り道 記憶の利用(3)

掃き出しの記録

2/5	-1/5	0
-1/5	3/5	0
7/5	9/5	1

×

初期のシンプレックス表

z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項
0	3	1	1	0	45
0	1	2	0	1	40
1	-6	-5-Δ	0	0	0

＝

0	1	0	2/5	-1/5	10
0	0	1	-1/5	3/5	15
1	0	-Δ	7/5	9/5	135

最後のシンプレックス表

寄り道 基底行列と逆行列

掃き出しの記録

B^{-1}	0
★	★

基底行列の逆行列

×

初期のシンプレックス表

基底変数	非基底変数	定数項
B	N	b
c_B	c_N	0

=

E	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
c_B	c_N	0

E	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
0	$c_N-c_BB^{-1}N$	$-c_BB^{-1}b$