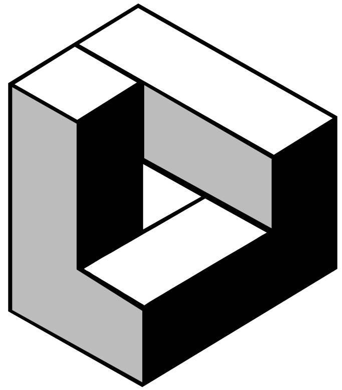


Linear Programming II

Simplex method

効率よく実行可能領域の端点を辿る方法

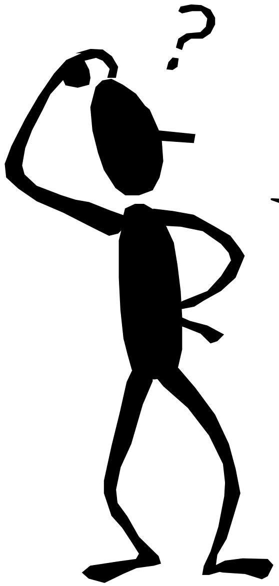
総当たり法の欠点の克服

総当たり法の欠点

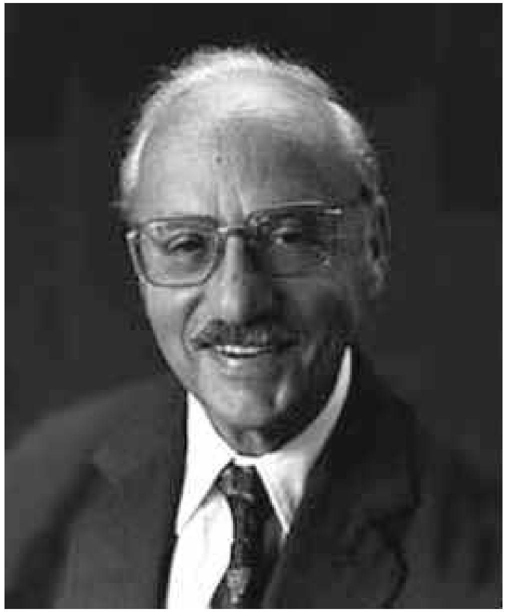
- 端点の候補をすべて走査
- 実行可能でない交点は破棄

1回の走査の手間＝
連立方程式を解く手間

結果的に無駄な計算



なんとかならない?



数理計画の巨人
George Dantzig

できます！

実行可能領域の端点だけを発見
⇒シンプレックス法
(単体法, simplex method)

Koopmans
Kantrovich
Leontief

線形計画問題に対する歴史上初の実用的解法
- 1947年 Dantzig

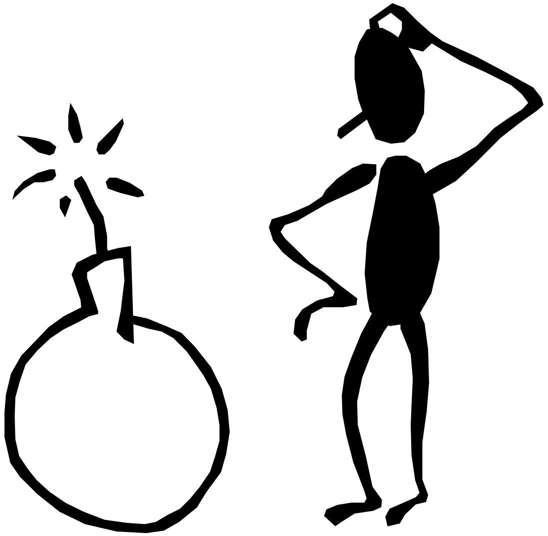
改良を重ね, 現在でも強力な解法

写真：http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Dantzig_George.htmlより

復習 基本解

標準形

$$\begin{aligned}
&\text{max. } z=20x_1+30x_2 \\
&\text{s.t.} \quad x_1+2x_2+s_1 = 800 \quad ① \\
&\qquad 3x_1+4x_2+s_2 = 1800 \quad ② \\
&\qquad 3x_1+x_2+s_3 = 1500 \quad ③ \\
&\qquad x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geqq 0
\end{aligned}$$



変数:5つ, 制約式:3本⇒独立変数:2つ

⇔2変数を0とする←残った3変数の連立方程式が解ける

非基底変数　　基底変数

⇔端点の候補が得られる

基本解

例 すべての基本解

x1	x2	s1	s2	s3	端点？	目的関数値
0	0	800	1800	1500	○	0
0	400	0	200	1100	○	12000
0	450	−100	0	1100	×	
0	1500	−2200	−4200	0	×	
500	0	300	300	0	○	10000
800	0	0	−600	−900	×	
600	0	200	0	−300	×	
200	300	0	0	600	○	13000
440	180	0	−240	0	×	
366.7	100	133.3	0	0	○	12333

最大値

値を0に指定した変数＝非基底変数

最適解(x_1,x_2)=(200,300), 最適値 13000

端点と基本解の関係

•x_1, s_1を非基底変数($\boldsymbol{x_1}$,$\boldsymbol{s_1}$=0)
(x_1, x_2)=(0, 400)

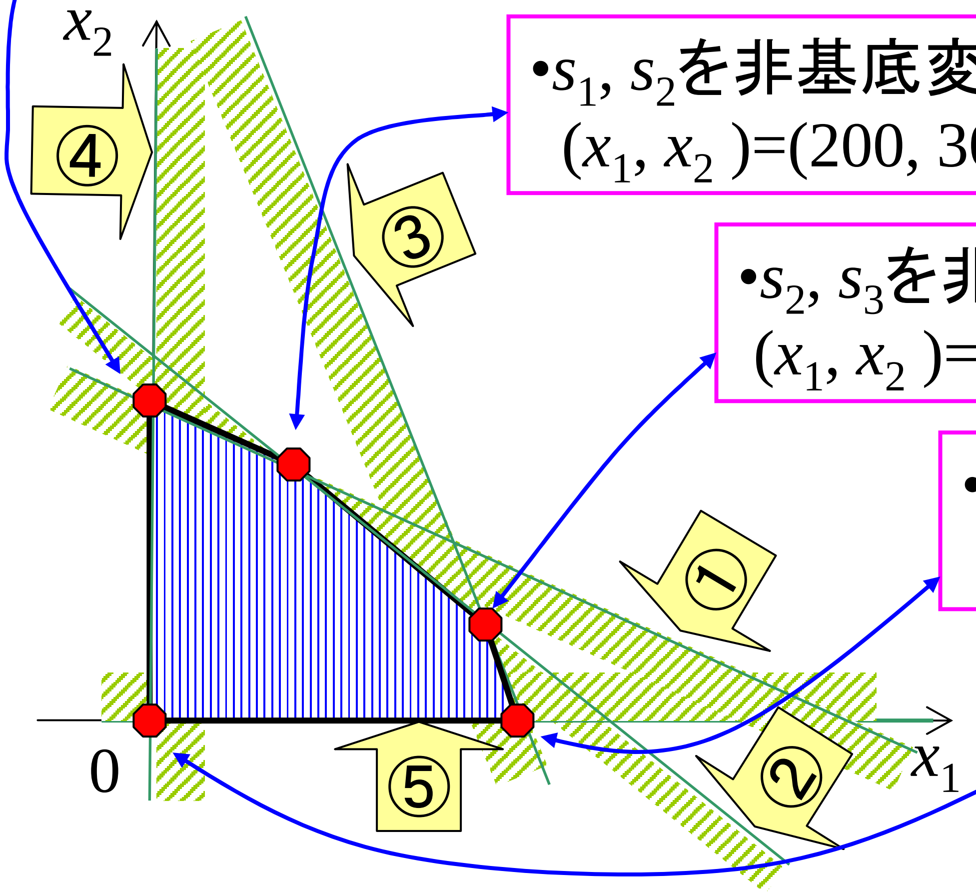
隣り合う端点の基本解にはどんな関係がある？

•s_1, s_2を非基底変数($\boldsymbol{s_1}$,$\boldsymbol{s_2}$=0)
(x_1, x_2)=(200, 300)

•s_2, s_3を非基底変数($\boldsymbol{s_2}$,$\boldsymbol{s_3}$=0)
(x_1, x_2)=(1400/3, 100)

•x_2, s_3を非基底変数($\boldsymbol{s_3}$, $\boldsymbol{x_2}$ =0)
(x_1, x_2)=(500, 0)

•x_1, x_2を非基底変数($\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_1}$ =0)
(x_1, x_2)=(0, 0)



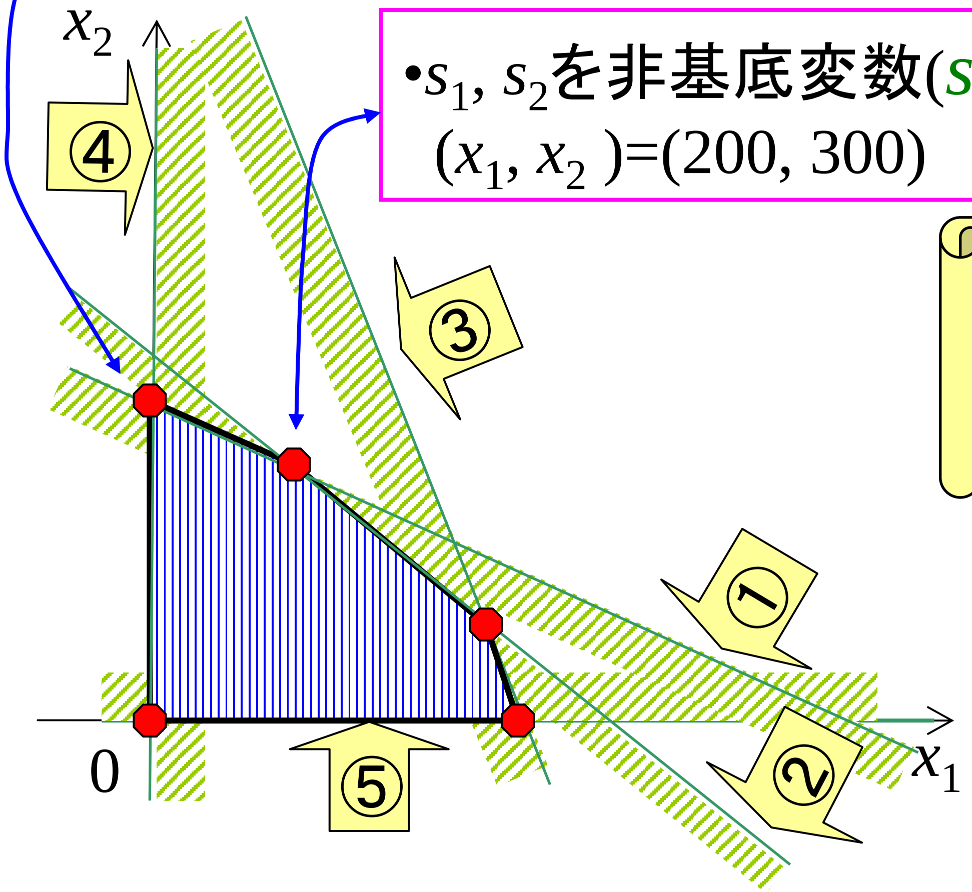
隣り合う端点・隣り合う基本解

•x_1, s_1を非基底変数(x_1,s_1=0)
(x_1, x_2)=(0, 400)

⟺ 基底変数 x_2,s_2,s_3

•s_1, s_2を非基底変数(s_1,s_2=0)
(x_1, x_2)=(200, 300)

⟺ 基底変数 x_1,x_2,s_3



隣り合う端点

⇕

基底変数が1つだけ異なる

⇓

基底変数の組を1つだけ変更

↓

隣の端点の情報が得られる

隣の端点を見つける方法

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + s_1 &= 800 \quad ① \\
3x_1 + 4x_2 + s_2 &= 1800 \quad ② \\
3x_1 + x_2 + s_3 &= 1500 \quad ③
\end{aligned}
$$

x_1, s_1を非基底変数に選んだ時の連立方程式を示す行列(括弧省略)

基底変数	x1	x2	s1	s2	s3	
x2	1	2	1	0	0	800
s2	3	4	0	1	0	1800
s3	3	1	0	0	1	1500

ガウスの消去法

基底変数	x1	x2	s1	s2	s3	
x2	1/2	1	1/2	0	0	400
s2	1	0	-2	1	0	200
s3	5/2	0	-1/2	0	1	1100

端点が1つ見つかった!!$(x_1,x_2)=(0,400)$

基底変数を一つだけ変更

基底変数	x1	x2	s1	s2	s3	
x2	1/2	1	1/2	0	0	400
x1	1	0	-2	1	0	200
s3	5/2	0	-1/2	0	1	1100

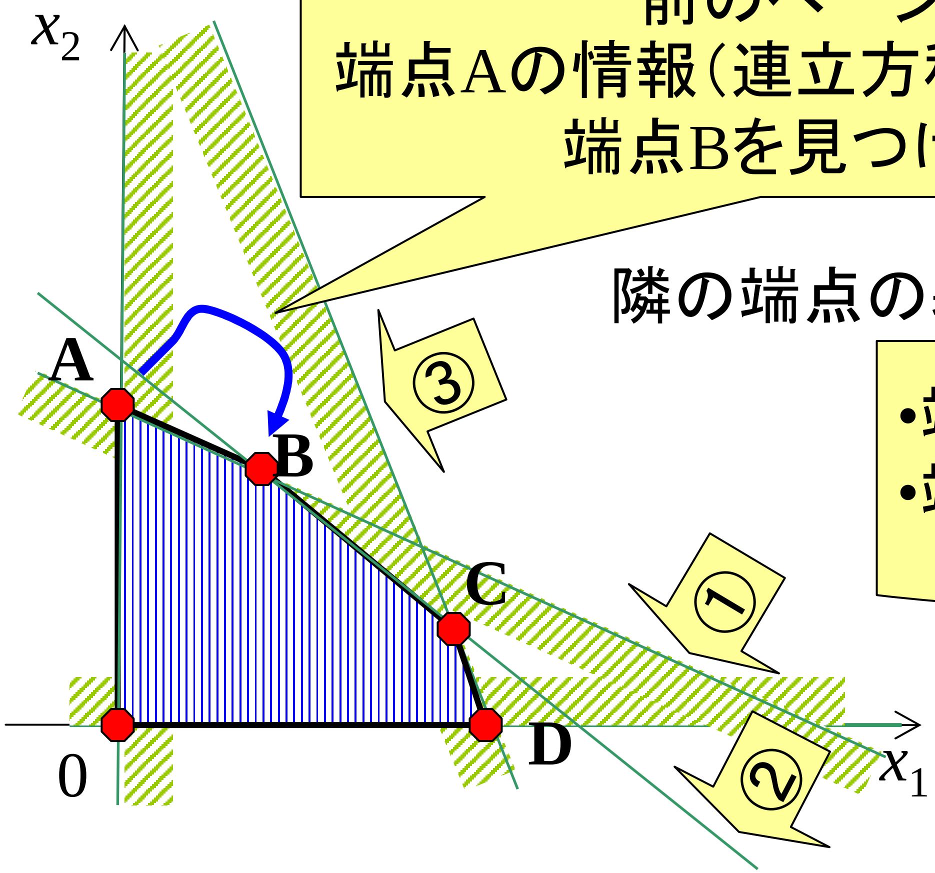
ガウスの消去法

基底変数	x1	x2	s1	s2	s3	
x2	0	1	3/2	-1/2	0	300
x1	1	0	-2	1	0	200
s3	0	0	9/2	-5/2	1	600

隣の端点を見つけた

$(x_1,x_2)=(200,300)$

演習1 隣の端点を発見する



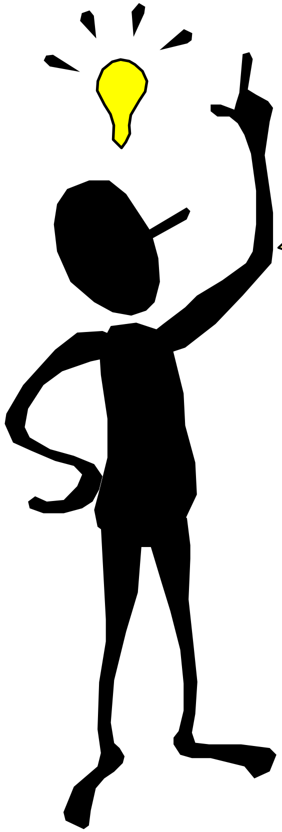
前のページでは
端点Aの情報(連立方程式の答え)から
端点Bを見つけている

隣の端点の基底変数の組合せは既知として

- 端点Bから端点Cを求めてみよう
- 端点Cから端点Dを求めてみよう

考えてみよう

２変数の線形計画問題
隣の端点は高々２つ



３変数のLP
隣の端点はいくつ?
４変数では?
５変数では?

非効率

×隣の端点をすべて列挙

たくさん存在する隣の端点から
「より良い」隣の端点だけを
探す必要がある

シンプレックス法（単体法）

simplex method

大枠

Step1: 端点を1つ見つける

原点が端点なら
すぐみつかる

Step2: 端点の最適性をチェック?→最適なら終了

目的関数値が大きい
隣の端点が存在
↓
最適ではない

Step3: 隣の端点を1つ見つける

繰り返し

基底変数の組の変更
（掃き出し操作）で可能

どうせなら
目的関数値が優れている
隣の端点を見つけよう

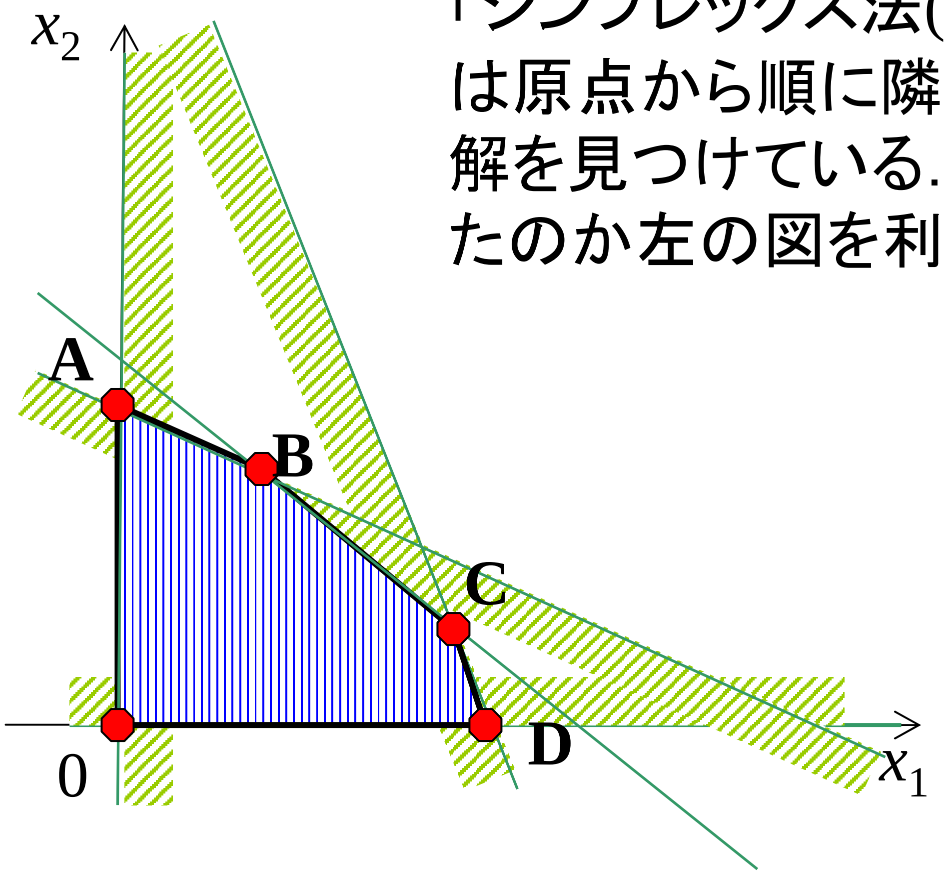
隣の端点を見つける度に
より良い解が得られる

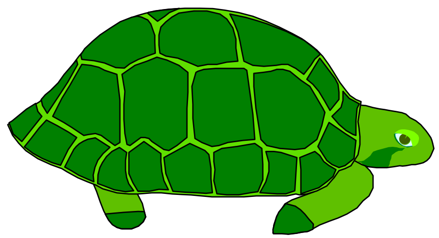
最適解

シンプレックス法の詳細は別プリントで

演習2

「シンプレックス法(単体法)」のプリントの例題では原点から順に隣の端点を見つけていき最適解を見つけている. どのような順で端点をたどったのか左の図を利用して示しなさい.





練習 生産計画

- 2つの液体製品P,Qは機械A,Bを用いて加工される
- 利益が最大になる1週間の製品P,Qの加工量は？

	液体P 1ml	液体Q 1ml	使用可能量
機械A	3(h)	1(h)	45(h/週)
機械B	1(h)	2(h)	40(h/週)
利益	6(万円)	5(万円)	

⇨ シンプレックス法で最適解と最適値を求めてみよう.

練習 解答例

x_1 : 液体Pの生産量
x_2 : 液体Qの生産量

定式化

$$\begin{aligned} \max.\ & z=6x_1+5x_2 \\ \text{s.t.}\ & 3x_1+x_2 \leqq 45 \\ & x_1+2x_2 \leqq 40 \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

標準形に変形

$$\begin{aligned} \max.\ & z \\ \text{s.t.}\ & 3x_1+x_2+s_1 = 45 \\ & x_1+2x_2+s_2 = 40 \\ & z-6x_1-5x_2 = 0 \\ & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

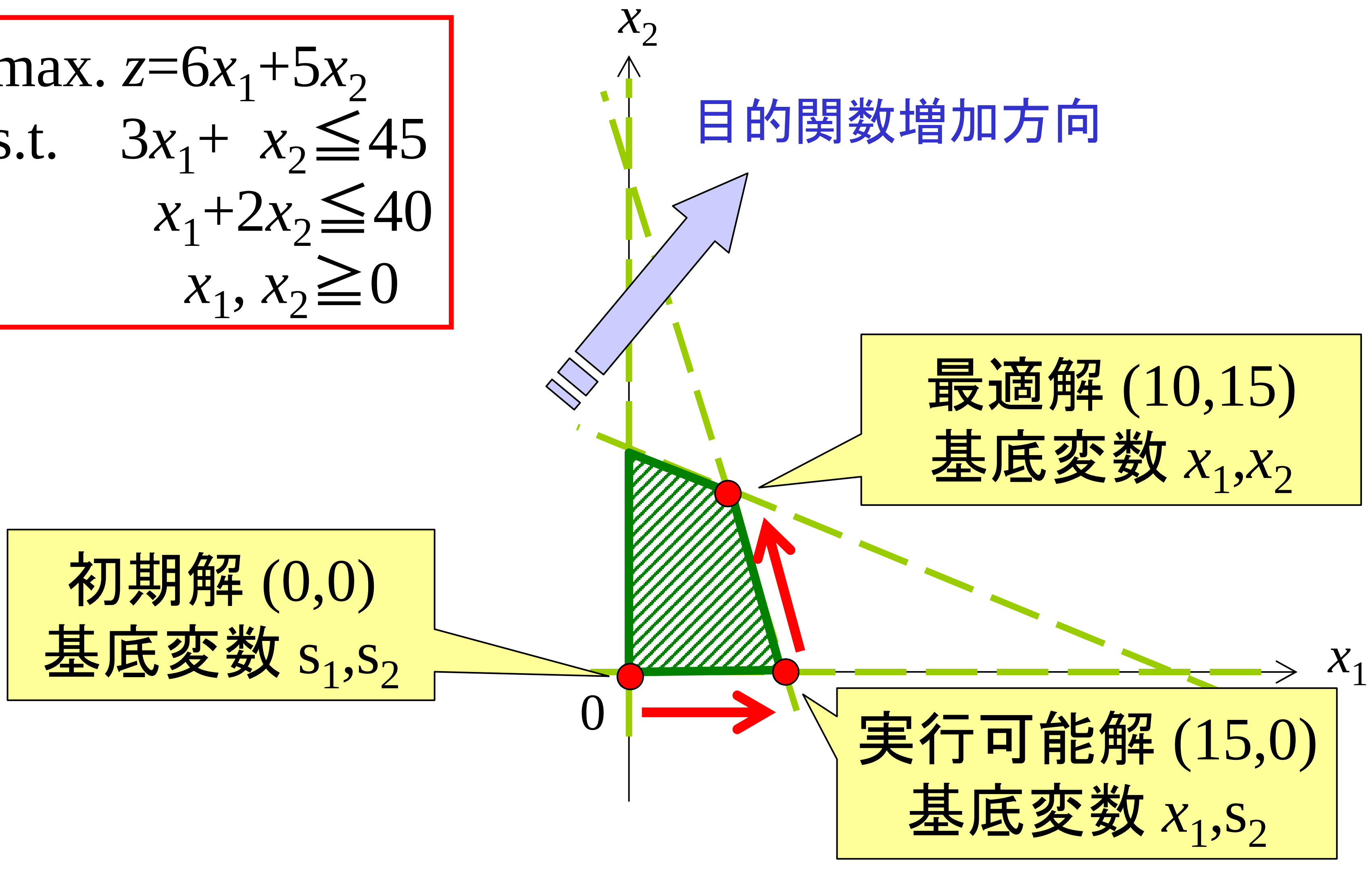
基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	定数項	増加限界
s_1	0	3	1	1	0	45	15
s_2	0	1	2	0	1	40	40
z	1	-6	-5	0	0	0	
x_1	0	1	1/3	1/3	0	15	45
s_2	0	0	5/3	-1/3	1	25	10
z	1	0	-3	2	0	90	
x_1	0	1	0	2/5	-1/5	10	
x_2	0	0	1	-1/5	3/5	15	
z	1	0	0	7/5	9/5	135	

最適

最適解 $(x_1,x_2)=(10,15)$, 最適値 135

練習解答例 シンプレックス法の動き

$$\begin{aligned}\text{max. } & z=6x_1+5x_2 \\ \text{s.t. } & 3x_1+x_2 \leqq 45 \\ & x_1+2x_2 \leqq 40 \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0\end{aligned}$$



実行中のトラブル

あれ？

シンプレックス法が
無限ループに・・・

- 増加限界が0だ
- 目的関数値が増えない
- 初期解が見つからない

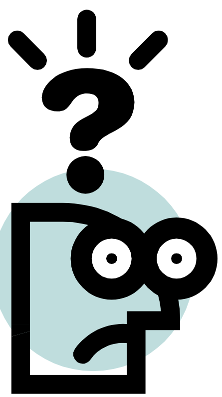
シンプレックス法を
開始できない・・・

対処法は？

退化に出会った

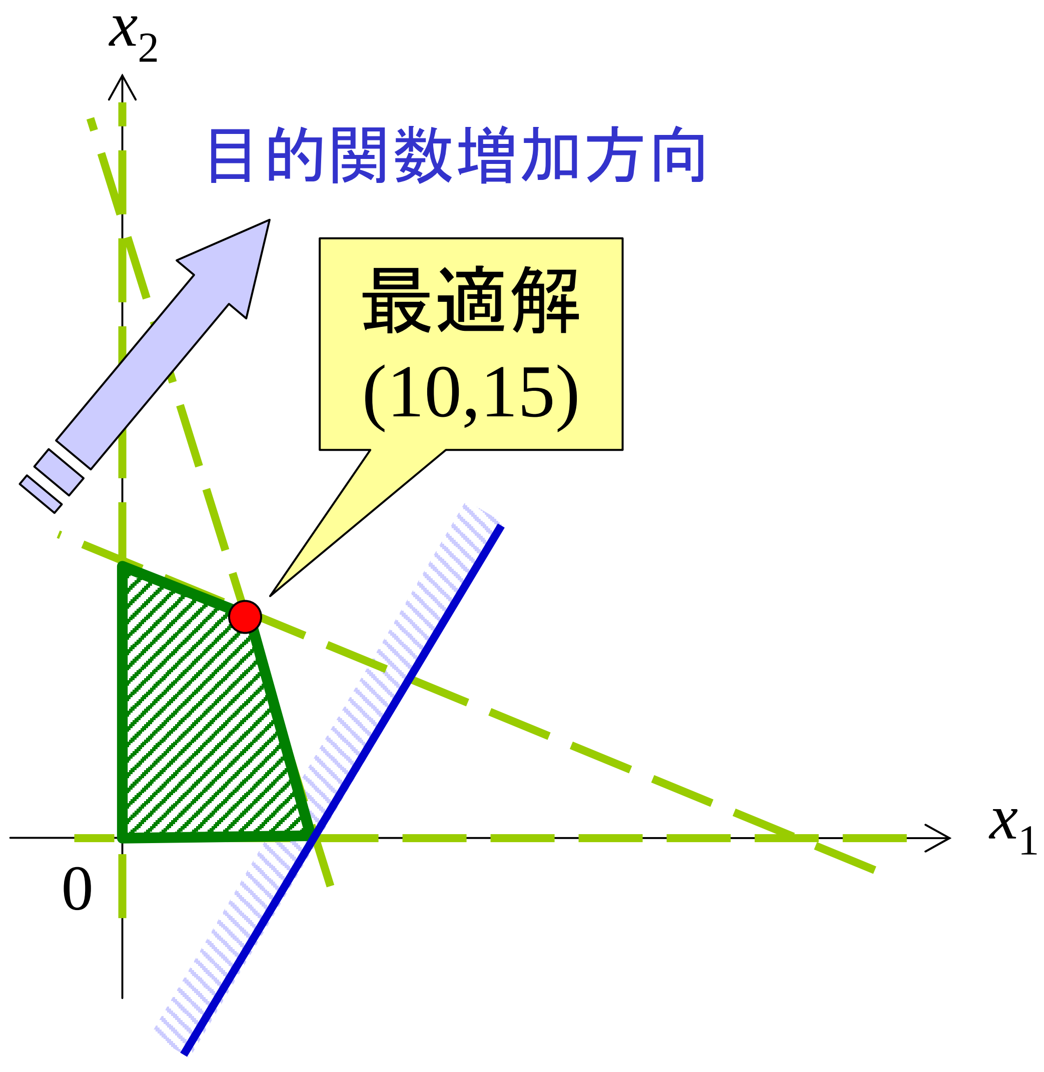
初期解を探そう

探し方は？



準備 冗長な制約式の存在

$$
\begin{aligned}
\text{max. } & z = 6x_1 + 5x_2 \\
\text{s.t. } & 3x_1 + x_2 \leqq 45 \\
& x_1 + 2x_2 \leqq 40 \\
& 3x_1 - 2x_2 \leqq 45 \\
& x_1, x_2 \geqq 0
\end{aligned}
$$



退化現象

$$\begin{aligned} \max.\ & z=6x_1+5x_2 \\ \text{s.t.}\ & 3x_1+x_2 \leqq 45 \\ & x_1+2x_2 \leqq 40 \\ & 3x_1-2x_2 \leqq 45 \\ & x_1, x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

標準形に変形

$$\begin{aligned} \max.\ & z \\ \text{s.t.}\ & 3x_1+x_2+s_1 = 45 \\ & x_1+2x_2+s_2 = 40 \\ & 3x_1-2x_2+s_3 = 45 \\ & z-6x_1-5x_2 = 0 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geqq 0 \end{aligned}$$

基底	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	定数項	増加限界
s_1	0	3	1	1	0	0	45	15
s_2	0	1	2	0	1	0	40	40
s_3	0	3	-2	0	0	1	45	15
z	1	-6	-5	0	0	0	0	
s_1	0	0	3	1	0	-1	0	0
s_2	0	0	8/3	0	1	-1/3	25	3/8
x_1	0	1	-2/3	0	0	1/3	15	-
z	1	0	-9	0	0	2	90	
x_2	0	0	1	1/3	0	-1/3	0	-
s_2	0	0	0	-8/9	1	9/5	25	125/9
x_1	0	1	0	2/9	0	9/5	15	75/9
z	1	0	0	3	0	-1	90	

変化無し

基底変数の値が0⇔退化

退化の悪戯

現実には発生可能性は低い

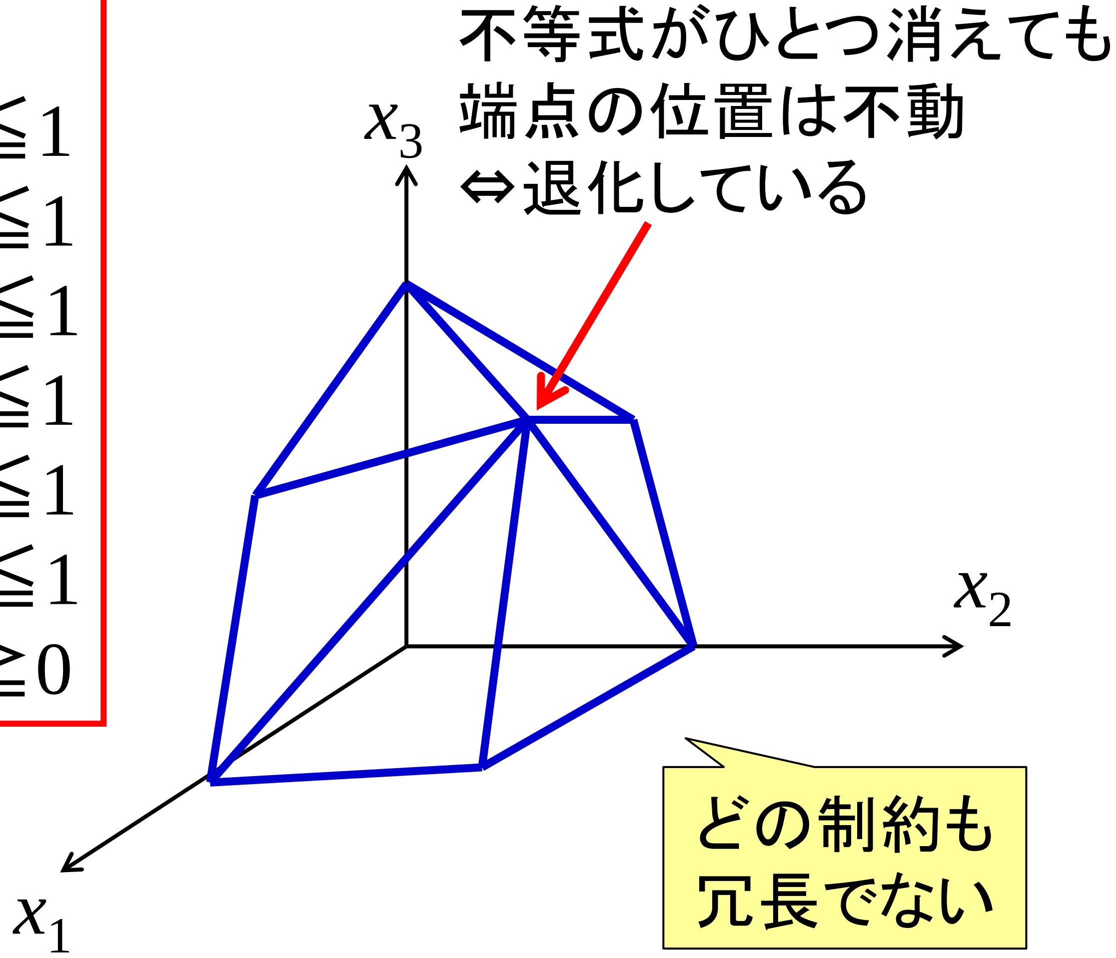
- 退化現象→巡回を起こす場合がある
  ⇒シンプレックス法が止まらない
- 巡回の回避方法
  - 最小添字規則(Blandの選択規則)
    （準備）z以外の全変数に順番をつける
    （規則）自由度のあるとき順番に沿って選択

実際に適用すると遅い

※ 退化は冗長な不等式がある場合だけに起きるわけではない

退化しているが冗長ではない例

$$\begin{array}{llllr}
\text{max.} & z=f(x_1, x_2, x_3) & & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & -x_2 & & \leqq 1 \\
 & 2x_1 & & -x_3 & \leqq 1 \\
 & -x_1 & +2x_2 & & \leqq 1 \\
 & & 2x_2 & -x_3 & \leqq 1 \\
 & -x_1 & & +2x_3 & \leqq 1 \\
 & & -x_2 & +2x_3 & \leqq 1 \\
 & & & x_1, x_2, x_3 & \geqq 0
\end{array}$$

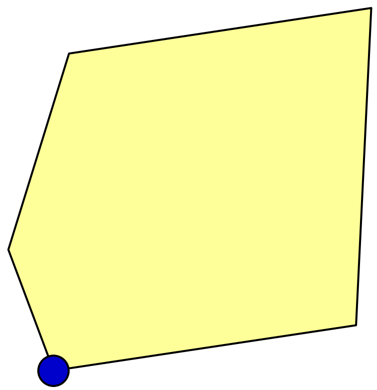


初期解の見つけ方

- 原点が端点の場合⇒原点を初期解
- 原点が端点でないときは?

見つける主な方法

•2段階シンプレックス法
•Big-M法（罰金法）



2段階シンプレックス法

初期解を見つけるアイディア

- 数理計画問題の実行可能性判定→ 
- 原点が端点の同等なLPを作ってしまう

原点が端点でない例

$$
\begin{array}{ll}
\text{max.} & z = -6x_1 + 6x_2 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\
& -5x_1 + 9x_2 = 15 \\
& -6x_1 + 3x_2 \ge 3 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

⇒

標準形

$$
\begin{array}{ll}
\text{max.} & z = -6x_1 + 6x_2 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + 3x_2 + s_1 = 6 \\
& -5x_1 + 9x_2 = 15 \\
& -6x_1 + 3x_2 - s_3 = 3 \\
& x_1, x_2, s_1, s_3 \ge 0
\end{array}
$$

原点を端点に持つLPの生成

人工変数の導入

$$
\begin{aligned}
\max.\ z &= -6x_1 + 6x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 + 3x_2 + s_1 = 6 \\
& -5x_1 + 9x_2 + t_2 = 15 \\
& -6x_1 + 3x_2 - s_3 + t_3 = 3 \\
& x_1, x_2, s_1, s_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

人工変数

Point!

原問題に可能解有

人工問題

$$
\begin{aligned}
\max.\ z &= -t_1 - t_2 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 + 3x_2 + s_1 = 6 \\
& -5x_1 + 9x_2 + t_2 = 15 \\
& -6x_1 + 3x_2 - s_3 + t_3 = 3 \\
& x_1, x_2, s_1, s_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

人工問題の最適値は0

人工問題（1段階目）で
原問題の可能解を得る

↓

原問題（2段階目）を解く

詳しい解き方は別紙のプリントで

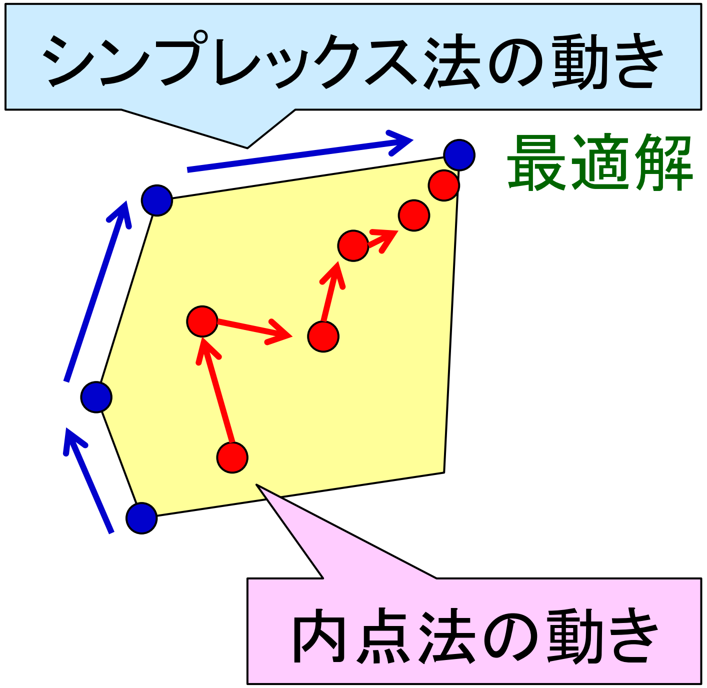
線形計画問題の計算量

Pかは
未解決

- (巡回回避版)シンプレックス法: 有限終了
  - 指数時間を要す問題例有⇔多項式時間解法でない!
  - 実際には, 高速に解を求める
- 線形計画問題はクラスP?
  - (答)YES!
  - 1979年 Khachiyan 楕円体法
  - 1984年 Karmarkar 内点法

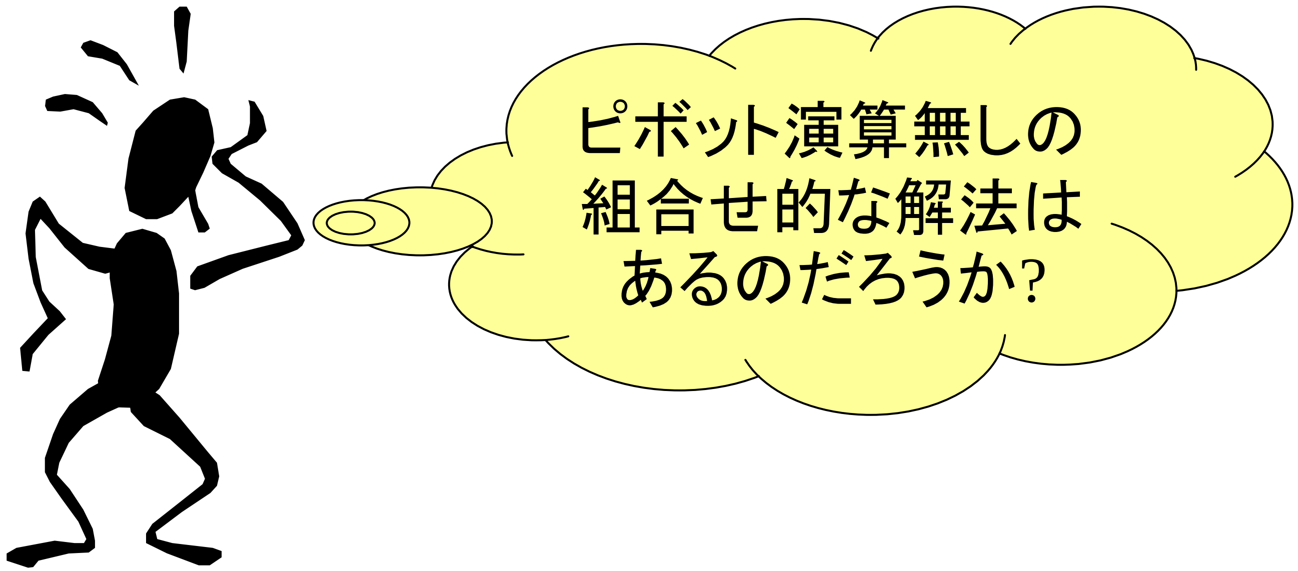
非実用的

現在の
双璧



LPは組合せ最適化問題?

- LPの最適解を求める
⇔最適な基底変数の組を見つける
⇔組合せの問題＝組合せ最適化問題



シンプレックス法の進化

改訂シンプレックス法 revised simplex method

- 計算速度の高速化
- メモリー節約
- 反復による計算誤差回避

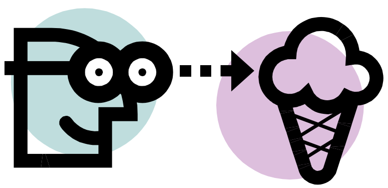
他にも，双対シンプレックス法等様々存在

線形計画問題に対する解法の進化が
数理計画全体に影響を与え続けている

まとめ

線形計画問題はシンプレックス法で解ける

このあとは



シンプレックス法で得た最適解は
様々なおいしい情報も提供してくれる

線形計画問題の感度分析