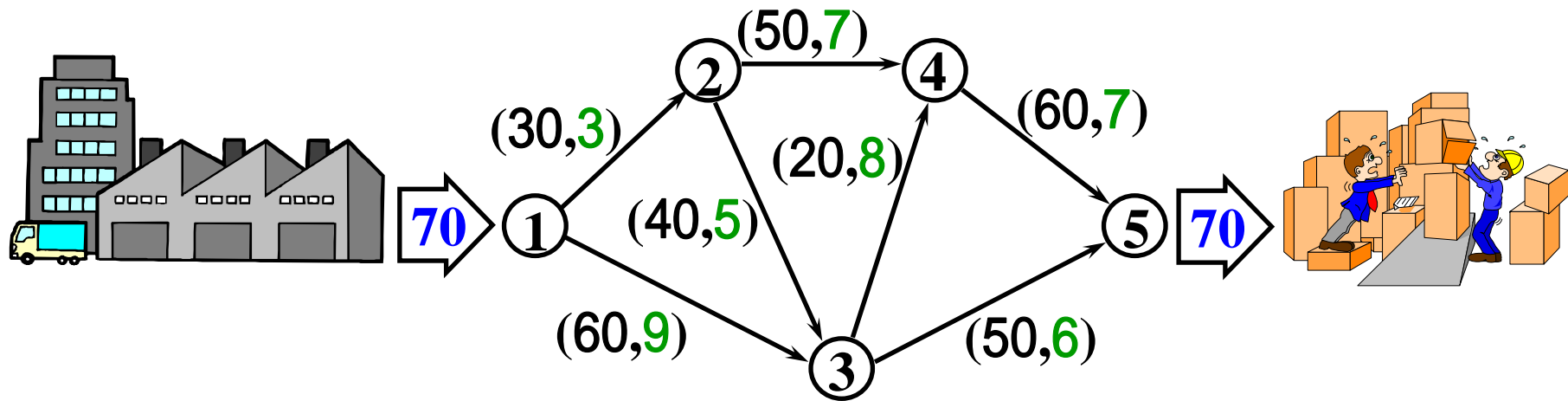


# Network Programming II



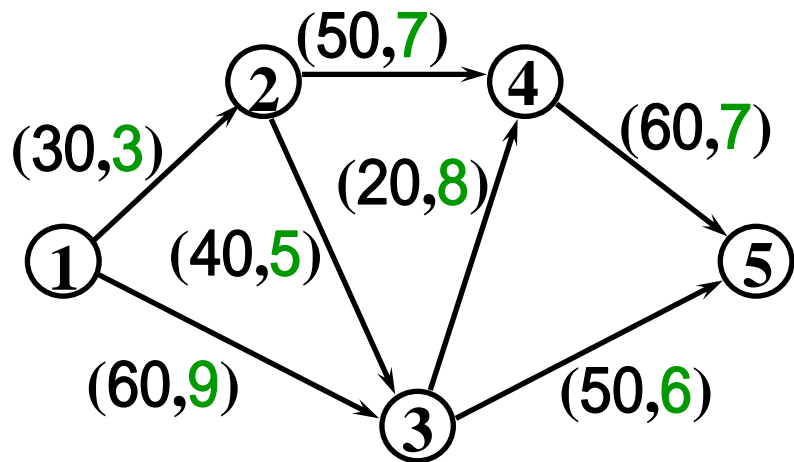
# 例題1 輸送作戦

文教工業では工場から倉庫へ70トン製品を輸送したい。最も費用の安い輸送計画を提案してほしい。

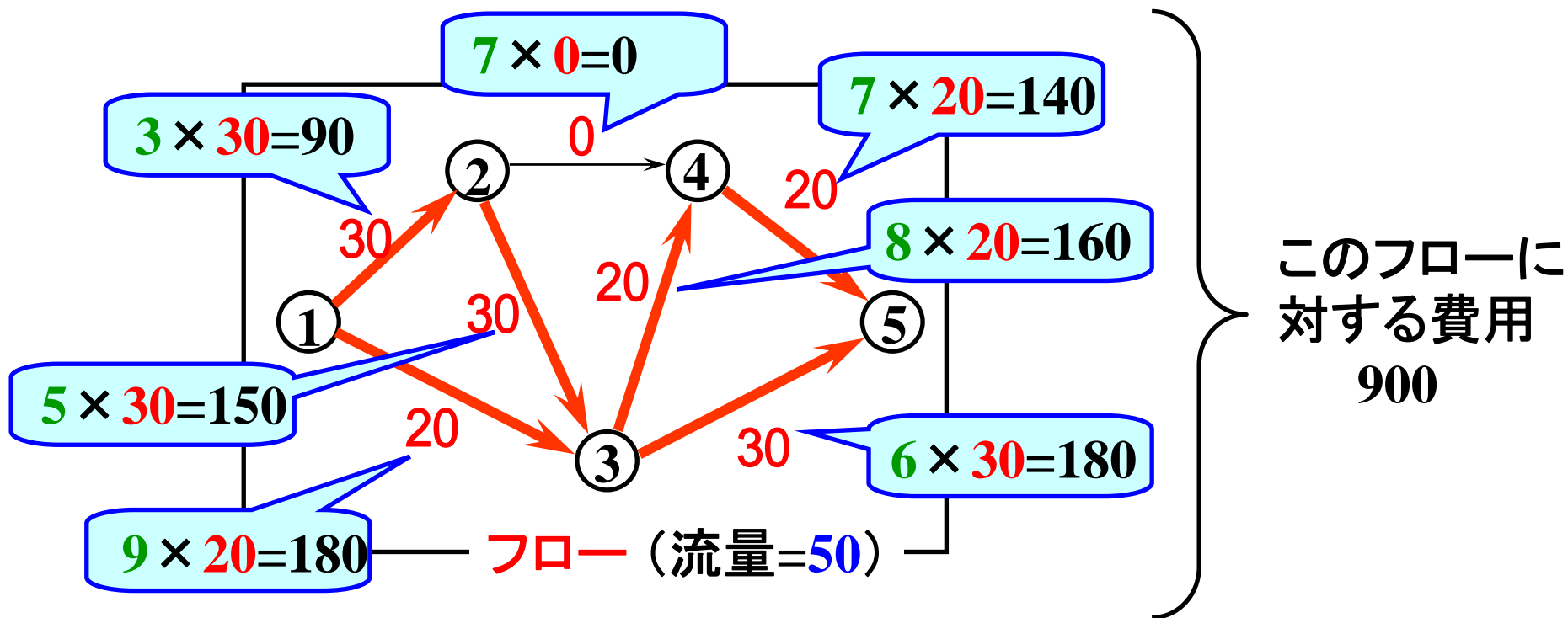


(枝の容量(トン), 1トン当たりの費用(万円))

# フローにより 生じる費用



単位フロー当  
たりの費用 × フロー



# 最小費用フロー問題

**目的** フローにより生じる費用→最小

**条件** 指定された流量の実行可能フローであること

**最小費用フロー**: 指定された流量を持つ  
費用最小の実行可能フロー



# 最小費用流問題に対する主な解法

- **負サイクル法**

- コストがより下がる閉路を見つけて更新する.
- 簡単. 工夫次第でより高速にできる.

- **最短路繰返し法** (→主双対法)

- コスト最小路にフローを流す手続きを繰返す.
- 簡単. 工夫次第でより高速にできる.

- **ネットワーク単体法**

- 実用的解法.

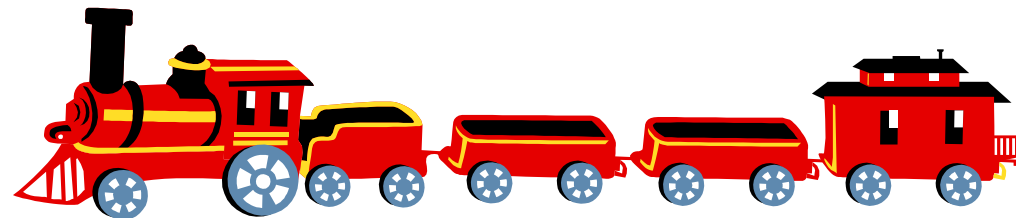
他多数の解法が提案されている.

# 最短路繰返し法

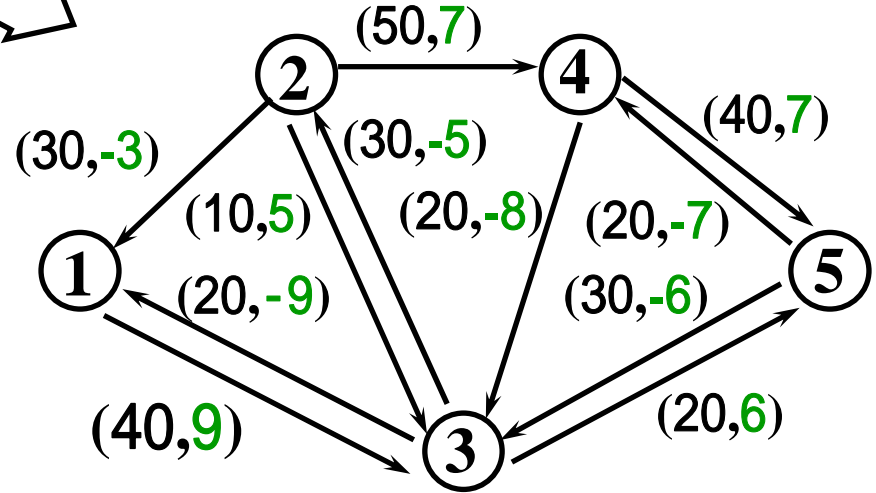
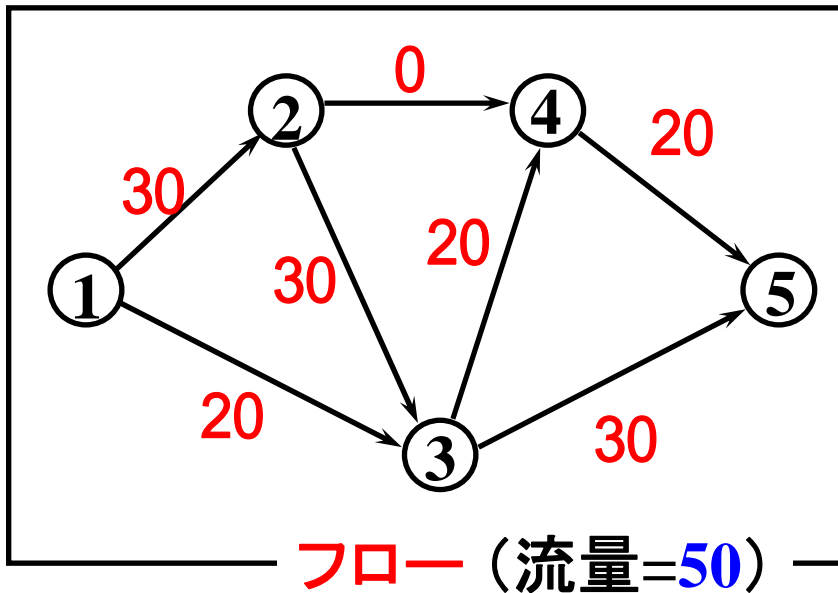
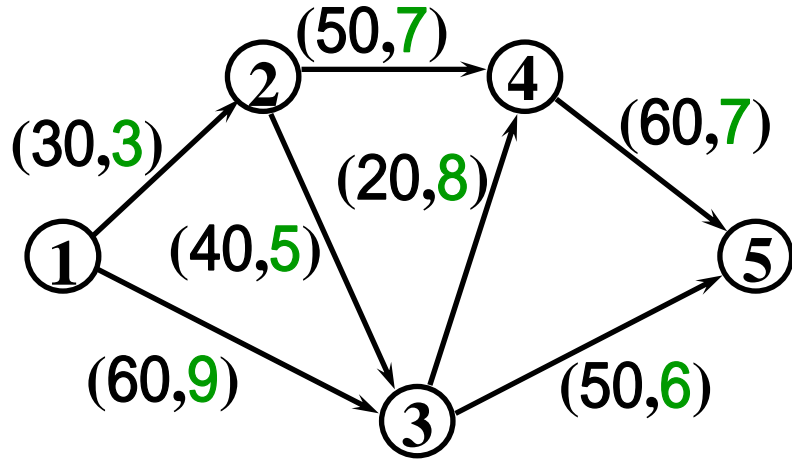
手順1:全枝のフローを0と置く.

手順2:以下を指定流量が得られるまで繰返す.

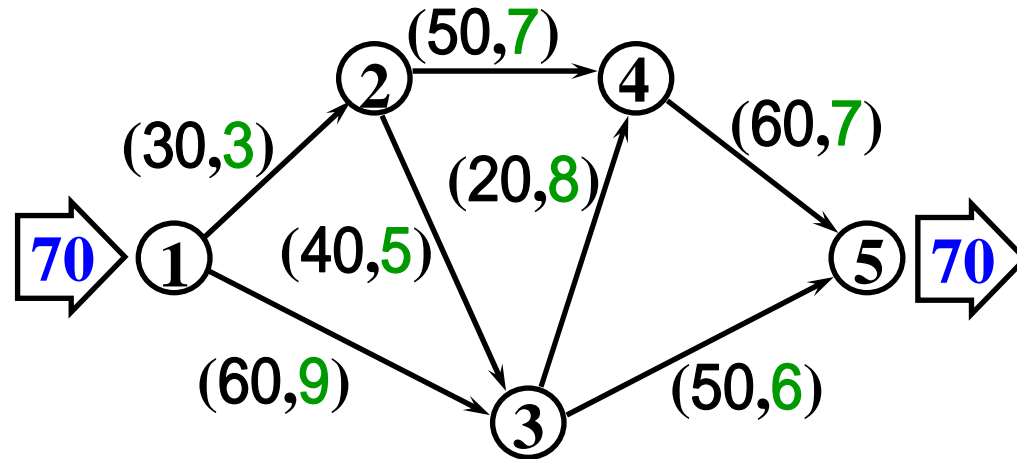
- (1) **残余ネットワーク**を作る.
- (2) 残余ネットワーク上で供給点から需要点への**コスト最小の路**(最短路)を求める.
- (3) 最短路に沿って流せるだけ**フロー**を流す.



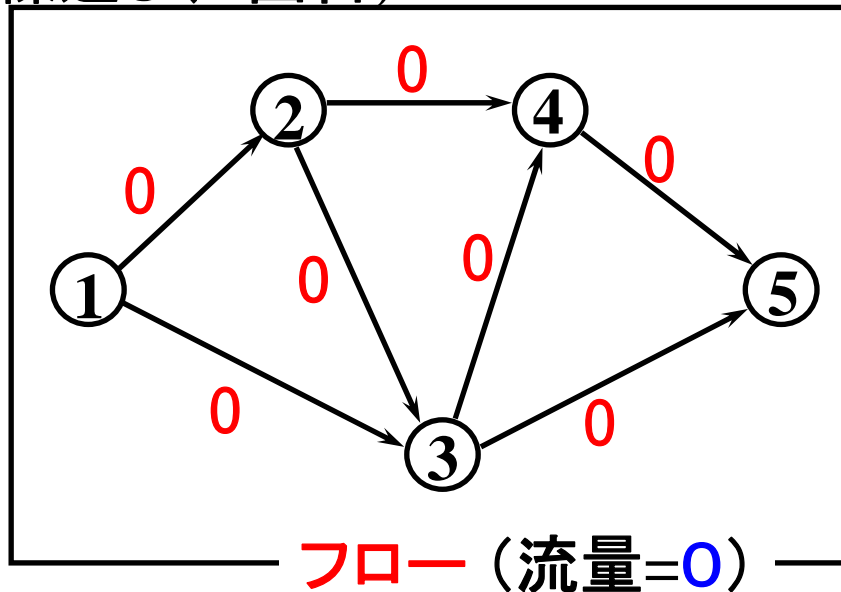
# 最小費用フローでの 残余ネットワーク



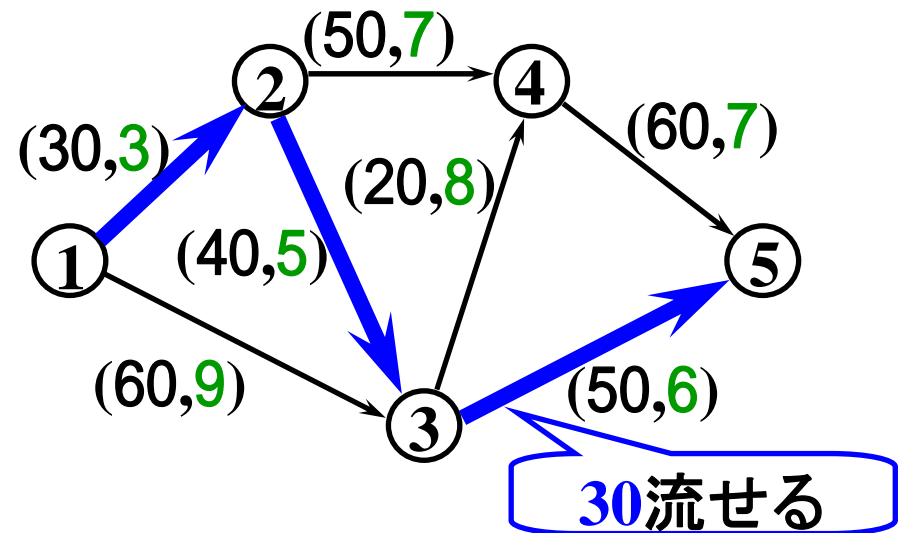
# 例題2 最短路繰返し法



繰返し(1回目)

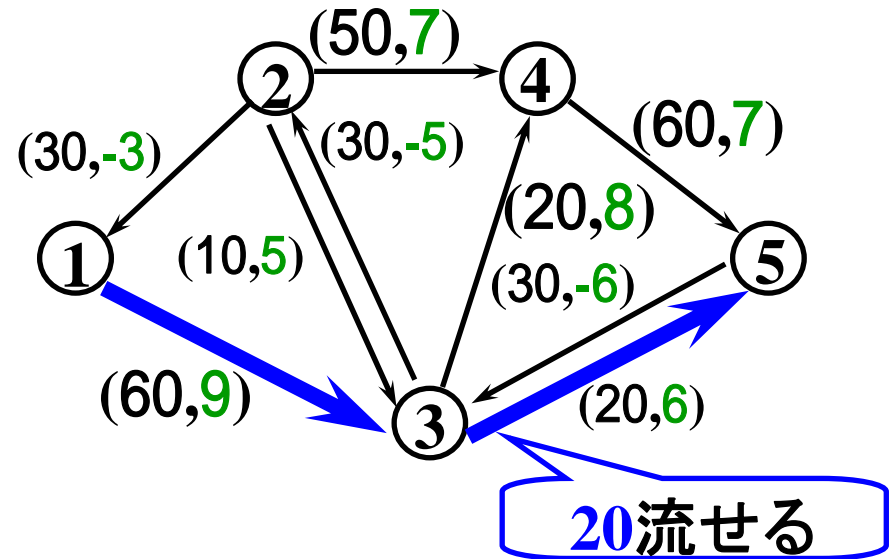
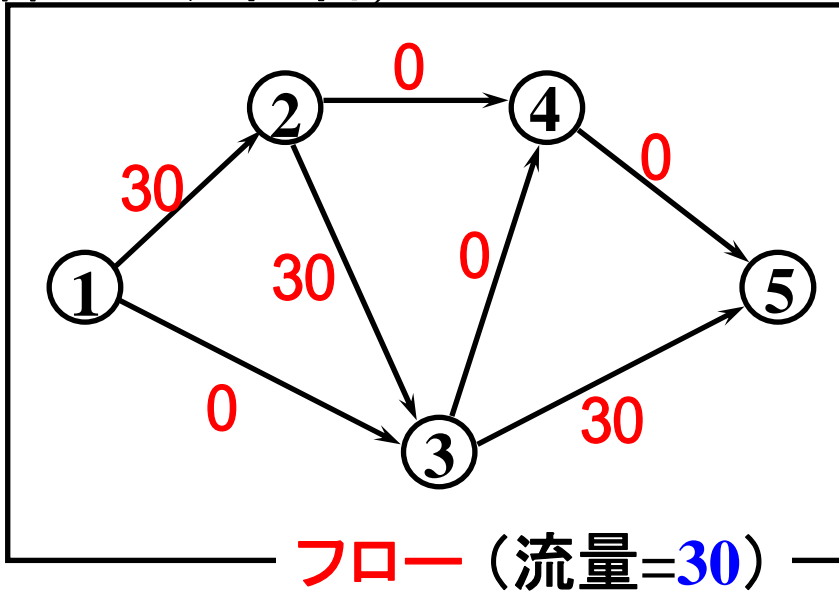


残余ネットワーク

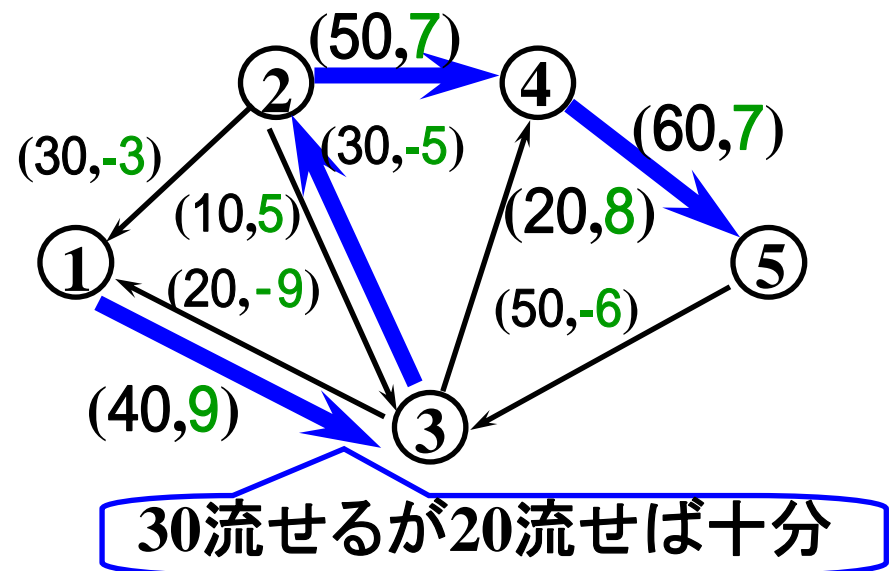
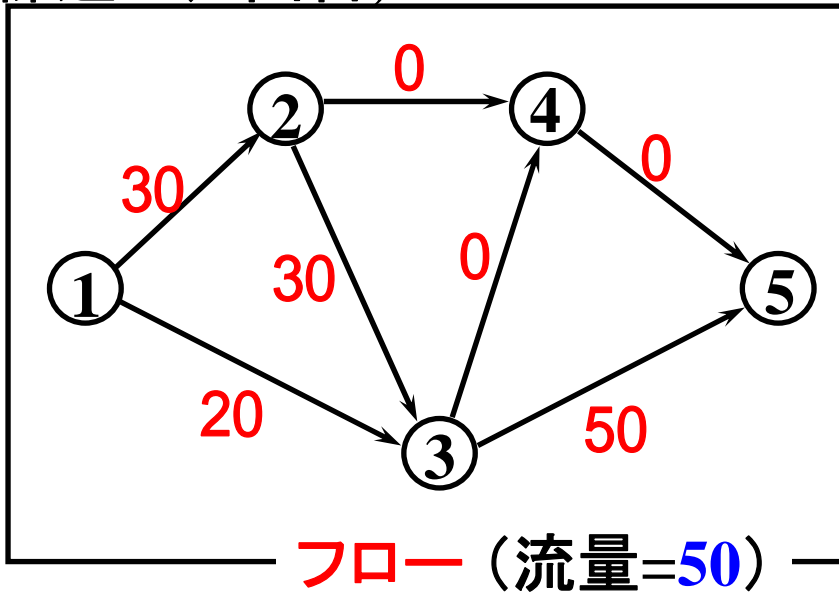




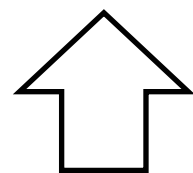
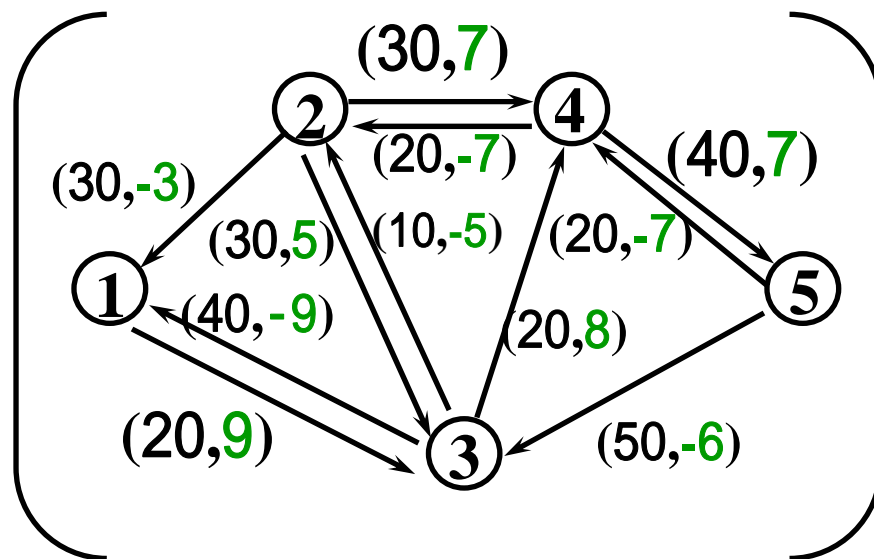
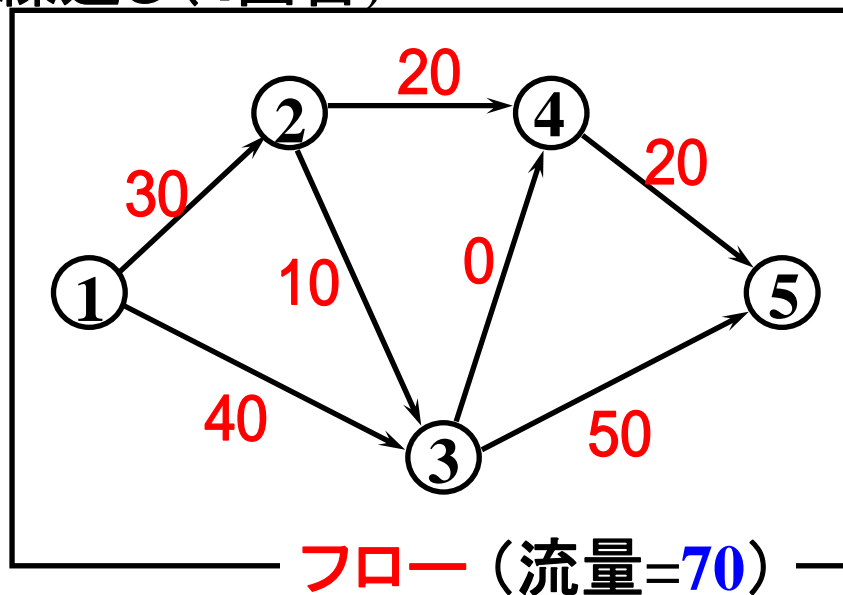
繰返し(2回目)



繰返し(3回目)



繰返し(4回目)



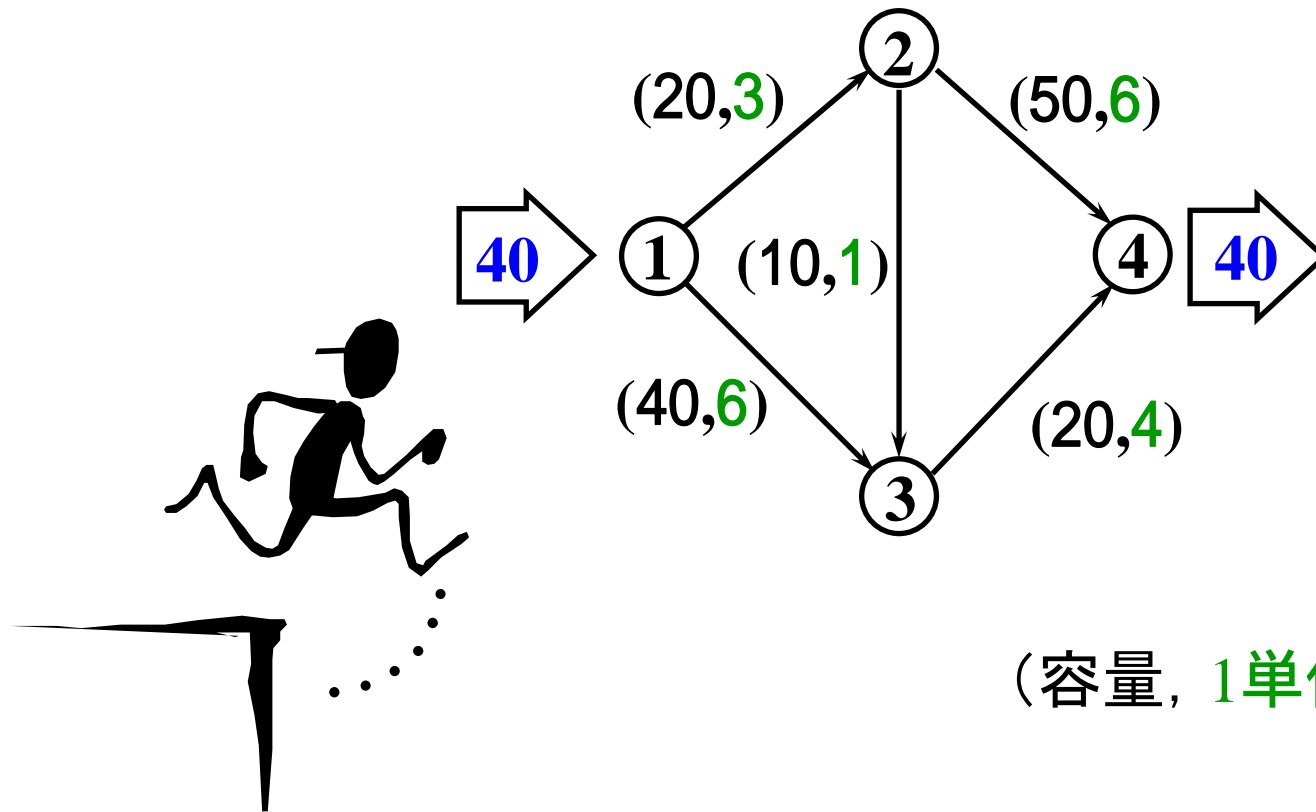
流量が供給量の70に到達したので終了.

流量70の最小費用フロー



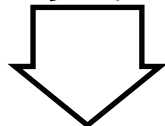
# 演習1

流量40の最小費用フローを求めよ。また、その時の費用を求めよ。



# 最短路繰返し法の弱い点

残余ネットワークに負の長さの枝が現れる.



最短路を求めるのにダイクストラ法が使えない.

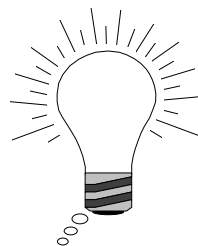
対策1

対策2

ダイクストラ法より計算時間はかかるが、負の長さも扱える解法を利用する.

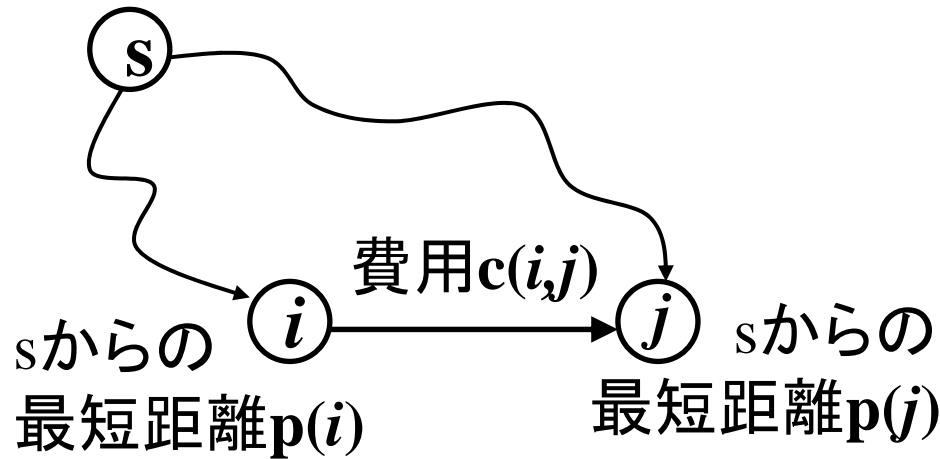
あまり良い対策ではない

残余ネットワークを工夫し、高速なダイクストラ法を利用する.



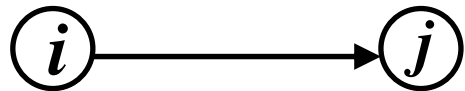
残余費用の導入

# 残余費用

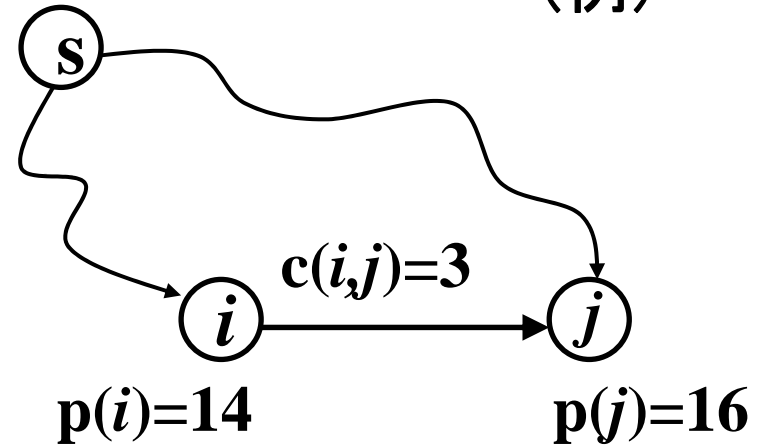


残余費用

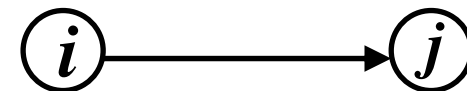
$$\underline{c}(i,j) = c(i,j) + p(i) - p(j)$$



(例)



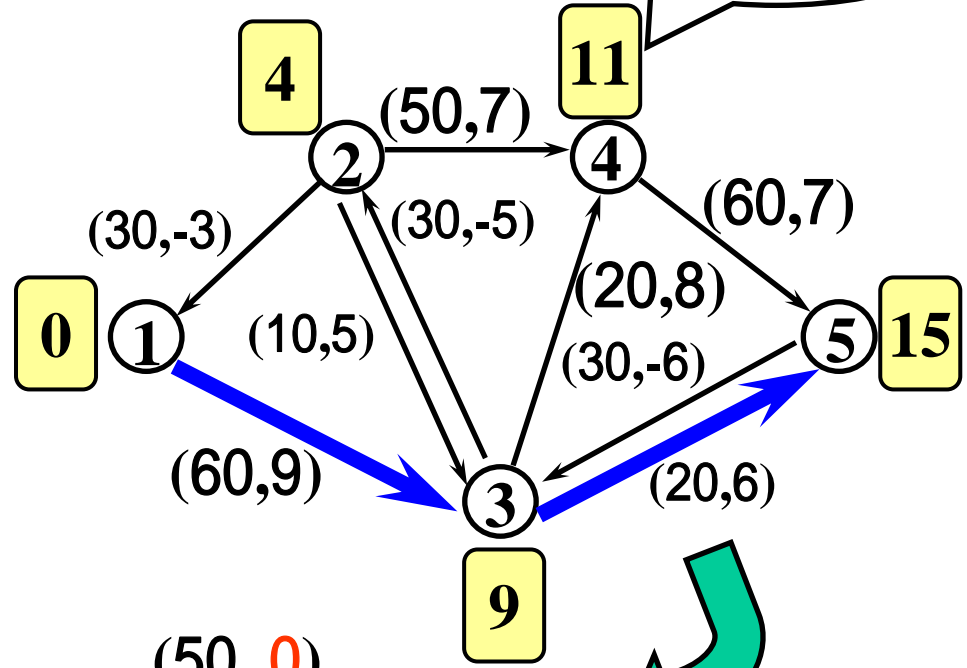
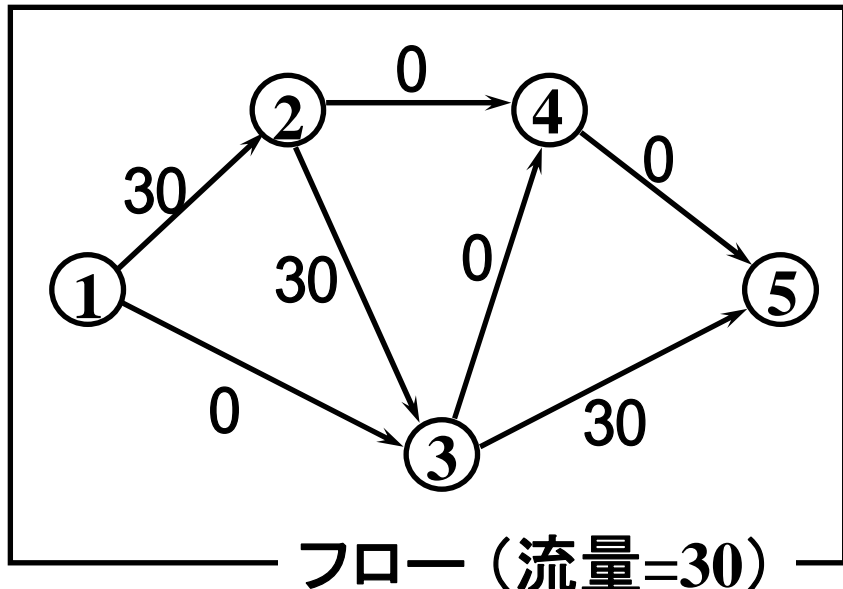
$$\underline{c}(i,j) = 3 + 14 - 16 = 1$$



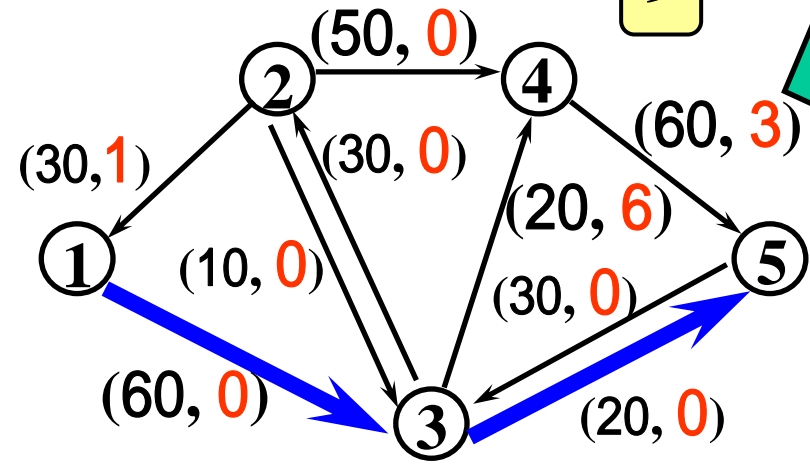
残余費用は非負である. なぜ?

# 改訂残余ネットワーク

供給点からの最短距離p

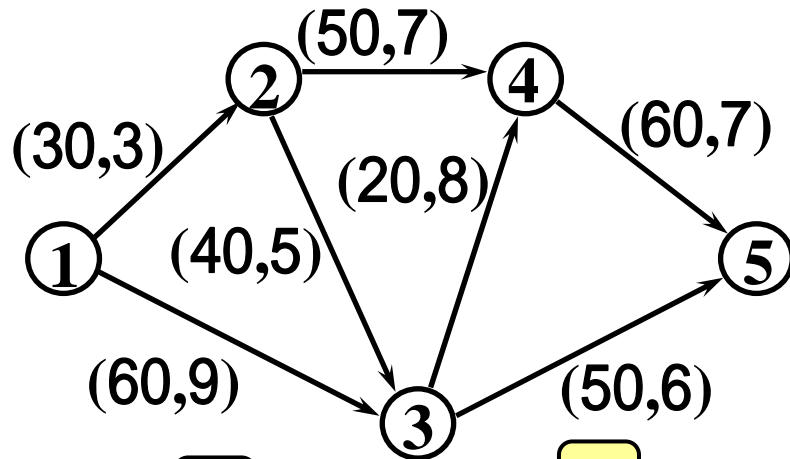


改訂残余ネットワーク

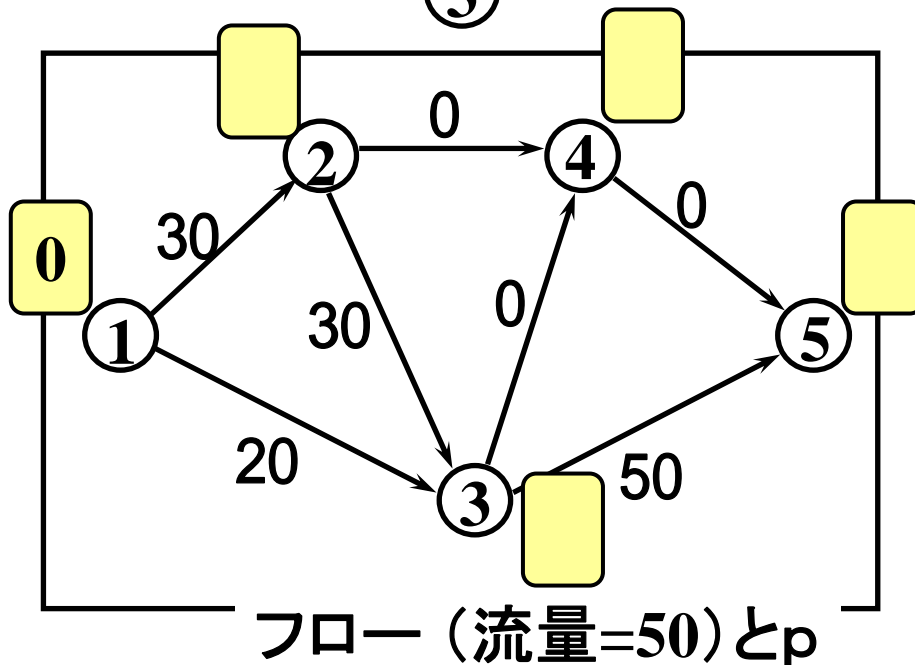


残余費用に置き換える

# 練習 改訂残余ネットワーク



左のネットワーク上に  
左下のようなフローが流れて  
いる時、  
改訂残余ネットワークはど  
のように表現されるか？



(改訂残余ネットワーク上  
における供給点①から全点へ  
の現在の最短距離 $p$ は各自  
で求めなさい)

# 改訂最短路繰り返し法

手順1: 全枝のフローを0, 各点での $p(v)$ を0とおく.

手順2: 以下を指定流量が得られるまで繰り返す.

(1) **改訂残余ネットワーク**を作る.

- ① 現在のフローに対するネットワークの構造を作る
- ② 現在の $p$ に対する残余費用を定める
- ③ 供給点から各点への最短距離 $d(v)$ を求める.

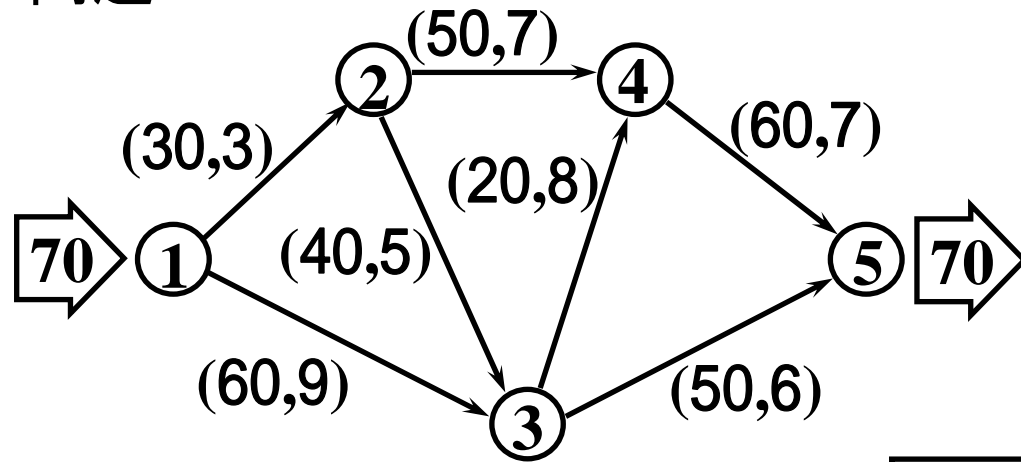
(2) 供給点から需要点への**最短路**に沿って流せるだけ**フローを流す**.

(3) 各点において $p(v) \leftarrow p(v) + d(v)$ とおく.

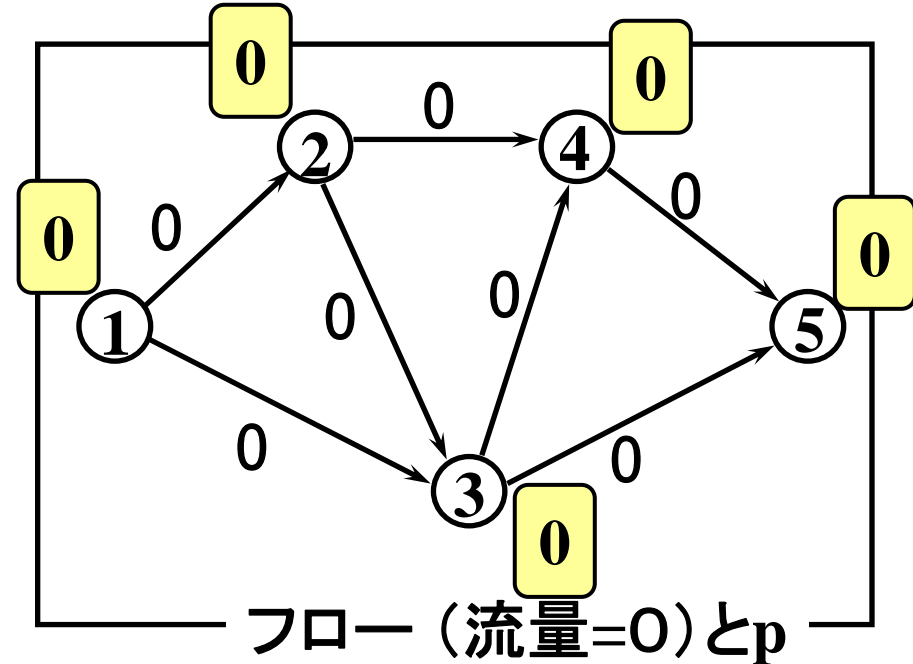


# 例題3 改訂最短路繰返し法

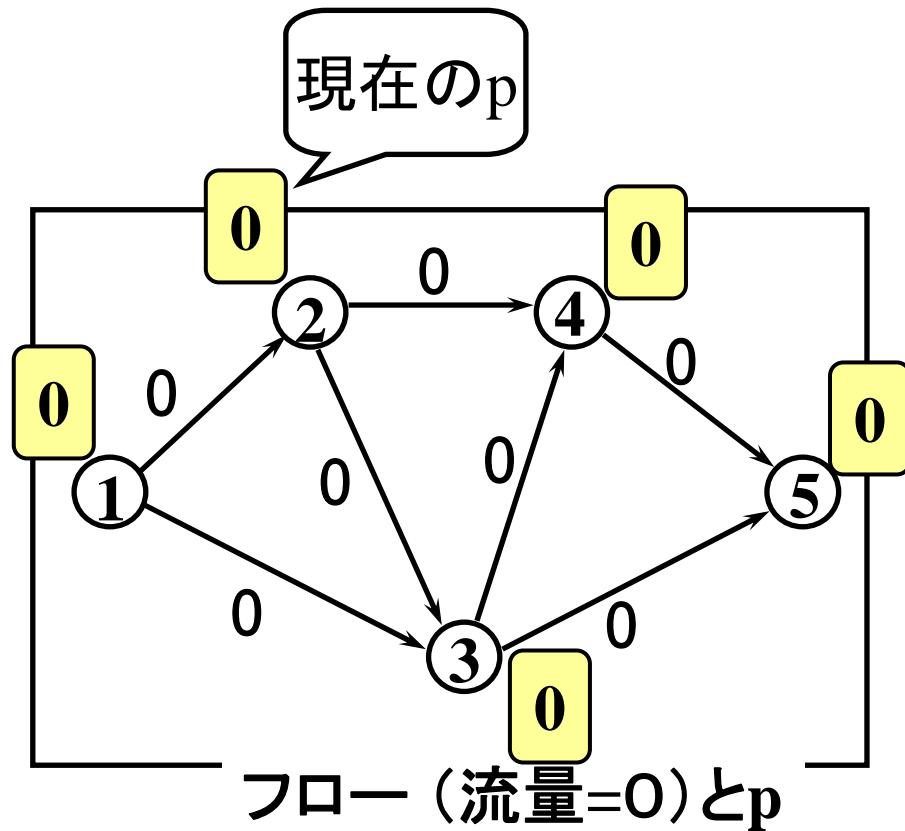
問題



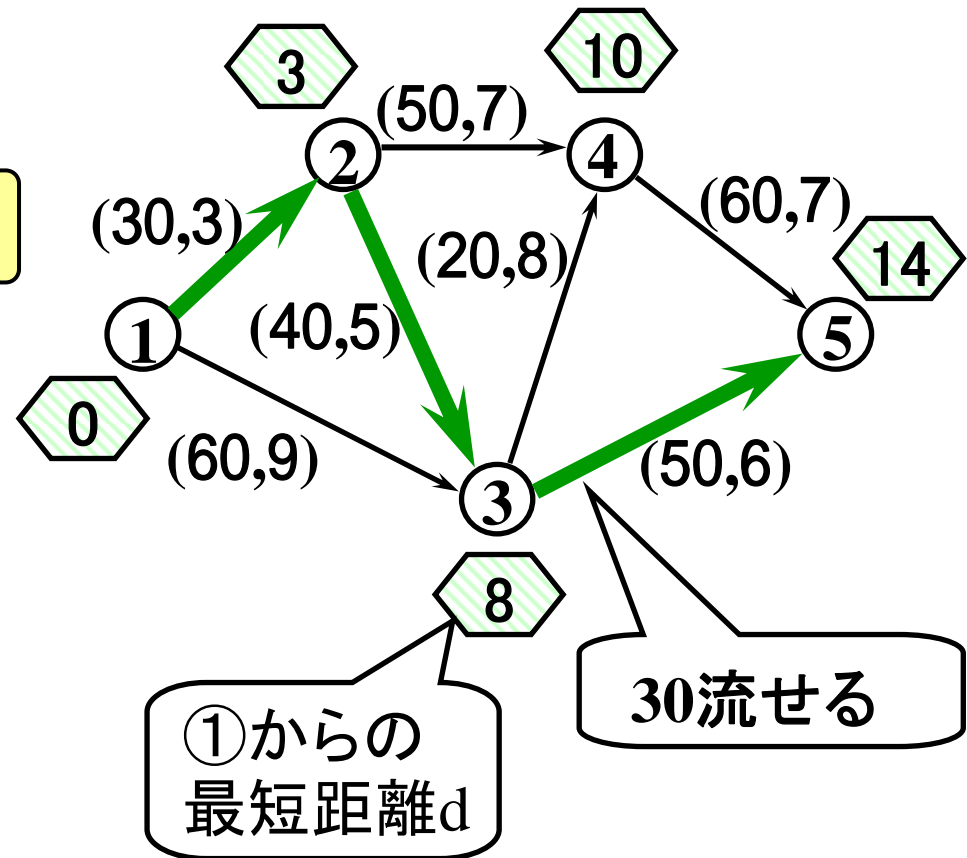
手順1 初期設定



# 手順2 繰り返し1回目前半

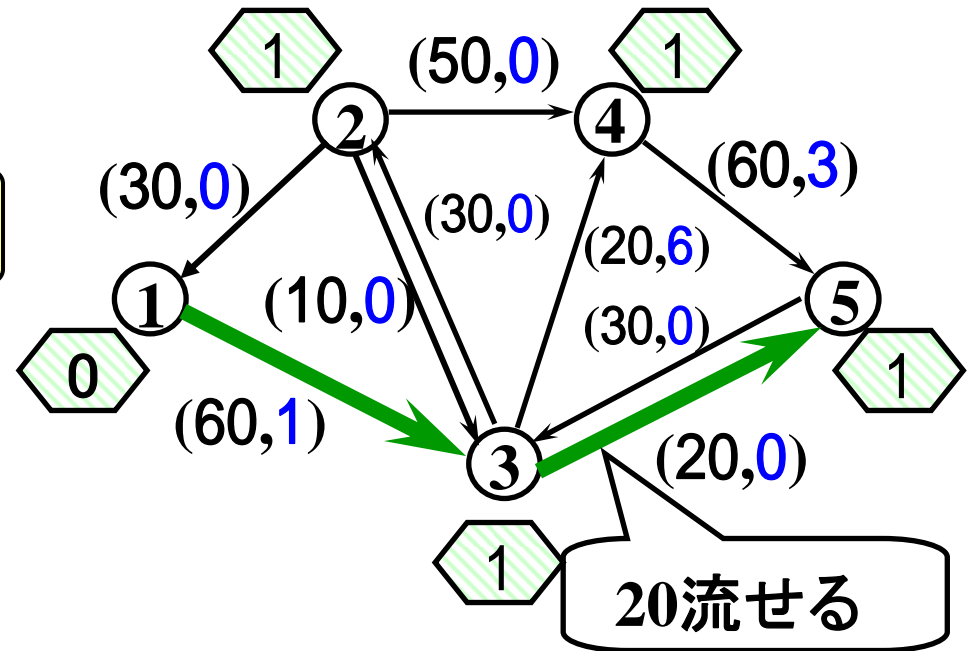
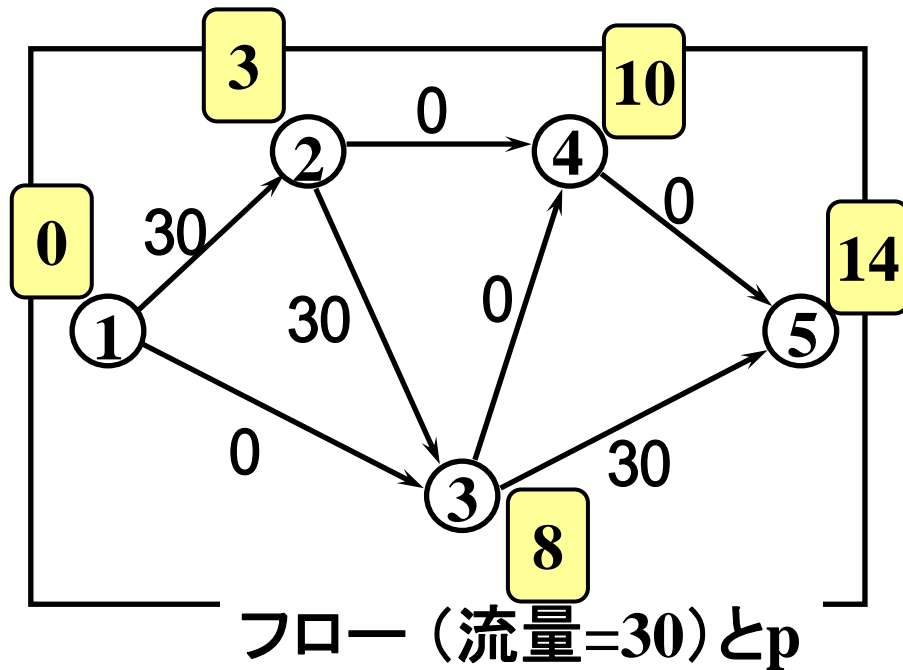


左図のフローとpに対する  
改訂残余ネットワーク



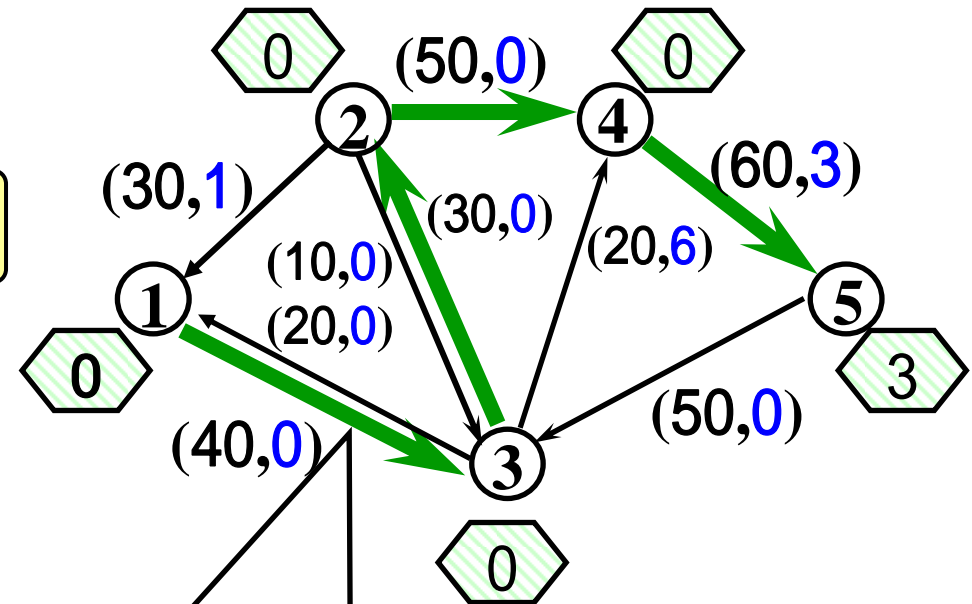
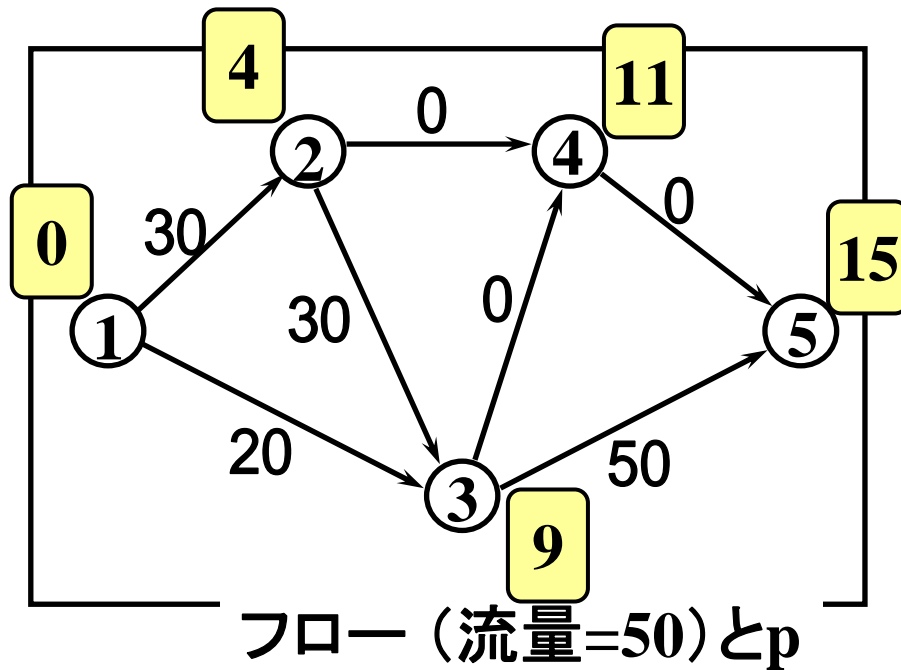
# 手順2 繰り返し1回目後半+2回目前半

左図のフローとpに対する  
改訂残余ネットワーク



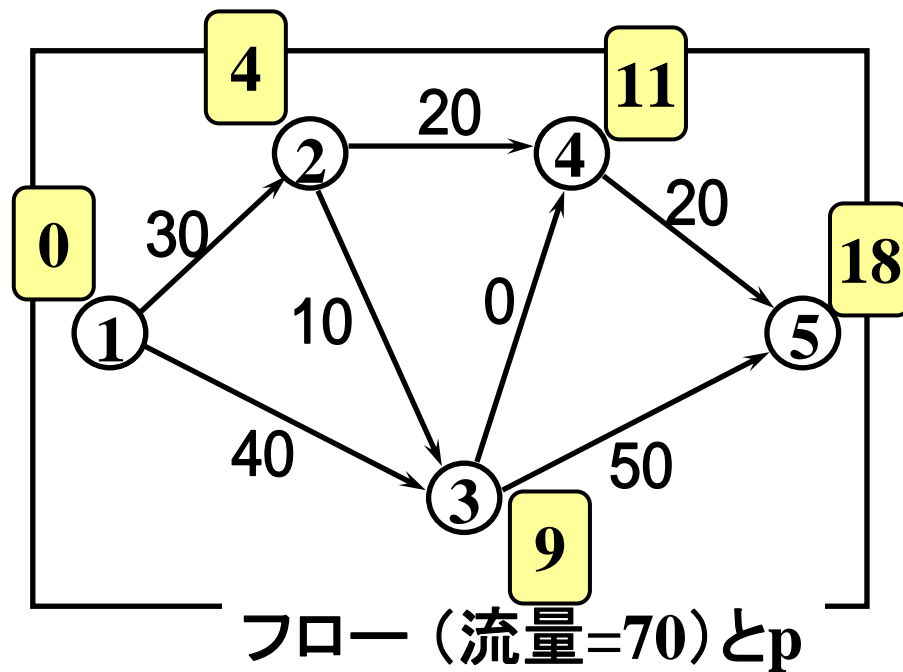
# 手順2 繰り返し2回目後半+3回目前半

左図のフローとpに対する  
改訂残余ネットワーク



30流せるが、20流せば  
流量70を満たす

# 手順2 繰り返し3回目後半+4回目前半



## 演習8-2

演習8-1において、改訂最短路繰り返し法を用いて最小費用フローを求めてみよう。

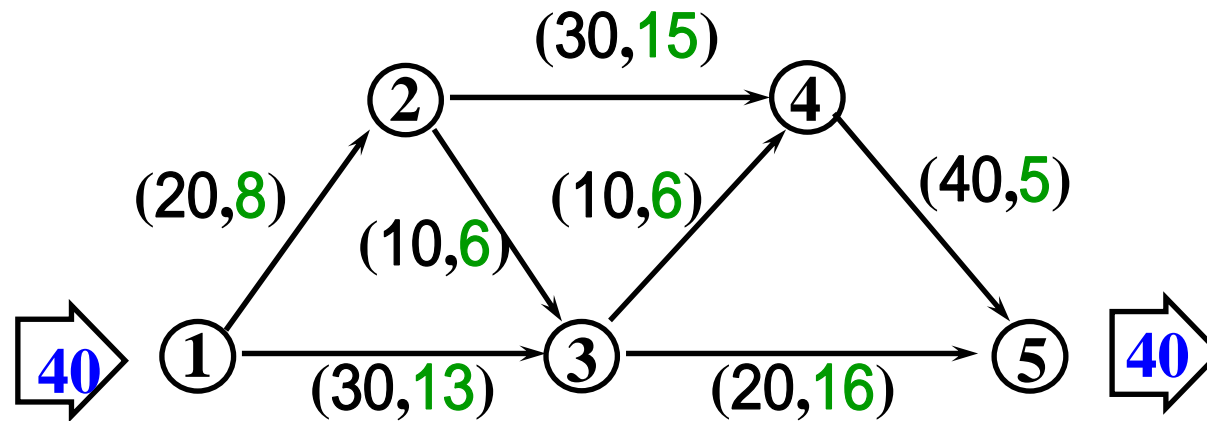


流量が70に到達したので終了

流量70の最小費用フロー

# 演習3

流量40の最小費用フローを求めよ. また, その時の総費用も示せ.



(容量, フロー1単位当たりの費用)

# 例題4

文教商事では5つの支社へ一人ずつの人員補強を計画している。5人が希望している任地と、その任地へ赴く際に予想される費用は以下のようにまとめられた。

	支社①	支社②	支社③	支社④	支社⑤
Aさん	25	30			
Bさん	20		70	35	
Cさん	80	75	90	65	
Dさん				55	40
Eさん				60	50

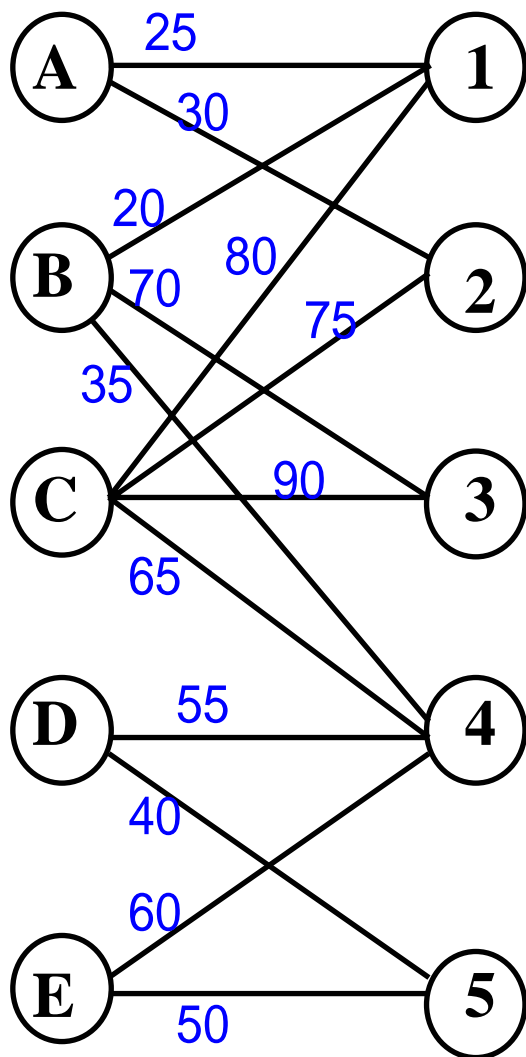
空白は希望  
しない支社



さて、誰をどの支社に配属すれば最も費用が安く済むか？

関連問題：5人を各支社に割り当てることはできるか？

# 割当問題



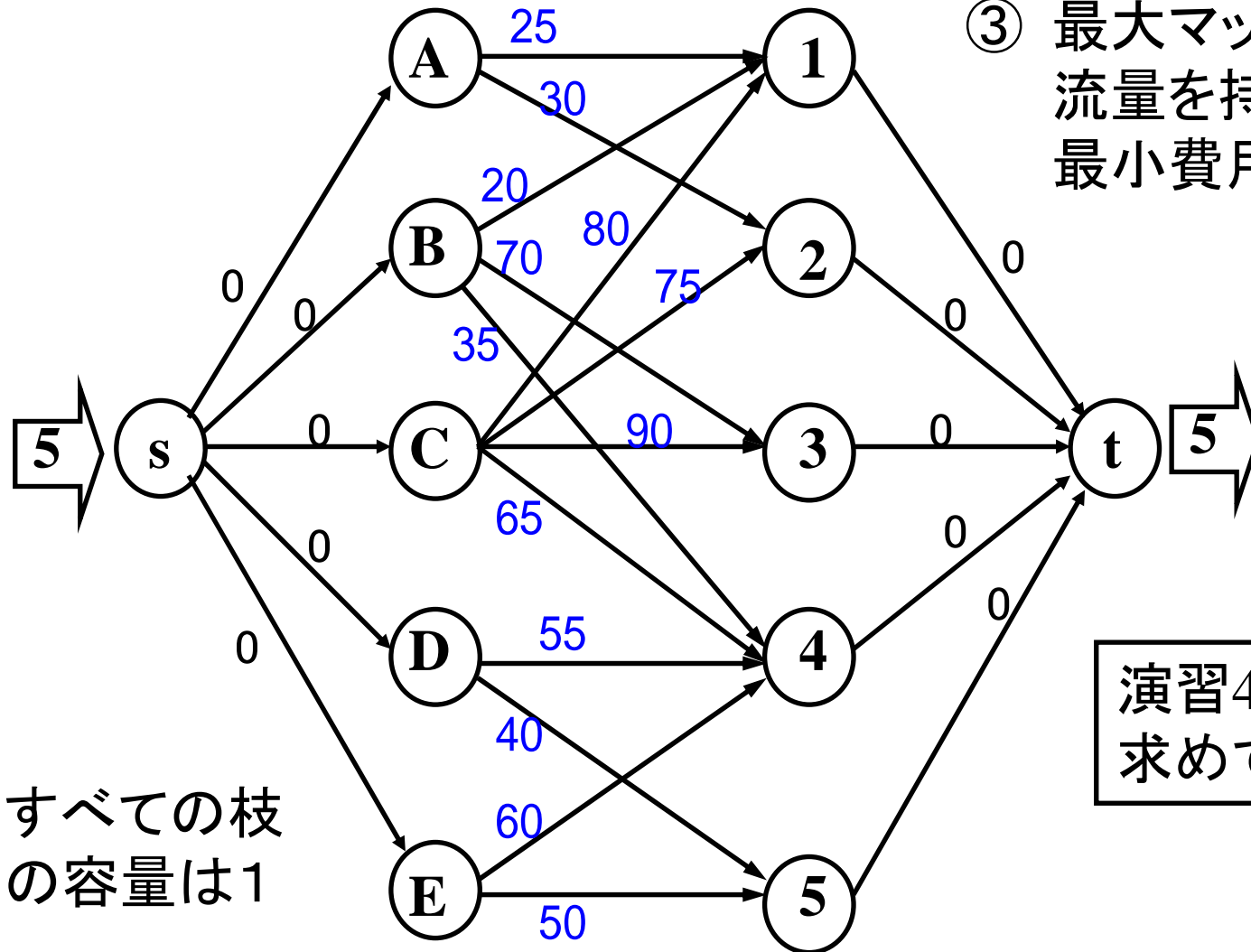
完全マッチングの中で  
(最大マッチングの中で)  
重みの和が最小のマッチ  
ングを求める問題





# 割当問題の一解法

- ① 最大マッチング数導出
- ② 左図のように変形
- ③ 最大マッチング数の流量を持つ  
最小費用フロー導出



演習4  
求めてみよう!!

## 例題5 輸送問題

ある会社では、倉庫A,B, Cにそれぞれ30(千個), 20(千個), 40(千個)の製品を保管しているが、これをP町, Q町, R町にそれぞれ30(千個), 15(千個), 45(千個)ずつ発送したい。

輸送費	(万円/千個)		
	P町	Q町	R町
倉庫A	4	2	3
倉庫B	6	1	4
倉庫C	8	2	7

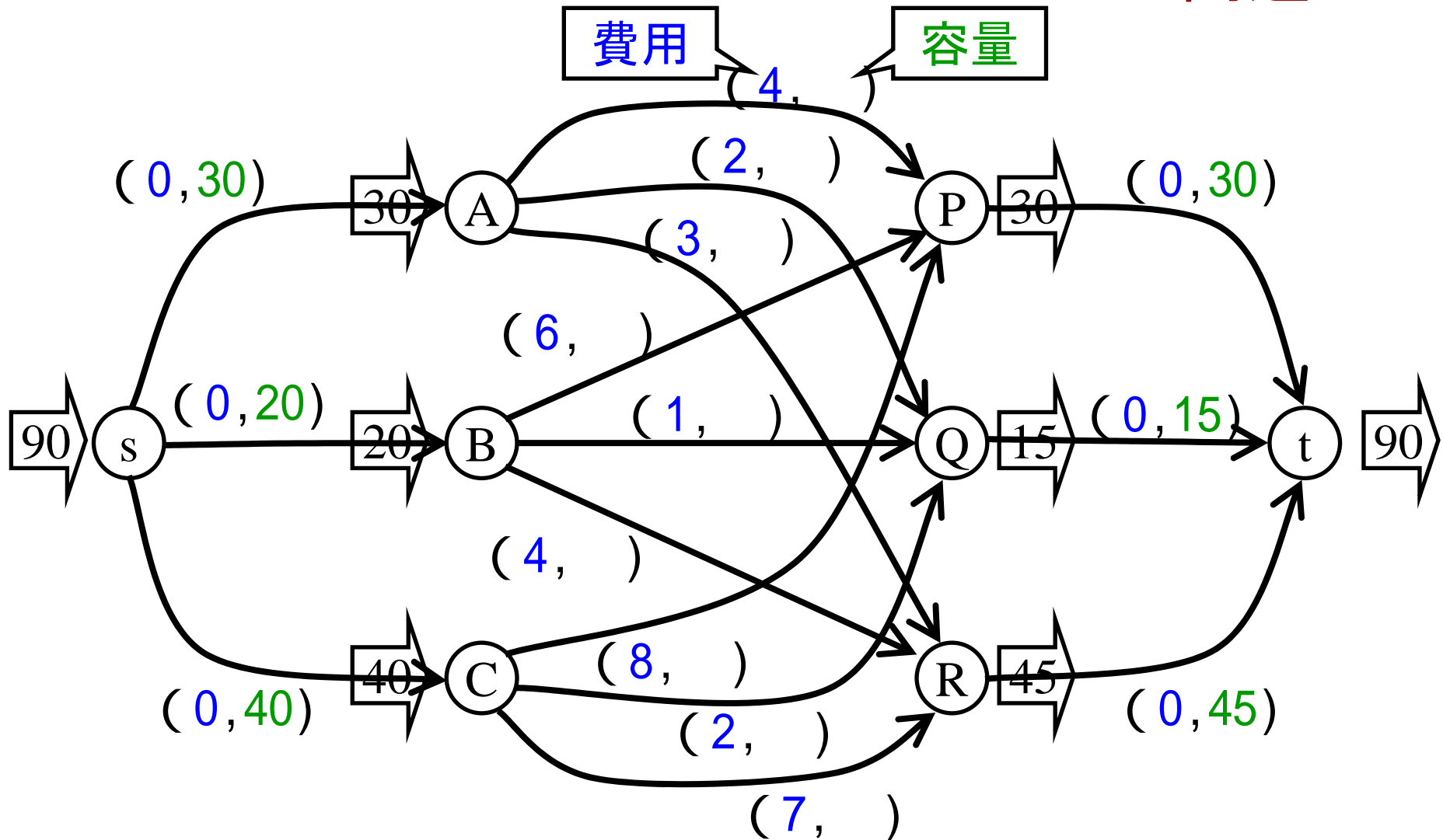
輸送費総額が最小になる輸送プランを提示せよ。

ハンガリアン法等

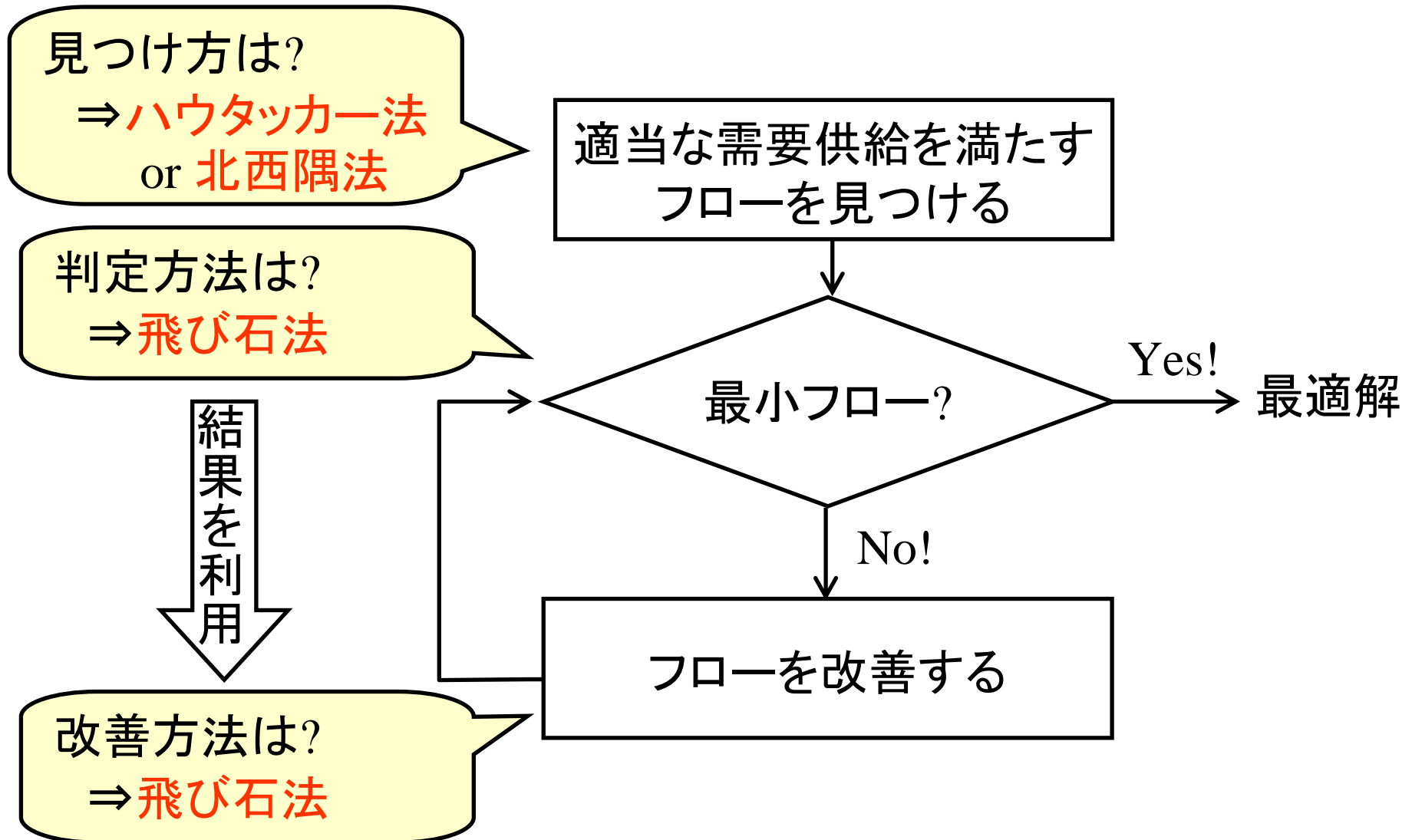
飛び石法等

最短路繰り返し法等

割当問題  $\subseteq$  輸送問題  $\subseteq$  最小費用  
フロー問題  
の図示



# 輸送問題に特化した解法



# 需要・供給を満たすフローを見つける方法 ハウタッカー法

費用の安い順に  
流していく

	P	Q	R	供給量
A	<b>4</b> 0	<b>2</b> 0	<b>3</b> 30	30
B	<b>6</b> 0	<b>1</b> 15	<b>4</b> 5	20
C	<b>8</b> 30	<b>2</b> 0	<b>7</b> 10	40
需要量	30	15	45	

初期フローが得られた！

# 最小費用かを判定する 飛び石法

現在「0」の部分にフローを流したら費用が改善するかをチェック

例: CQを増やしてみよう

変更可能な  
最大量は?  
⇒ **10**

サイクル(閉路)

$$+2 - 7 + 4 - 1 = -2$$

	P	Q	R
A	4 0	2 0	3 30
B	6 0	1 15	4 5
C	8 30	2 0	7 10

⇒ サイクルに沿ってフロー変更すると, 費用は下がる

⇔ 現在のフローは最小費用フローではない

# フロー更新⇒飛び石法の繰り返し

更新後のフロー

例: APを増やしてみよう

サイクル

$$+4 - 8 + 2 - 1 + 4 - 3 = -2$$

最小費用でない

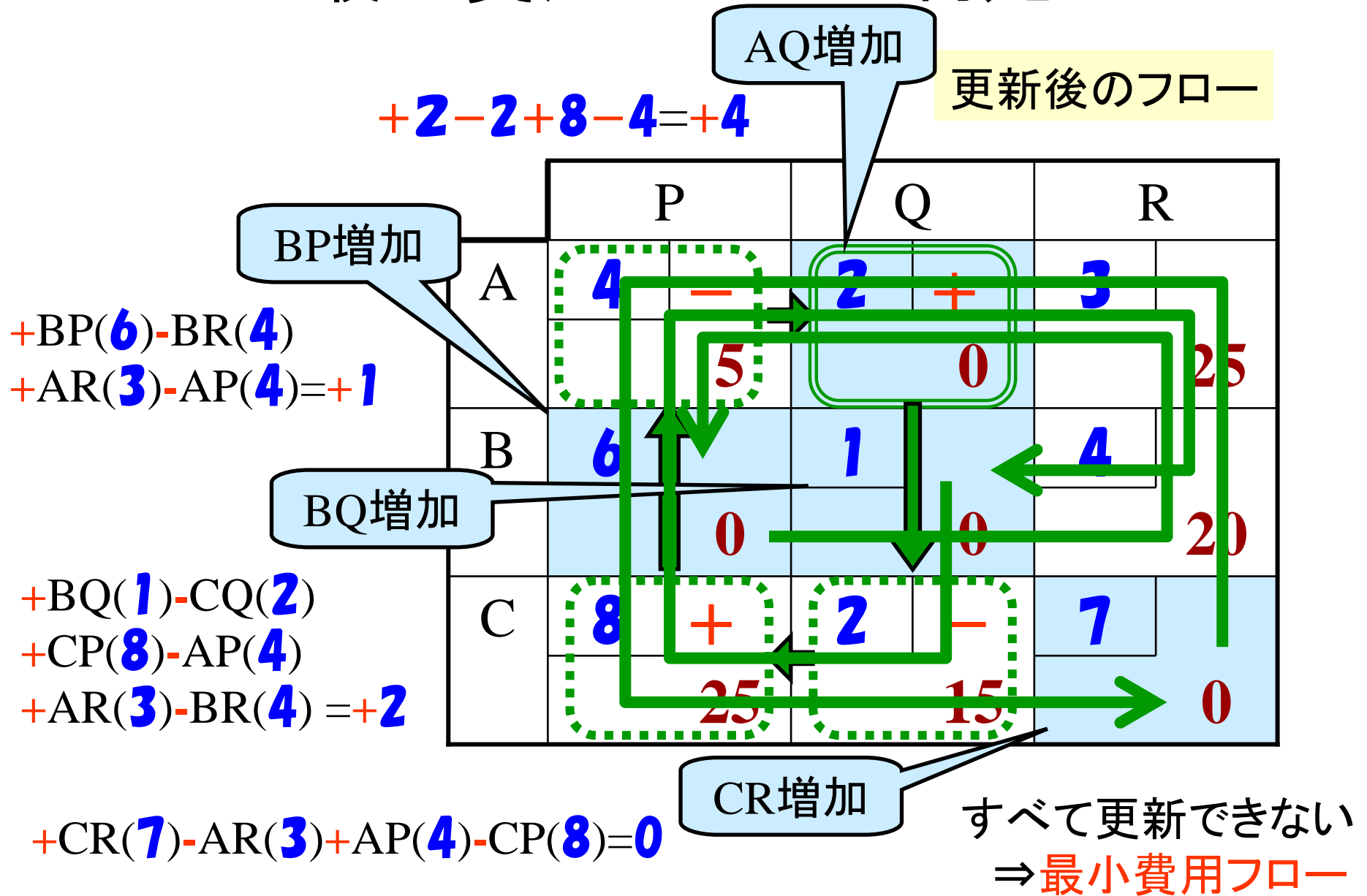
サイクルに沿って

5変更可能

⇒ フロー更新

	P	Q	R
A	4 + 0	2 0	3 - 30
B	6 0	1 - 5	4 + 15
C	8 - 30	2 + 10	7 0

# 最小費用フローの判定





# 需要・供給を満たすフローを見つける方法(2)

## 北西隅法

左上から埋めていく

	P	Q	R	供給量
A	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	30
	<b>30</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	
B	<b>6</b>	<b>1</b>	<b>4</b>	20
	<b>0</b>	<b>15</b>	<b>5</b>	
C	<b>8</b>	<b>2</b>	<b>7</b>	40
	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>10</b>	
需要量	30	15	45	

初期フローが得られた！

# 演習5 輸送問題

	P	Q	R	供給量
A	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	30
B	<b>4</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	20
需要量	25	10	15	

倉庫A,Bから, 町P,Q,Rへの最小費用輸送プランを提示せよ

# 演習6 輸送問題

文教サイクルは、3つの工場と4つの販売店を有している。各工場の週間製造台数、工場から販売店への輸送費、各販売店の週間需要は以下の通りである。

	販売店①	販売店②	販売店③	販売店④	週間製造台数
工場A	6千円/台	7千円/台	3千円/台	7千円/台	100台
工場B	8千円/台	3千円/台	6千円/台	5千円/台	250台
工場C	5千円/台	4千円/台	5千円/台	6千円/台	150台
週間需要台数	80台	160台	60台	200台	

総輸送費を最小にするには、各工場から各販売店へどのように製品を輸送すれば良いか。