



# 配属の数理(1)

良いペアを作ろう！

# ここで学ぶこと

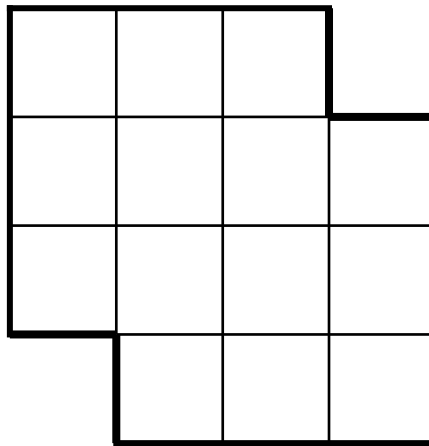
- マッチング問題
  - 市松模様で色分け可能(2部グラフ)の場合
  - 一般グラフの場合
- 割当問題 誰にどの仕事を割り当てる?
- 配属問題 ゼミの配属を決めよう
- 安定結婚問題 不満を抑えるマッチング

# 例題1

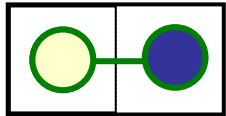
畳の敷き詰めプランを作成しよう



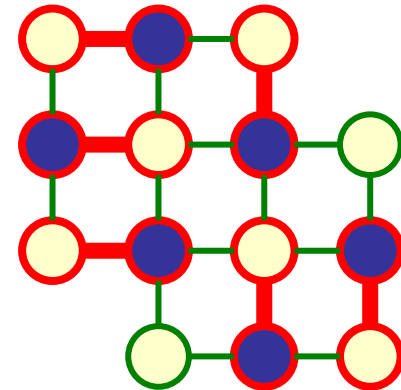
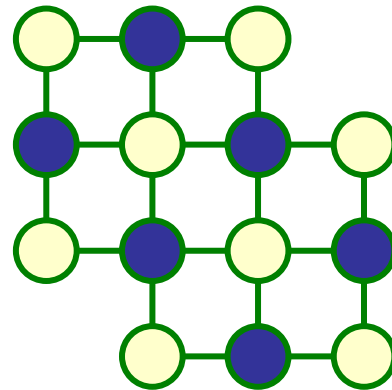
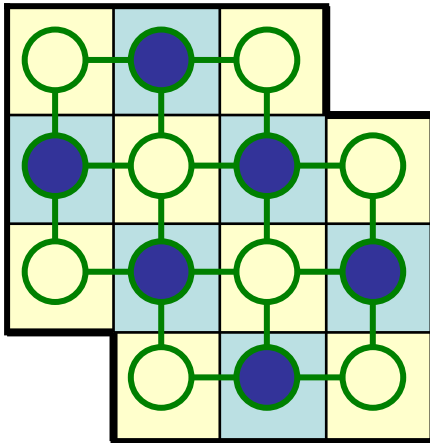
畳1枚



# 例題1 解説



市松模様塗れる  
↓  
マッチングを見つけやすいぞ!



● 6点 < ○ 8点

マッチング数6

市松模様

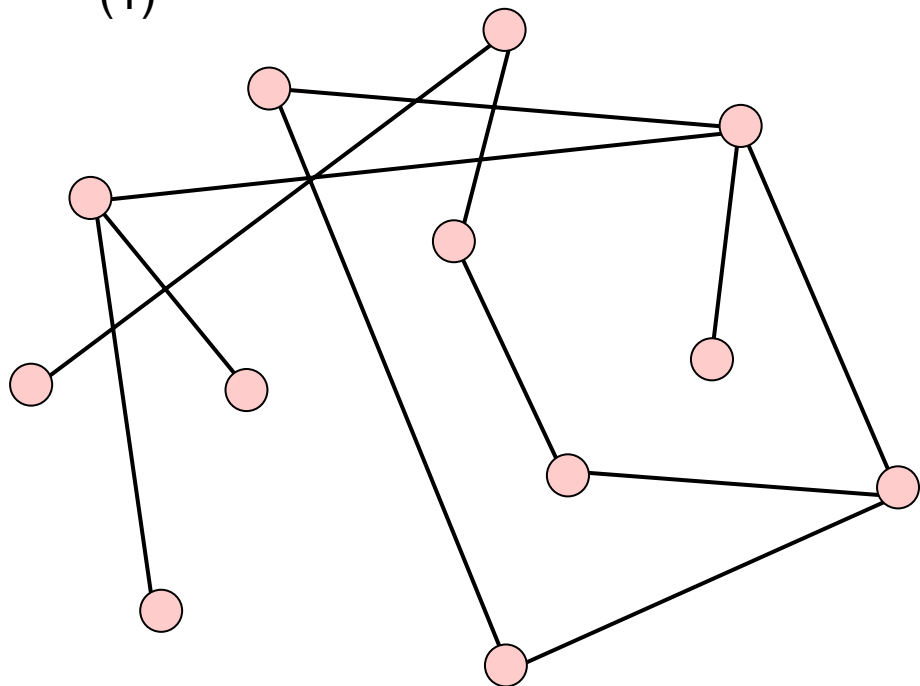
高々6枚しか畳は置けない

最大マッチング

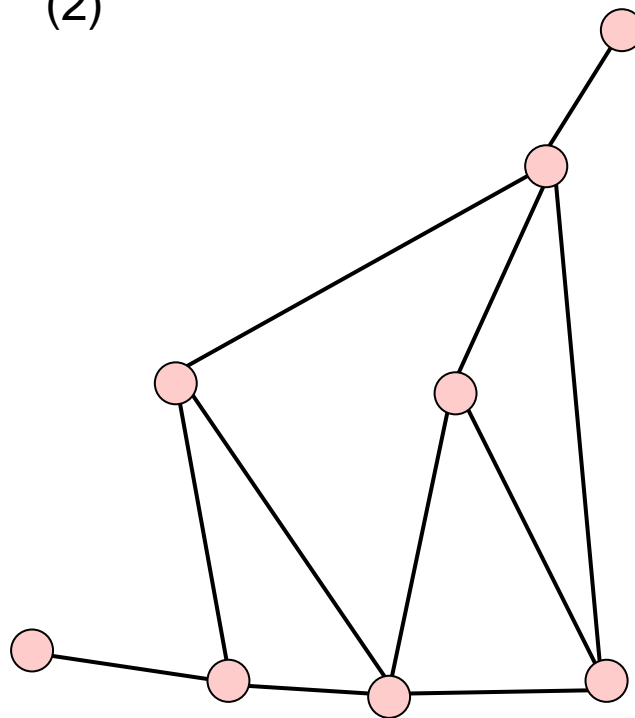
# 市松模様(Shimatsu)に塗ってみよう!



(1)

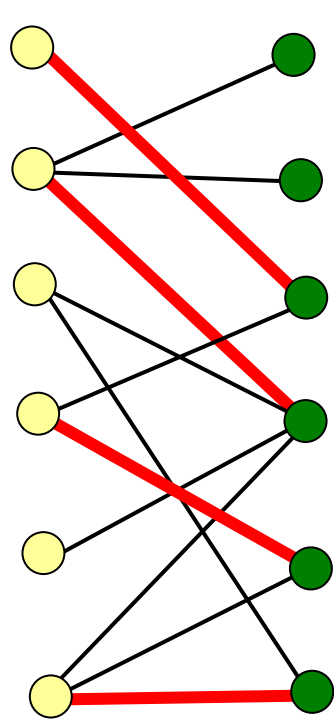


(2)

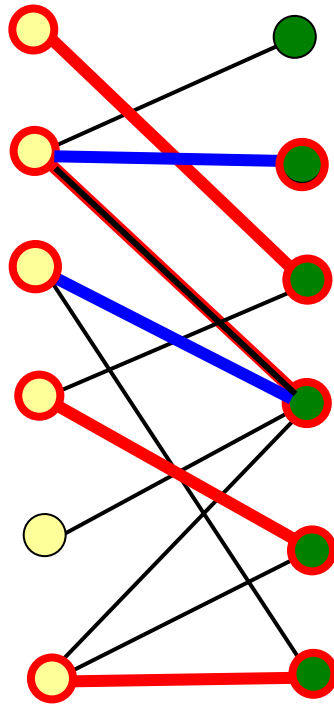


# 2部グラフ上の最大マッチング

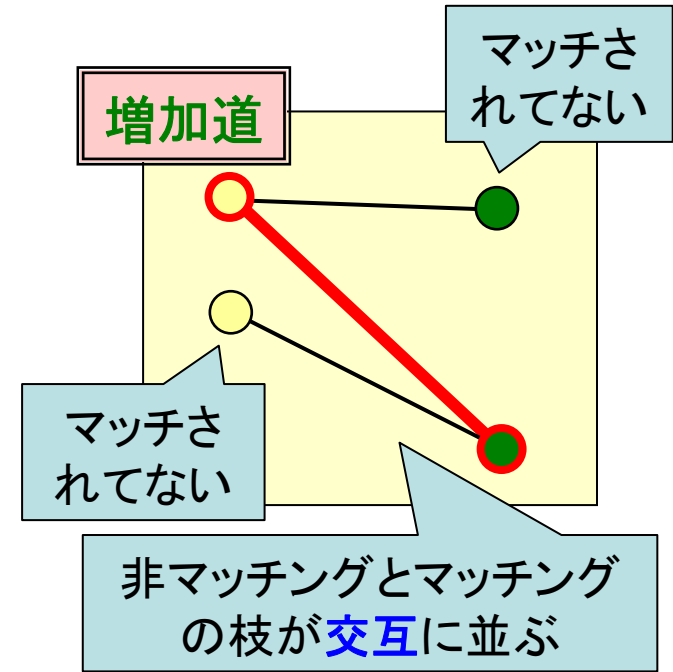
マッチングの例



注目  
マッチされていない点



マッチング数を増やせる場合



Q. 最大マッチング?

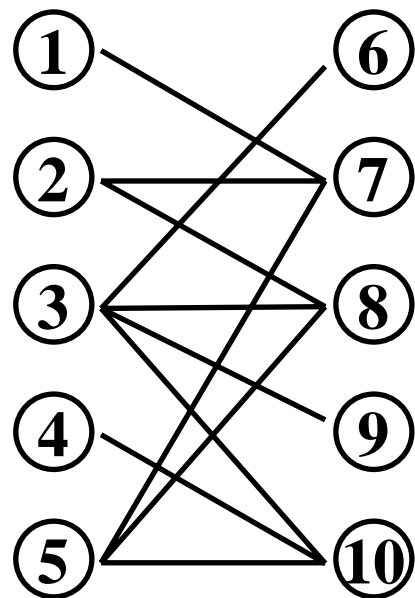


増加道を見つけて、マッチングを増やす  
増加道が無ければ、最大マッチング

→ 増加道法

# 練習 Shall we dance?

ダンスパーティーに男性・女性各5人が集まった。  
パートナーになりたい希望は以下の組合せである。



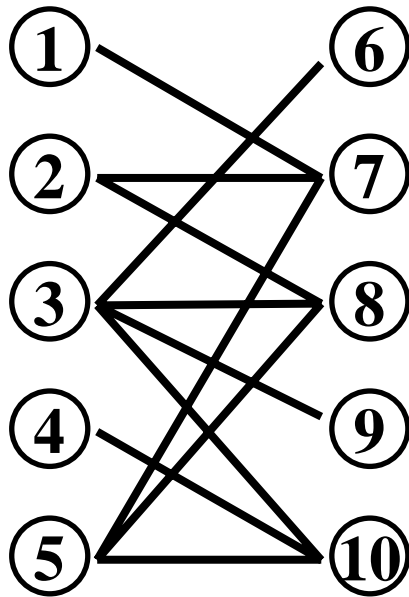
男性

女性

さて、なるべく多くのペアを組みたいが  
最大で何組できるか？その組み方は？

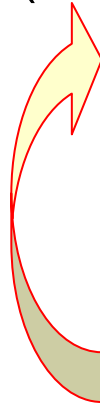


# 練習の答えの例

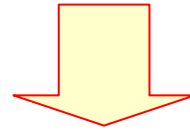


(手順1) 適当にマッチングを見つける

(手順2) マッチされていない点から  
増加道を探す

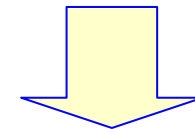


増加道があった



マッチング変更

増加道が無い

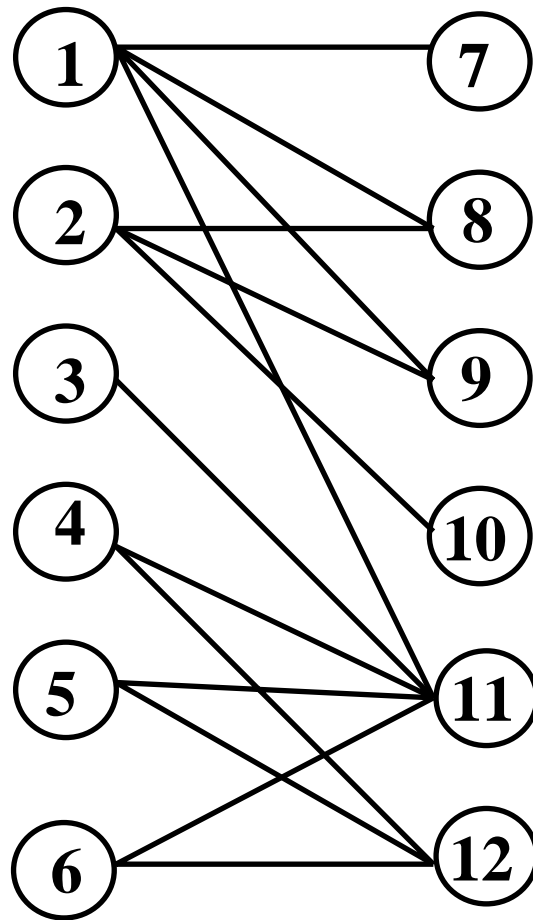


最大マッチング  
発見！

(終了)



# 演習1 最大マッチングを求めよう



# 演習2 バス会社運行係

- 6ルート of バス運行を計画中
- 各ターミナル間の回送時間は右下表の通り
- 最低何台で運行可能？

	発地	出発時間	着地	到着時間
ルート①	A	9:20	C	9:40
ルート②	B	10:00	A	10:30
ルート③	B	8:40	B	9:50
ルート④	D	8:00	B	8:30
ルート⑤	C	12:30	E	13:30
ルート⑥	E	11:10	C	12:20

## 計画バスルート

## 回送着地

	A	B	C	D	E
A	0	3	1	6	2
B	4	0	5	5	6
C	2	5	0	6	4
D	3	2	1	0	5
E	7	3	5	4	0



(単位:10分)

# 例題2 2部グラフの点被覆

誰に辞められると、誰もダンスができなくなるか？

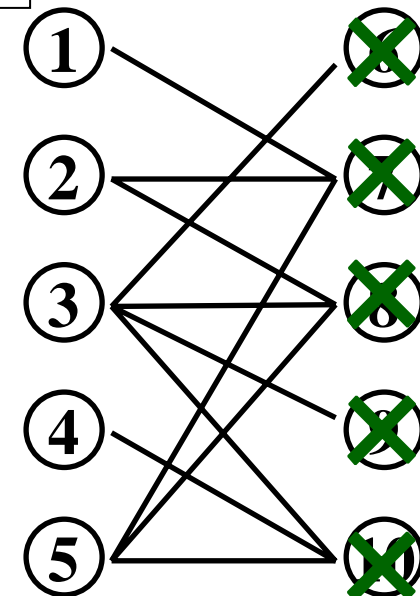
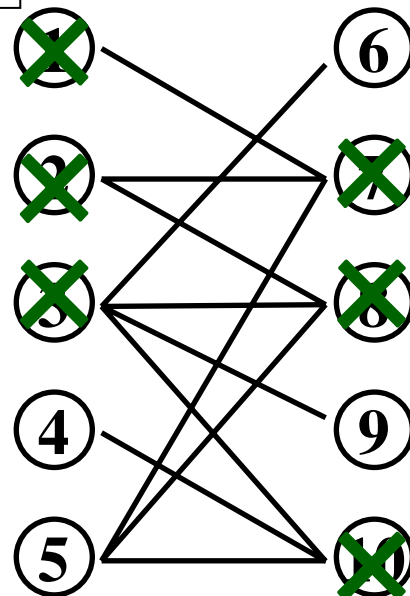
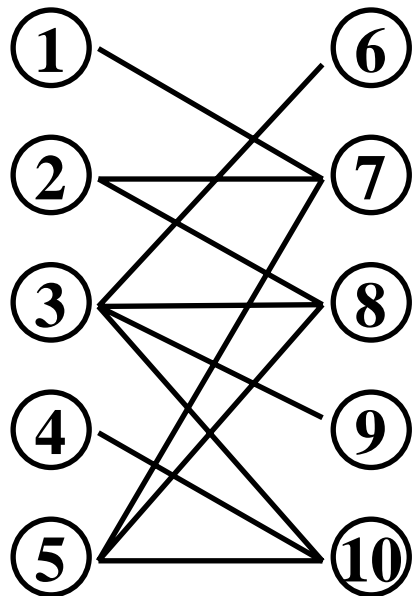
すべての枝に隣接する点の集まり  $\Leftrightarrow$   $\times$  の人(点)の集まり: 点被覆

男性

女性

例1

例2



点被覆の大きさ=6

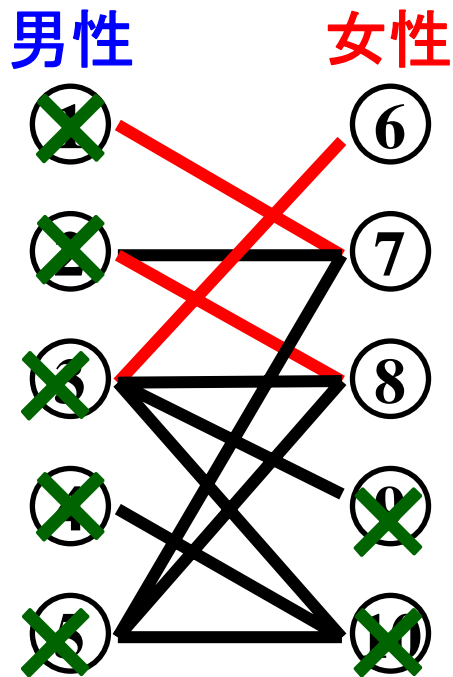
点被覆の大きさ=5

問題

大きさが一番小さな点被覆は？(最小点被覆問題)

# マッチングと点被覆

## 点被覆の簡単な見つけ方



(手順1) 適当にマッチングを見つける

(手順2) マッチされていない点

+

マッチングの一方の点

||

点被覆

示唆

$(\text{マッチングの大きさ}) \leq (\text{点被覆の大きさ})$

つまり,

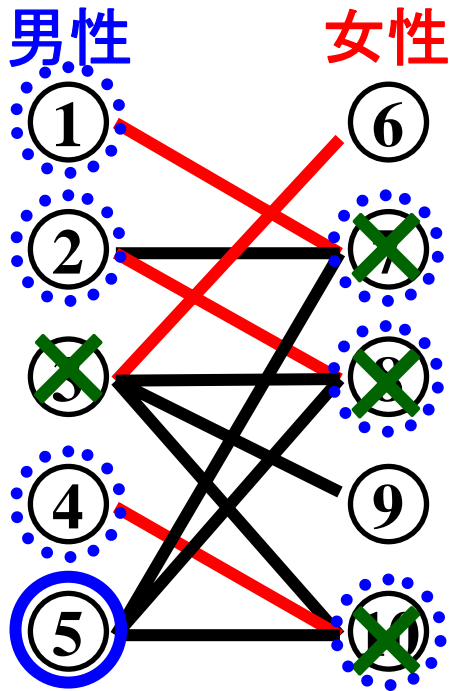
$(\text{最大マッチングの大きさ}) \leq (\text{最小点被覆の大きさ})$

# 最大マッチングと最小点被覆

(準備) 最大マッチングを見つける

## 最大マッチング

(手順1) 左側でマッチされていない点  $\bigcirc$  から  
交互道で到達できる点  $\dots$  を見つける



観察1  $\rightarrow$  点  $\dots$ , 点  $\bigcirc$  だけに限定すると  
右側の点は, 点被覆

観察2  $\rightarrow$  残った点だけに限定すると,  
左側の点は, 点被覆

$\Rightarrow$  最大マッチングの大きさと同じ  
点被覆を見つけた

(最大マッチングの大きさ)  $\leq$  (最小点被覆の大きさ) より

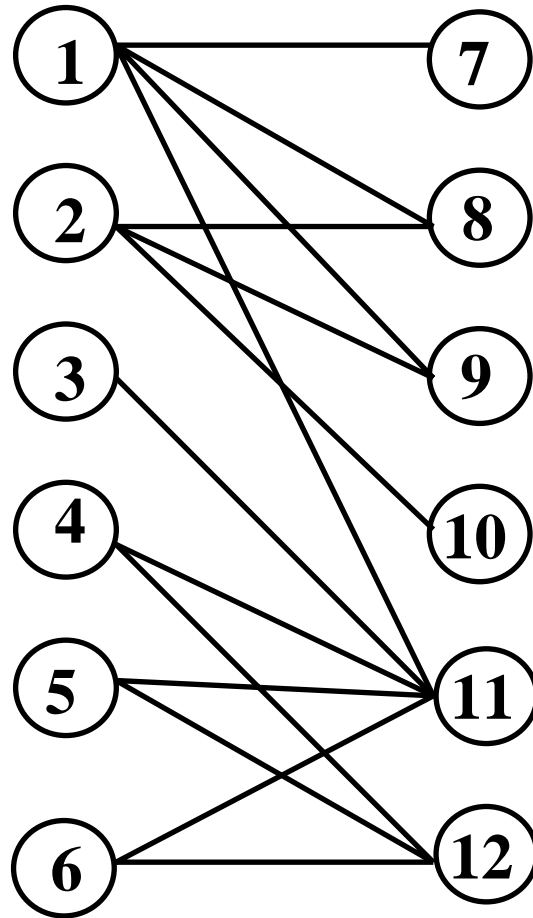
$\rightarrow$  2部グラフでは

(最大マッチングの大きさ) = (最小点被覆の大きさ)

$\times$  は最小点被覆

König-Egerváryの定理

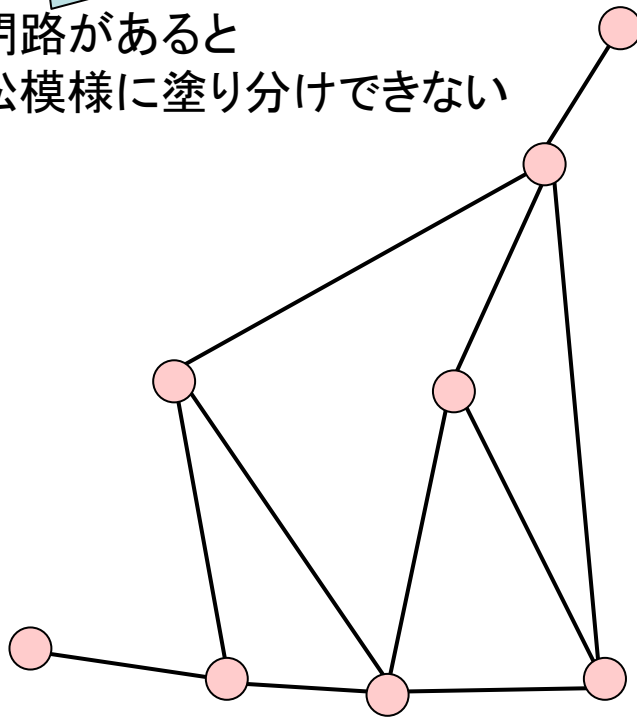
# 演習3 最小点被覆を求めよう



# 発展 2部グラフでない場合のマッチング

2部グラフではない

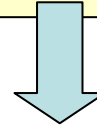
奇閉路があると  
市松模様に塗り分けできない



困った, 困った

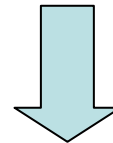
1965年

奇閉路を見つけたら  
一時的に一点にみなせば  
何とかなるんじゃない?



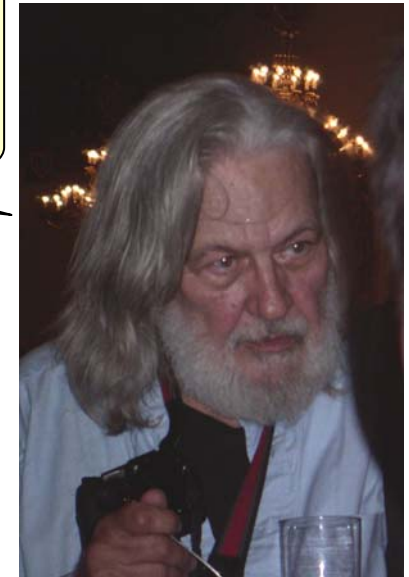
## 花アルゴリズム

最小重み最大マッチングを  
見つけることも可能



詳しくは  
もっと勉強するのじゃ

Edmons博士



組合せ最適化問題に  
大きな影響を与える

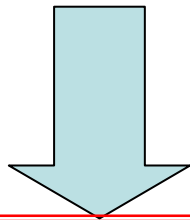
# ここまでのまとめ

奇閉路が無いグラフ

- **最大マッチング**を求める
  - 市松模様で色分け可能(**2部グラフ**)の場合
  - 一般グラフの場合

花アルゴリズム

増加道法



次は枝に**重み**のある場合の話題

- **割当問題** 誰にどの仕事を割り当てる?
- **配属問題** ゼミの配属を決めよう
- **安定結婚問題** 不満を抑えるマッチング



# 例題3 仕事の割当

5つの支社へ一人ずつの人員補強を計画。  
希望任地と、その任地への赴任費用は下表のとおり。

	支社①	支社②	支社③	支社④	支社⑤
Aさん	25	30			
Bさん	20		70	35	
Cさん	80	75	90	65	
Dさん				55	40
Eさん				60	50

空白は希望  
しない支社

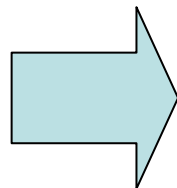
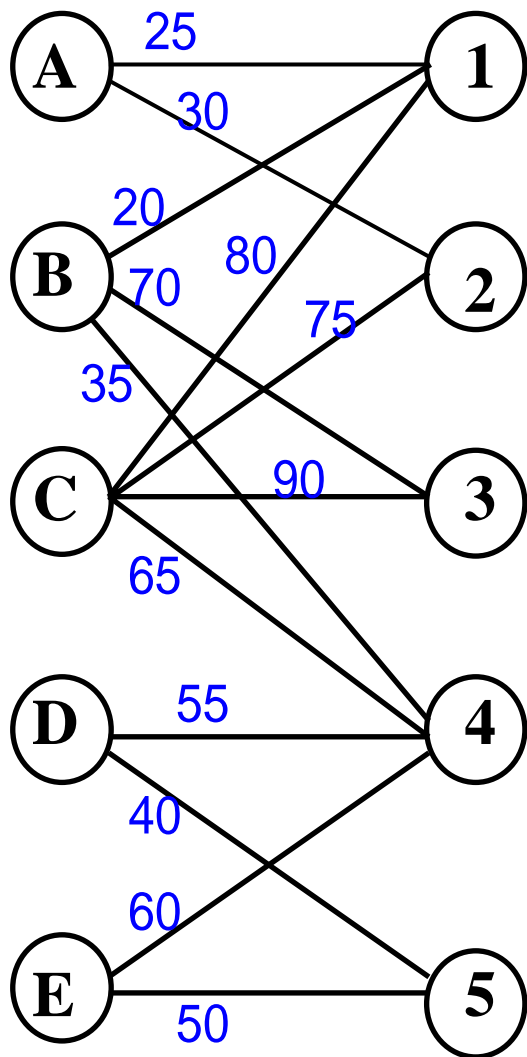


さて、誰をどの支社に配属すれば最も費用が安く済む？

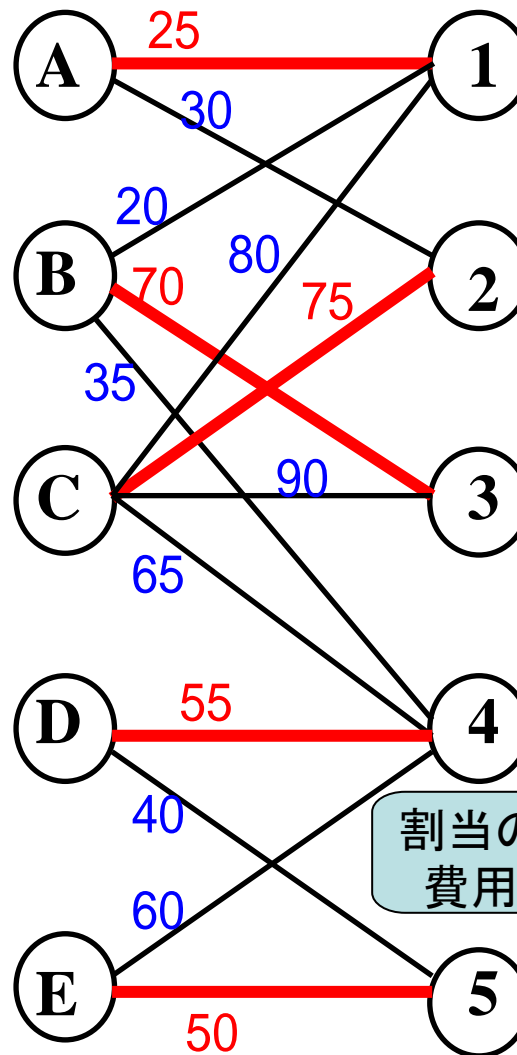
関連問題：5人を各支社に割り当てることはできるか？

## 問題の図示

# 割当の総費用



適当に割当



25  
+  
70  
+  
75  
+  
55  
+  
50  
||

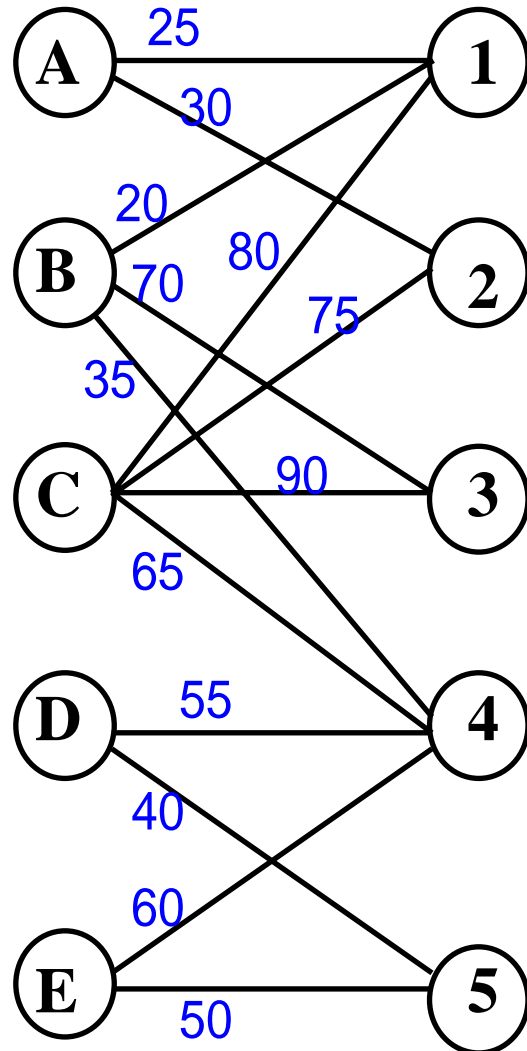
275

割当の  
費用

割当問題

費用が最小になる割当は?

# 練習 最適割当を求めよう



# 最適割当を求める方法

解法はいくつも提案

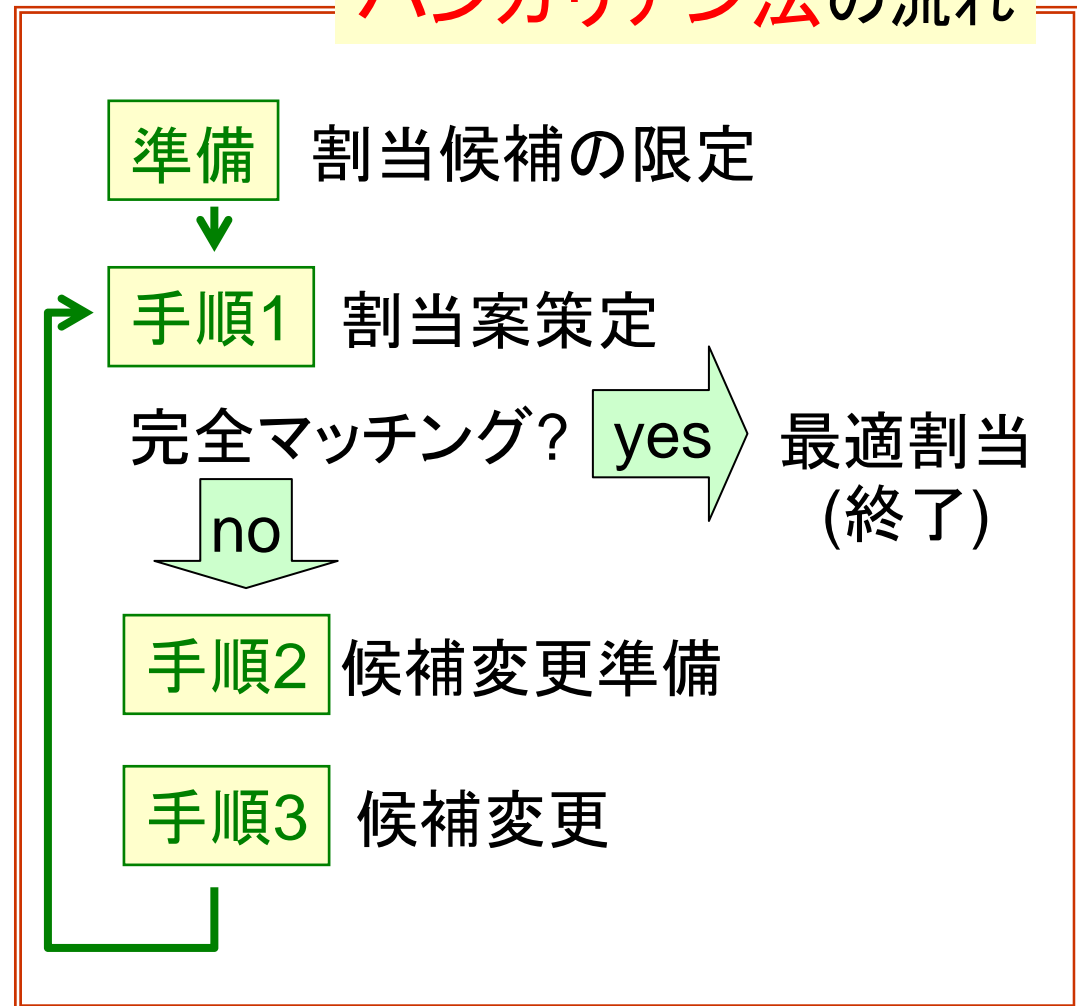
紹介

- オークション法
- ハンガリアン法
- 最小費用流問題

必要なもの: 表

	①	②	③	④	⑤
A	25	30			
B	20		70	35	
C	80	75	90	65	
D				55	40
E				60	50

ハンガリアン法の流れ



# 準備 割当候補の限定

①行毎に最小数字を発見

	①	②	③	④	⑤
A	25	30			
B	20		70	35	
C	80	75	90	65	
D				55	40
E				60	50

②行毎に最小数字を引く

	①	②	③	④	⑤
A	0	5			
B	0		50	15	
C	15	10	25	0	
D				15	0
E				10	0

③列毎に最小数字を発見

	①	②	③	④	⑤
A	0	5			
B	0		50	15	
C	15	10	25	0	
D				15	0
E				10	0

④列毎に最小数字を引く

	①	②	③	④	⑤
A	0	0			
B	0		25	15	
C	15	5	0	0	
D				15	0
E				10	0

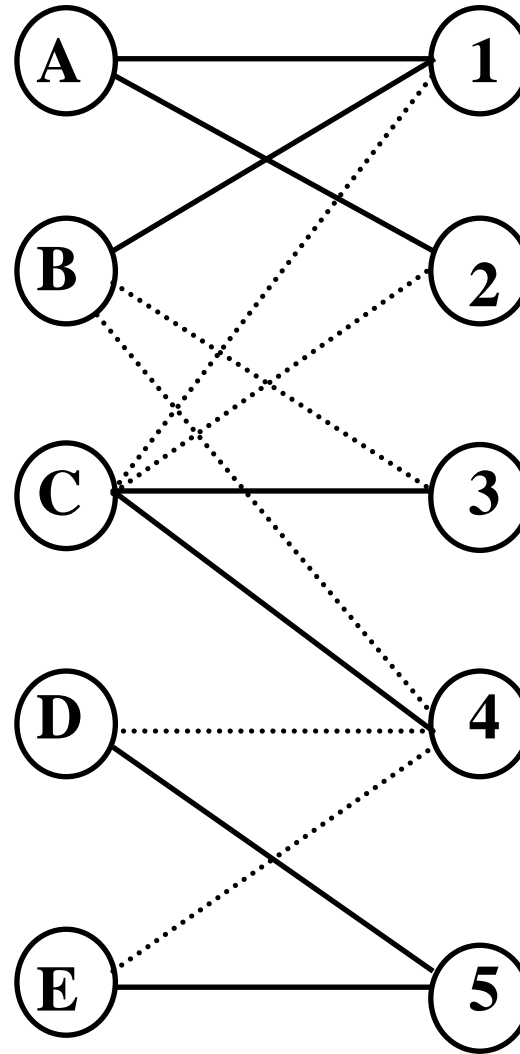
準備完了

# 手順1 割当案の作成

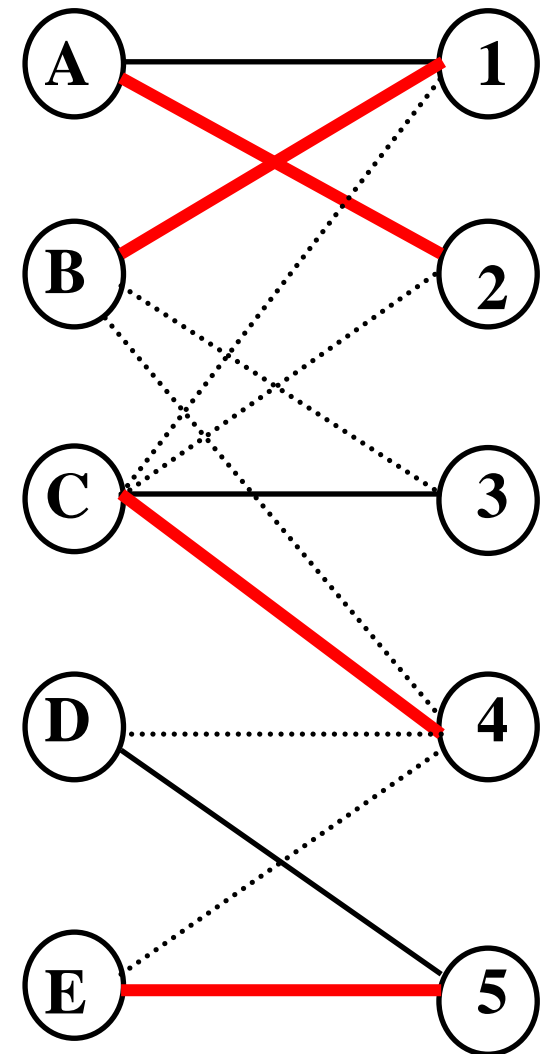
「0」部分だけで  
最大マッチングを求める

	①	②	③	④	⑤
A	0	0			
B	0		25	15	
C	15	5	0	0	
D				15	0
E				10	0

	①	②	③	④	⑤
A	0	0			
B	0		25	15	
C	15	5	0	0	
D				15	0
E				10	0



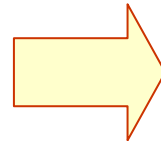
「0」部分のみ抽出



最大マッチング

## 手順2 割当候補の変更準備

	①	②	③	④	⑤
A	0	0			
B	0		25	15	
C	15	5	0	0	
D				15	0
E				10	0



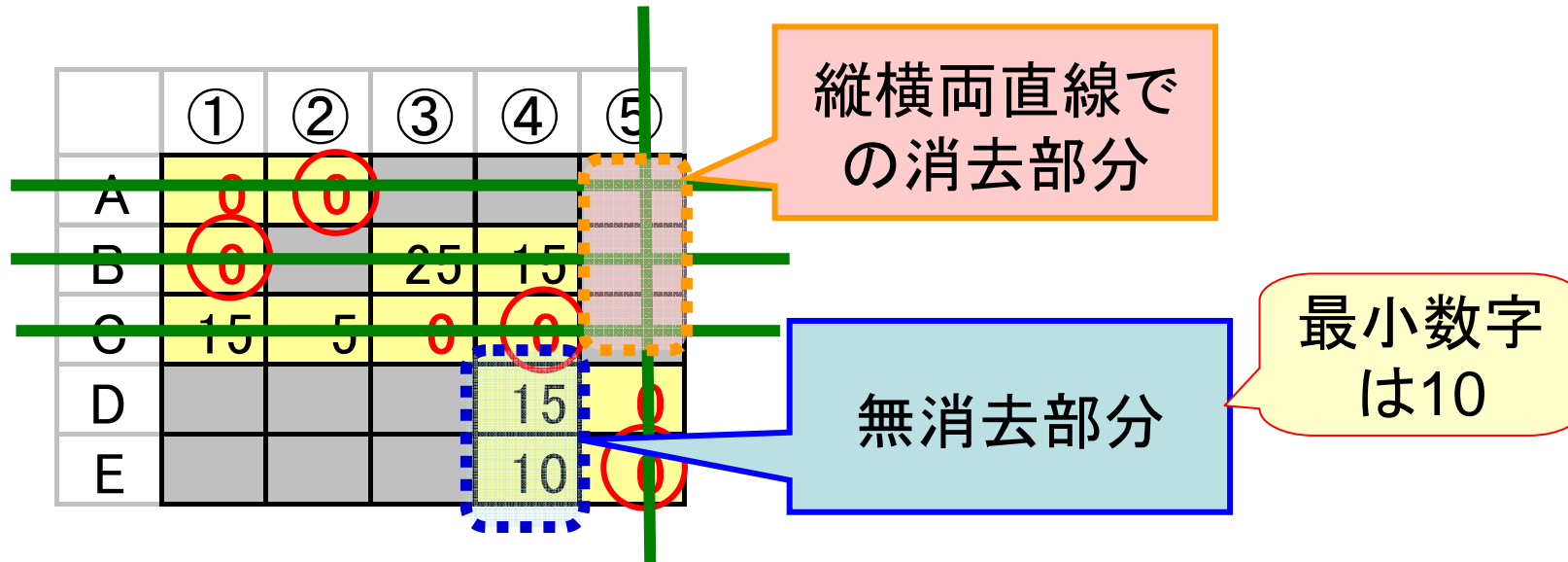
	①	②	③	④	⑤
A	0	0			
B	0		25	15	
C	15	5	0	0	
D				15	0
E				10	0

準備完了

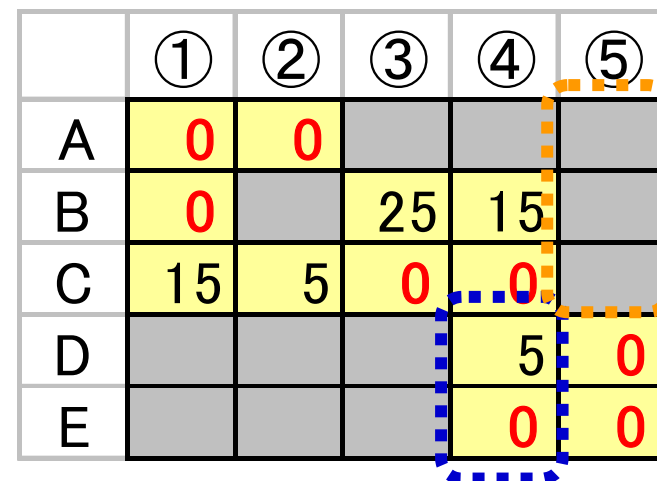
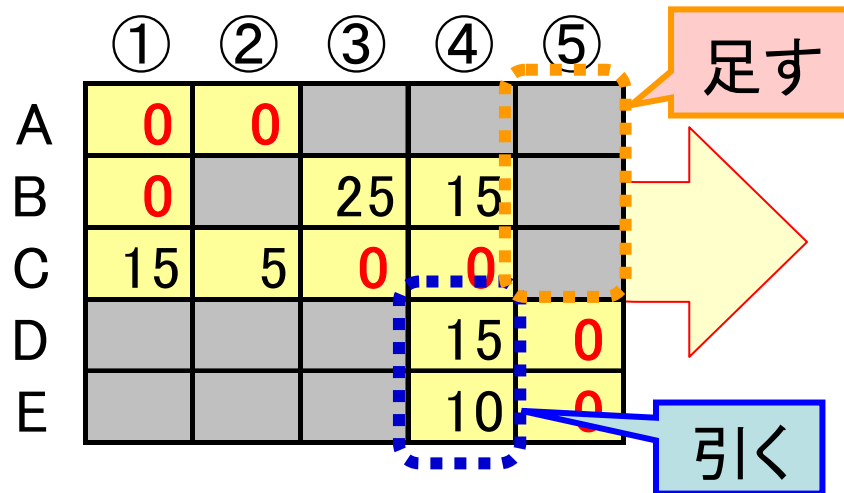
○部分から縦か横に直線を引き、  
すべての「0」を線で消す

※線の引き方は複数通り存在  
どれでも良い

# 手順3 割当候補の変更



無消去部分の最小数字を



手順1へ戻る

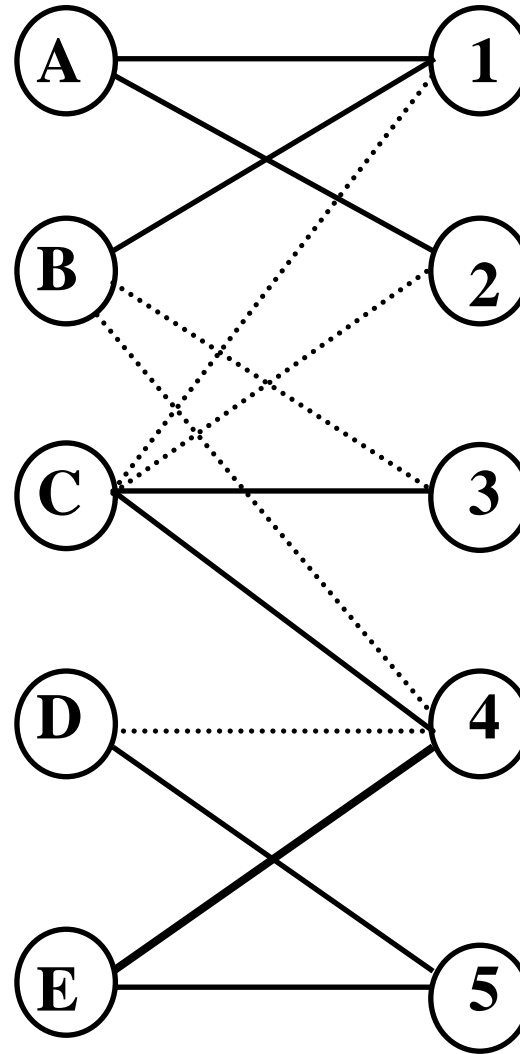


# 手順1 割当案の作成

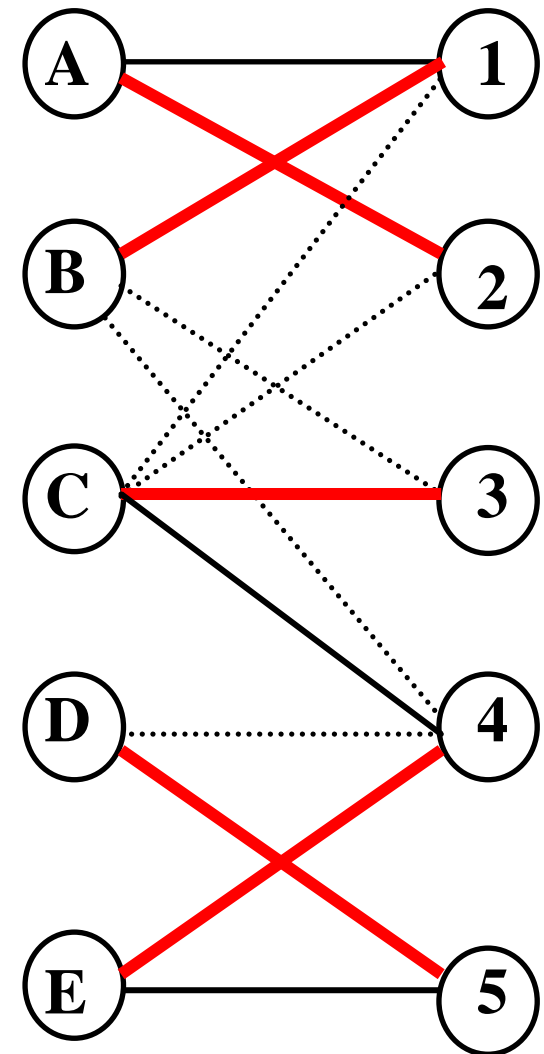
「0」部分だけで  
最大マッチングを求める

	①	②	③	④	⑤
A	0	0			
B	0		25	15	
C	15	5	0	0	
D				5	0
E				0	0

	①	②	③	④	⑤
A	0	0			
B	0		25	15	
C	15	5	0	0	
D				5	0
E				0	0



「0」部分のみ抽出



完全マッチング

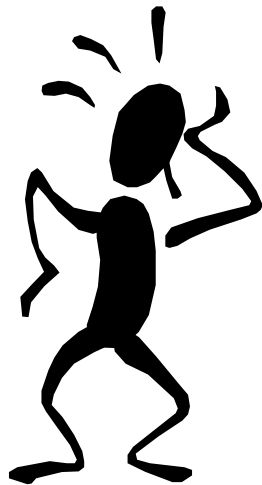
# 最適割当の導出

得られた割当

	①	②	③	④	⑤
A	0	0			
B	0		25	15	
C	15	5	0	0	
D				5	0
E				0	0

総コストが最小な割当  
(最適割当)

	①	②	③	④	⑤
A	25	30			
B	20		70	35	
C	80	75	90	65	
D				55	40
E				60	50



どうして発見で  
きたのだろう？

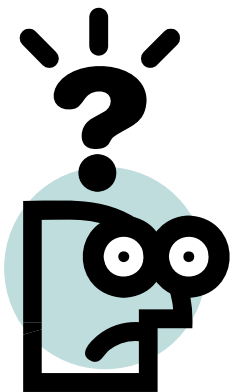
$$20+30+90+60+40=240$$

# 演習4

資格の必要な4つの仕事のために4人採用した。  
保有資格のランクが異なり、仕事により給料が変わる。  
人件費を最小にするには誰にどの仕事を割当ててる？

	仕事①	仕事②	仕事③	仕事④
Aさん	45	無資格	無資格	30
Bさん	50	55	15	無資格
Cさん	無資格	60	25	75
Dさん	45	無資格	無資格	35

(単位:万円)



# 演習5

ある課の課長は、5人の部下A～Eと5つの異なる仕事を持って  
いるが、これらの仕事は、その仕事を行なう部下との組合せで  
必要とする時間が異なってくる。今、5つの仕事をP～Tとしたと  
き、A～Eが各仕事に必要とする時間数は表のとおりである。部  
下1人に1つの仕事を割り当て、全体で要する時間を最小にす  
る時、時間の合計はいくらか。(国家I種、平成9年度改題)

仕事に必要とする時間					
	P	Q	R	S	T
A	5	5	8	5	5
B	4	5	9	7	11
C	4	4	6	6	11
D	4	3	11	8	11
E	2	3	4	6	9



# ここまでのまとめ

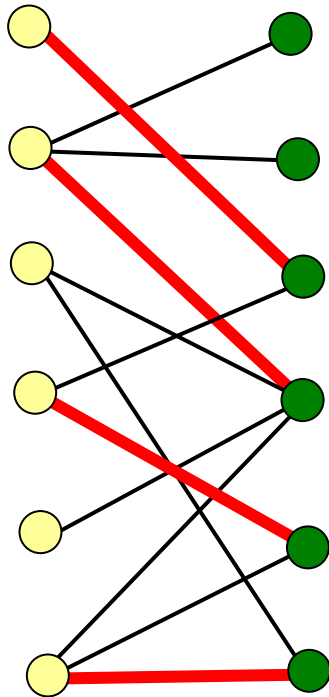
- 最大マッチングを求める
  - 市松模様で色分け可能(2部グラフ)の場合
  - 一般グラフの場合

ハンガリアン法

- 割当問題 誰にどの仕事を割り当てる?
- 配属問題 ゼミの配属を決めよう
- 安定結婚問題 不満を抑えるマッチング

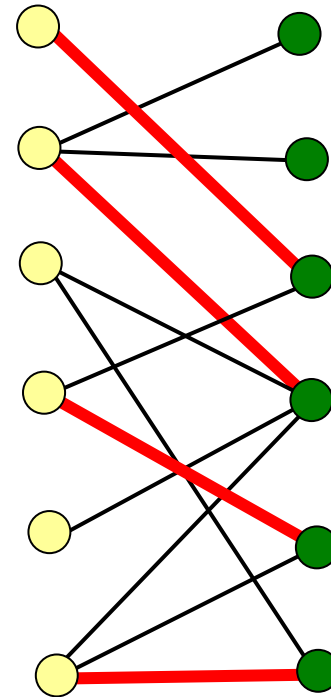
# 寄り道 増加道の見つけ方

奥を優先して探索



→ 奥優先探索法  
Depth first search

幅を優先して探索

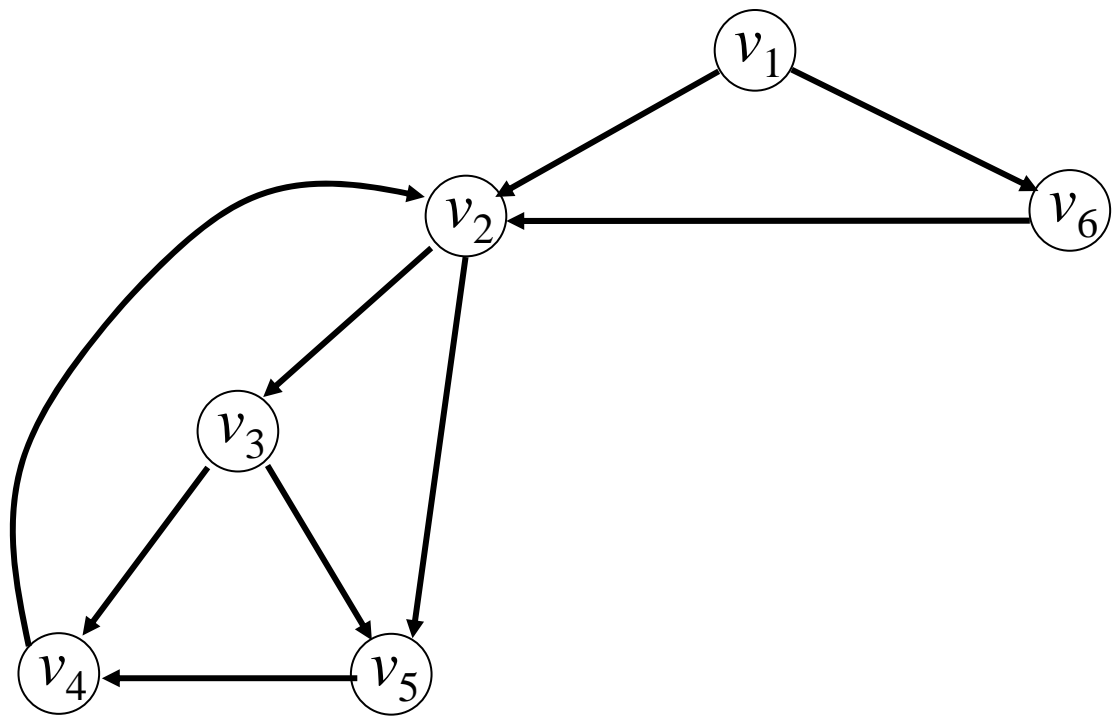


→ 幅優先探索法  
Width first search

より一般的に捉えると...

# グラフの探索

グラフ上のすべての点と枝を走査すること



# 効率の良いグラフの探索方法

## 奥優先探索

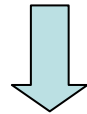
Depth-first search

## 幅優先探索

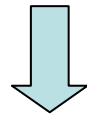
Breadth-first search

Step1: 出発点にラベル付ける

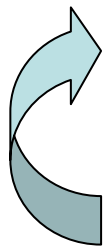
以下のStep2, 3を未探索枝がなくなるまで繰り返す。



Step2: 最新ラベルを持つ点  
から未探索枝を走査



Step3: 枝の終点にラベルが無いならラベルを付け



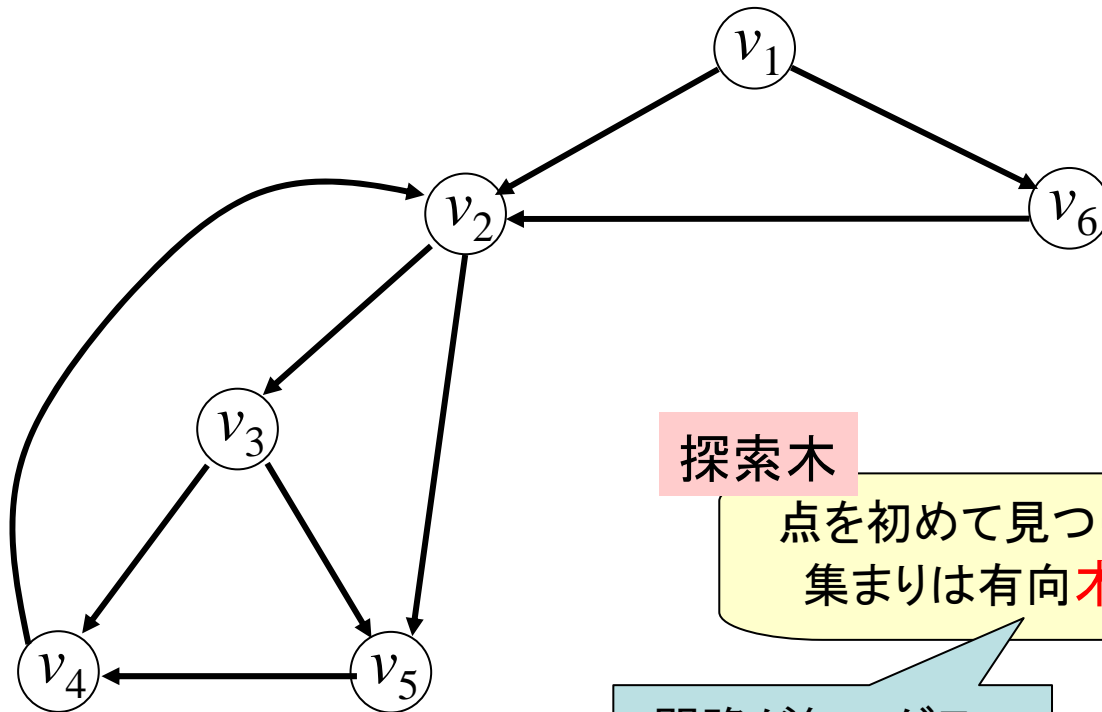
Step2: 最古ラベルを持つ点  
から未探索枝を走査





# 例1 奥優先探索を試みよう

出発点:  $v_1$



探索木

点を初めて見つけた枝の  
集まりは有向木になる

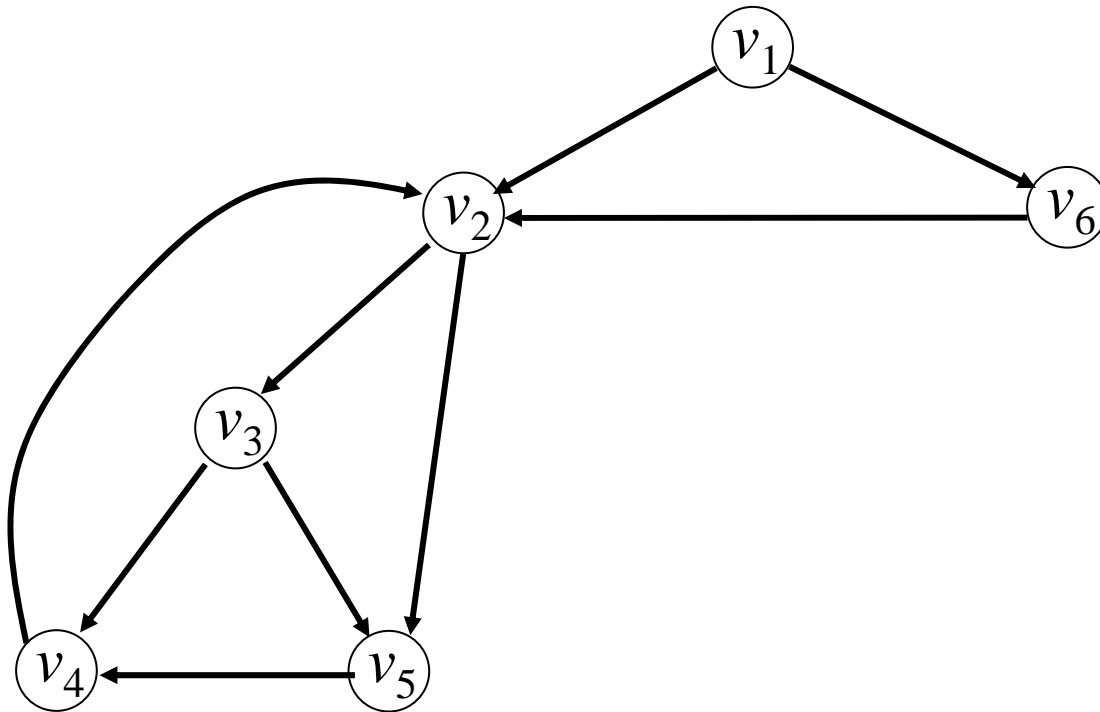
閉路が無いグラフ

探索木は有益な情報を  
提供することが多い



# 例2 幅優先探索を試みよう

出発点:  $v_1$



探索木は?

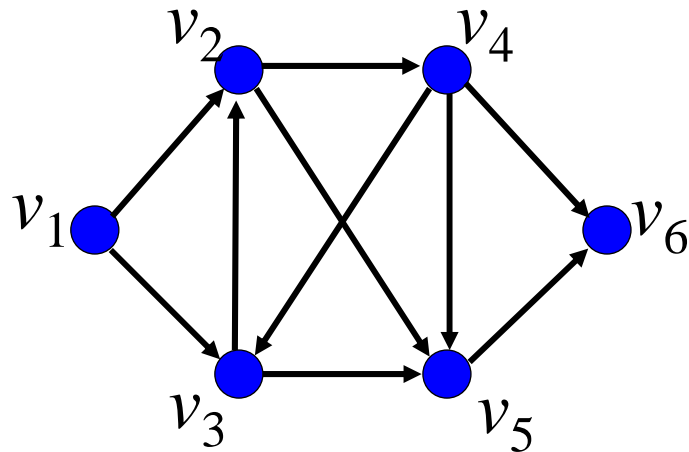
# 探索木利用 点への順序付け

- **前順**(先行順 : pre order)
  - ラベルと同時に番号付け
- **後順**(後行順 : post order)
  - 親の点に戻るときに番号付け



他にも  
中間順 (in order)  
幅優先順 (breadth-first order)  
などがある

# 演習6 グラフの探索



出発点:  $v_1$ として右のグラフを以下の方法で探索せよ.

- (1) 奥優先探索
- (2) 幅優先探索

また, 各々の探索木を示せ.

(3) 奥優先探索での探索木を利用し, 各点に前順・後順を各々付けてみよう。