

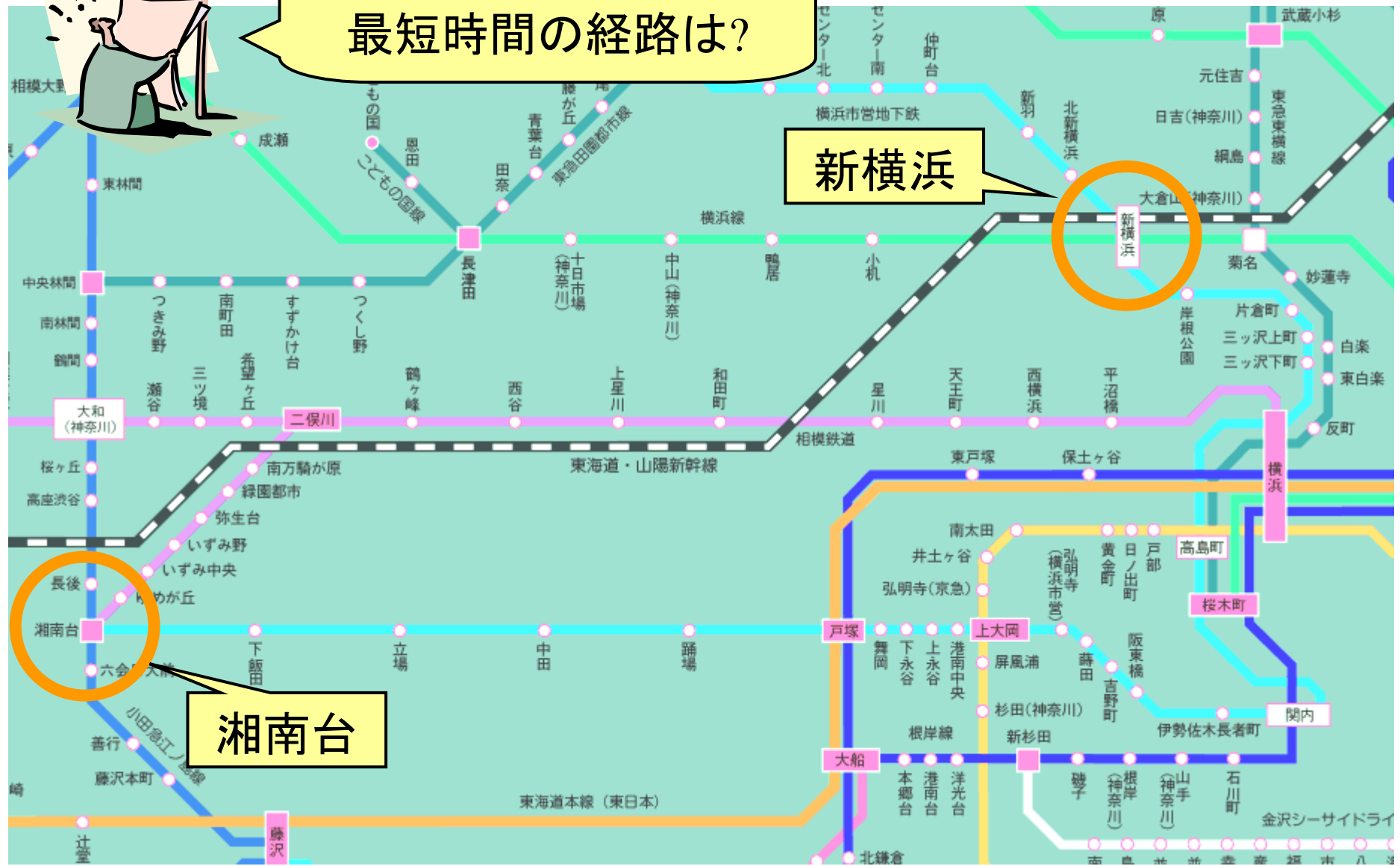
Network Programming II

Shortest path problem

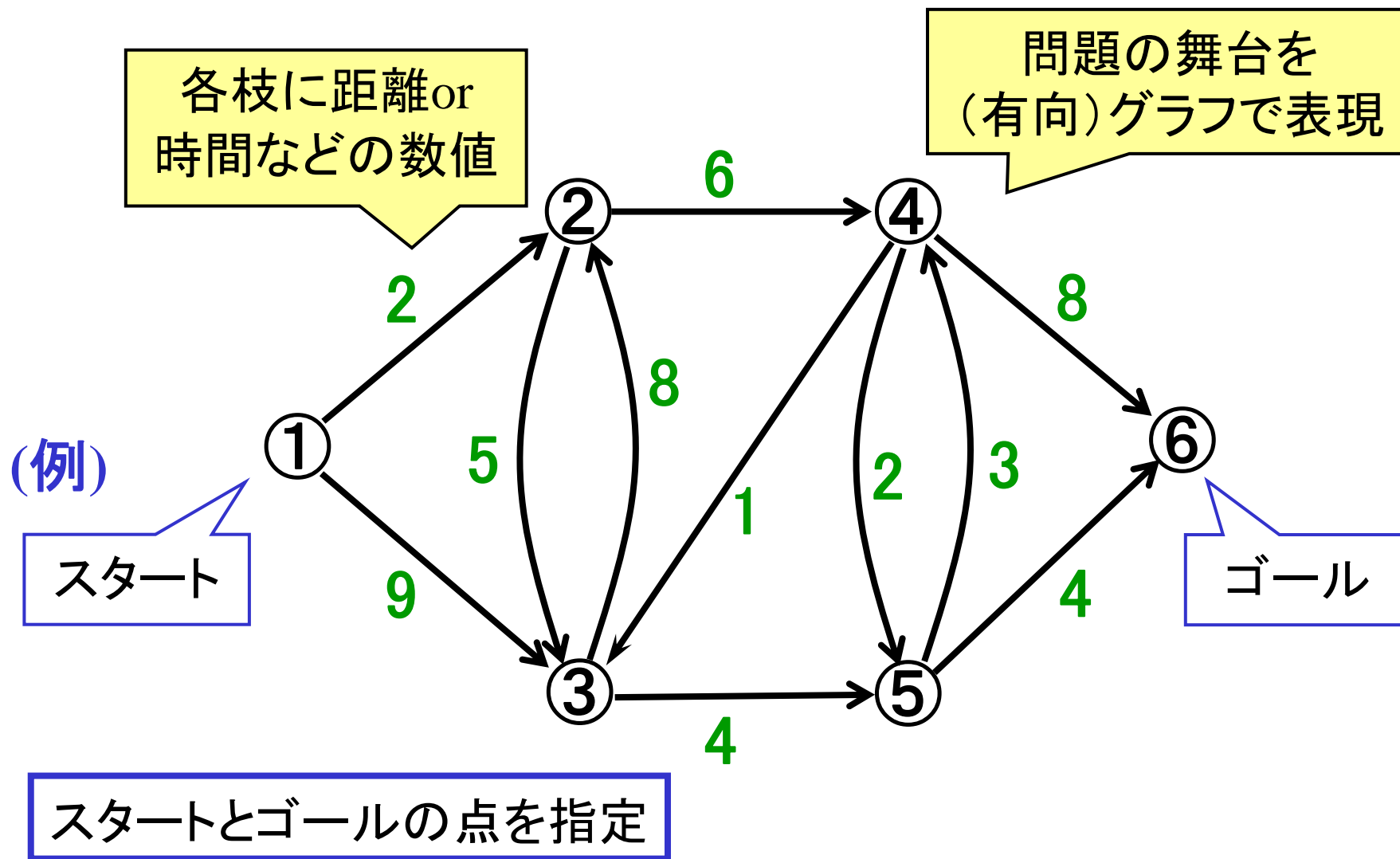
最短路を探せ!

最短路問題

最短距離の経路は?
最短時間の経路は?



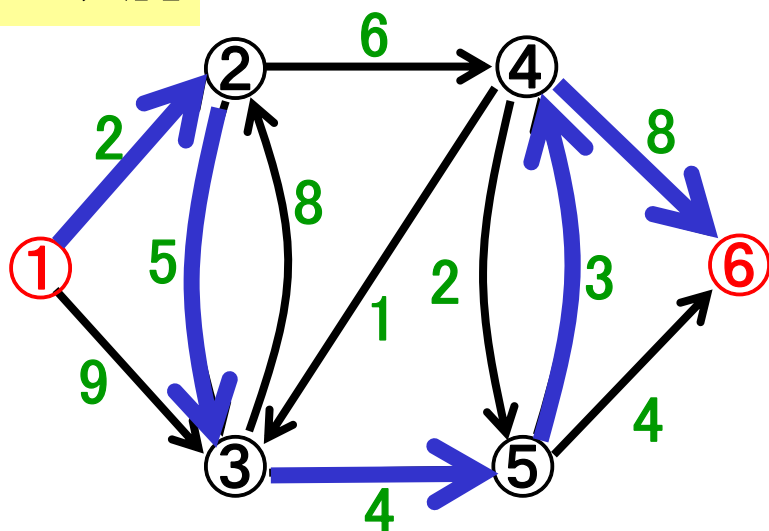
最短路問題のネットワーク表現



パス(経路)とその長さ

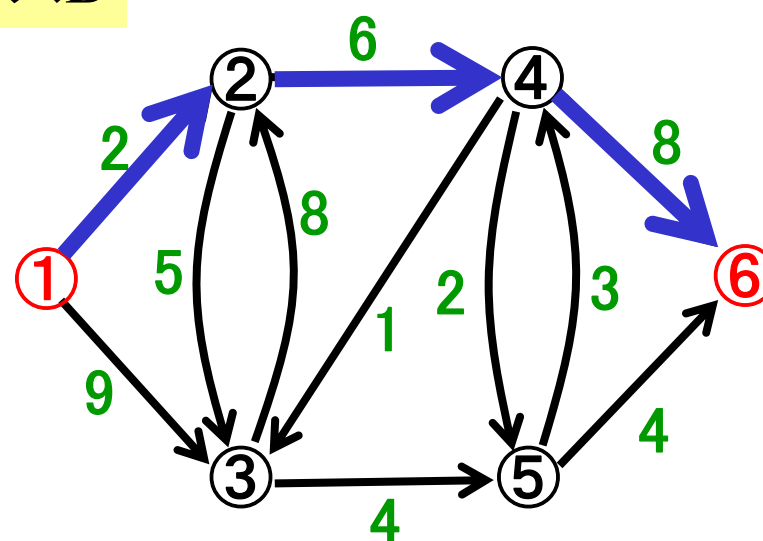
パス(経路): ある点とある点を結ぶ枝の列(向きに注意!)

パスA



パスの長さ: $2+5+4+3+8=22$

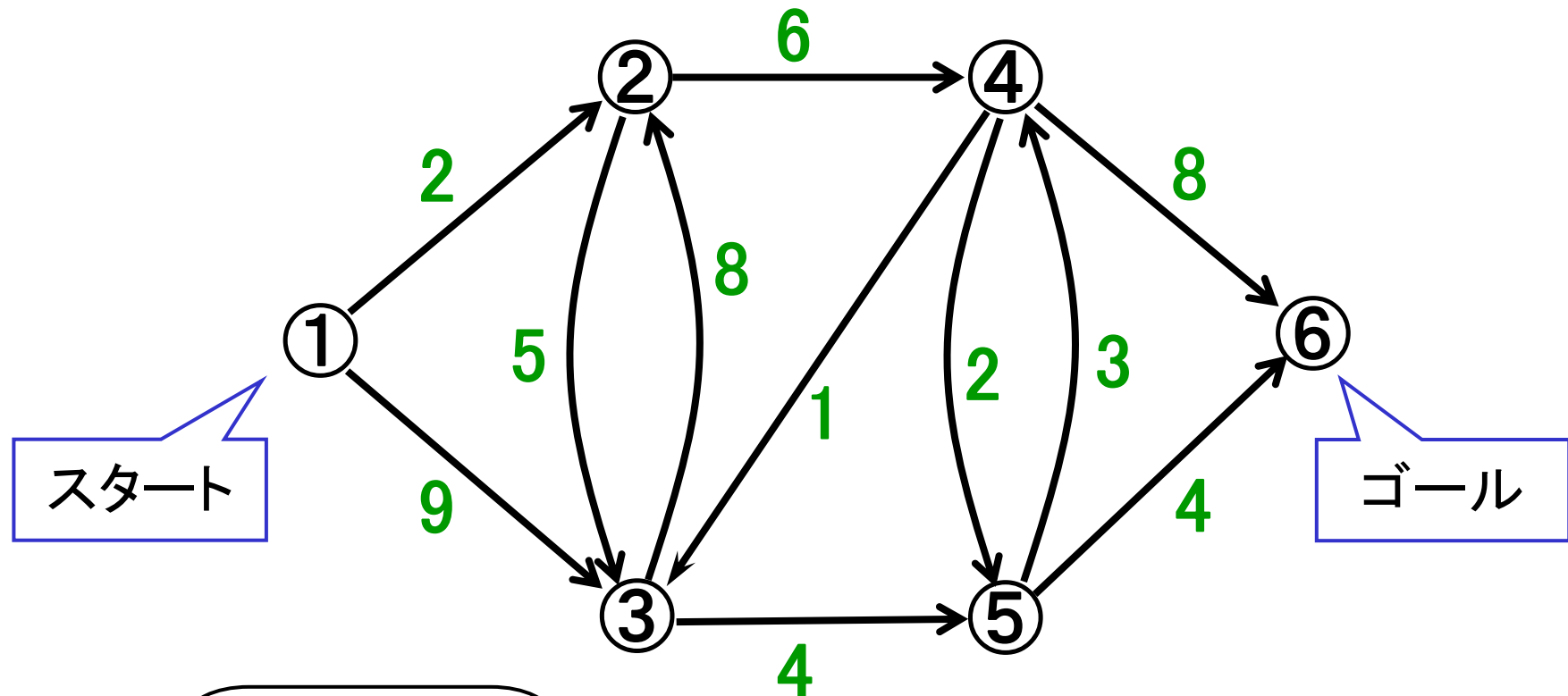
パスB



$2+6+8=16$

- スタートとゴールを結ぶパスは多数
- その中で長さが最短のパス = 最短路
- 最短路を見つける問題: 最短路問題

例題1 最短路を求めよ



スタート

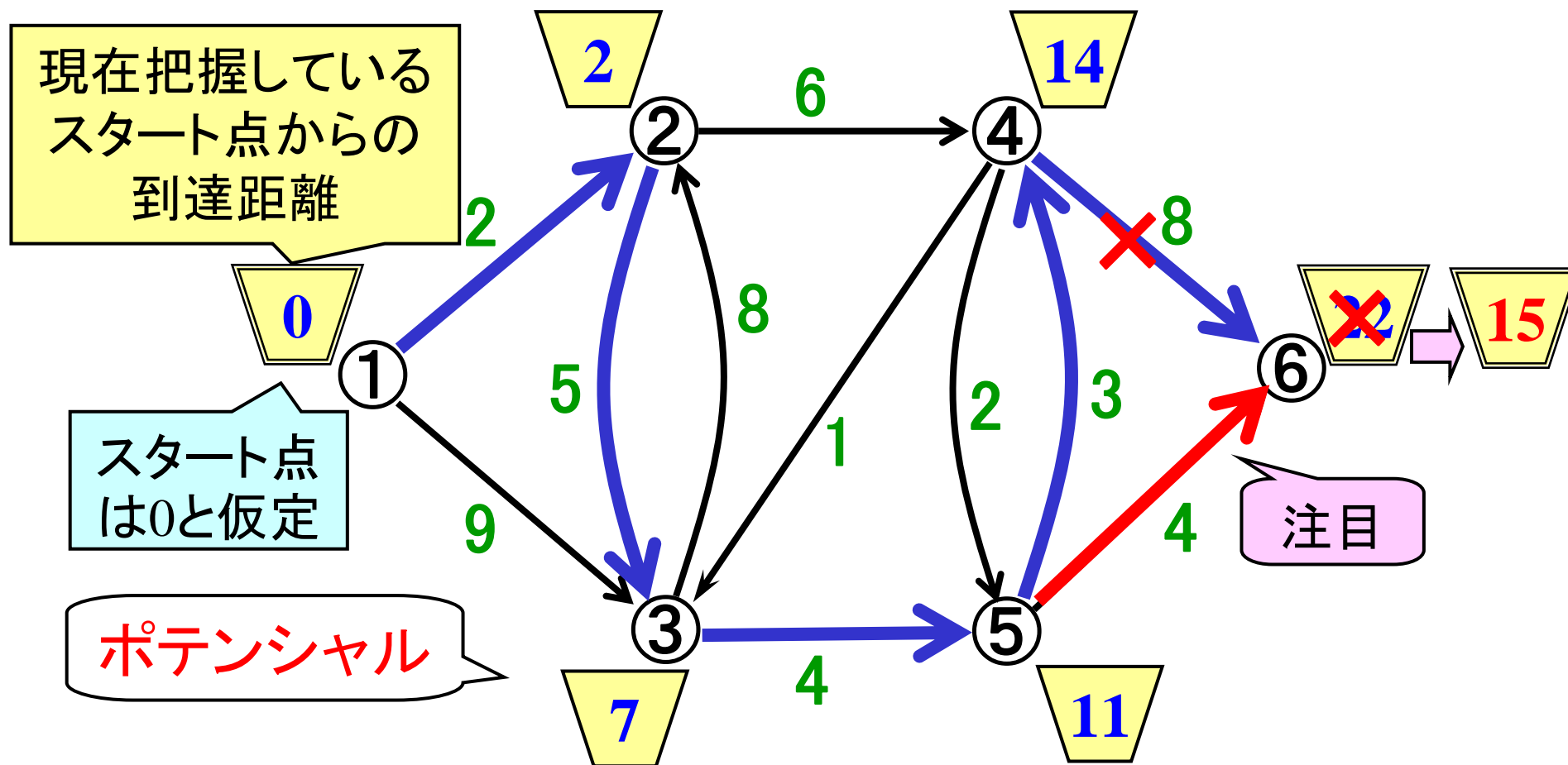
ゴール



枝の数値は
非負と仮定!

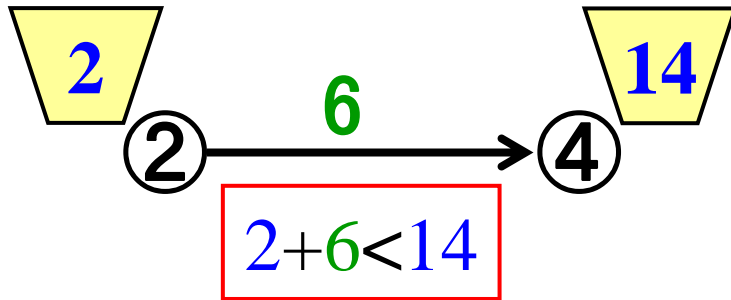
例題1(続) 最短路ではないパス

なぜ最短路ではない?



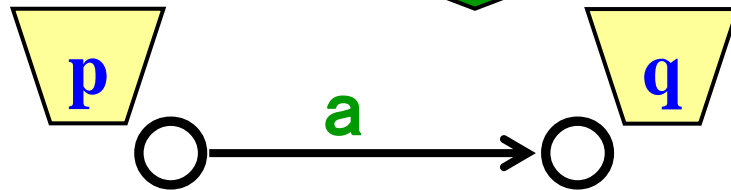
最短路を見つけた⇔ポテンシャルはどのような状況を満足している?

最短路とポテンシャル



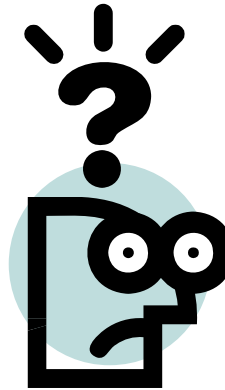
最短路を見つけていない

一般的に書くと



ある枝で $p+a < q$ が成立

最短路を見つけていない
証拠



下の性質を満たす
ポテンシャルの見
つければいいんだ。
どうやって？

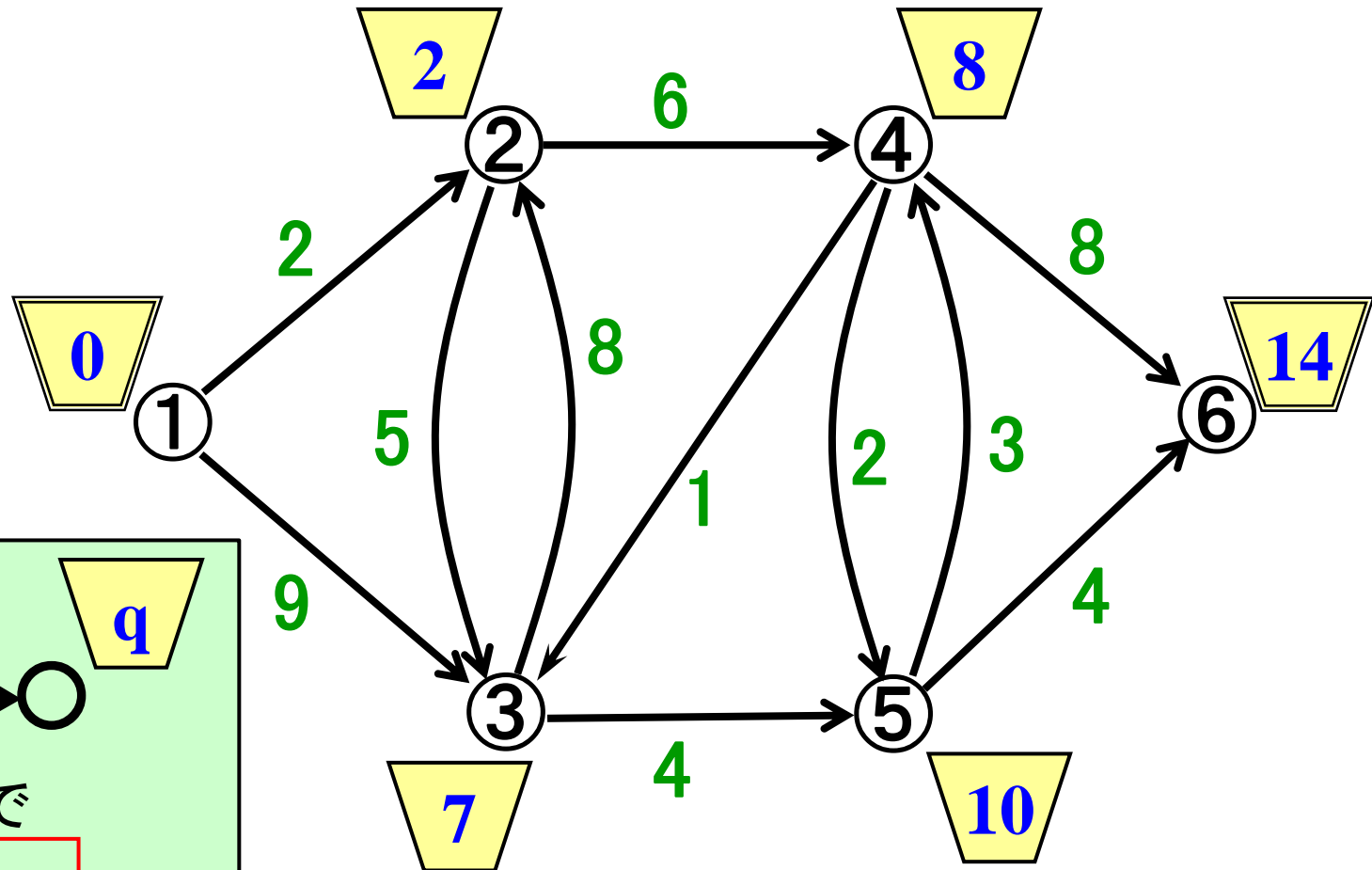
すべての枝で

$p+a \geq q$ が成立

最短路でない証拠が存在しない

最短路を見つけた！

例題1(続) 性質を満たすポテンシャルの例



すべての枝で

$$p + a \geq q$$

が成立

確認してみよう

例題1(続) 性質を満たす ポテンシャルの見つけ方(1)

準備:

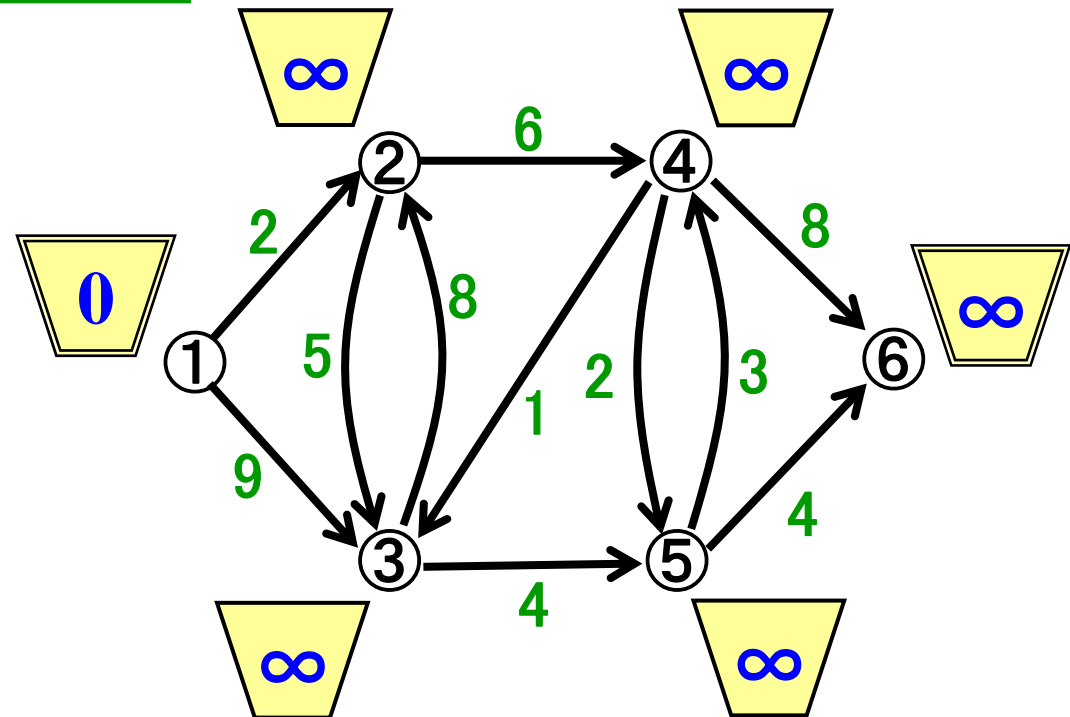
- スタートのポテンシャルを0
- 残りの点のポテンシャルは ∞
- 全点が未確定.

性質を満たすよう
ポテンシャルを順に更新



ダイクストラ法

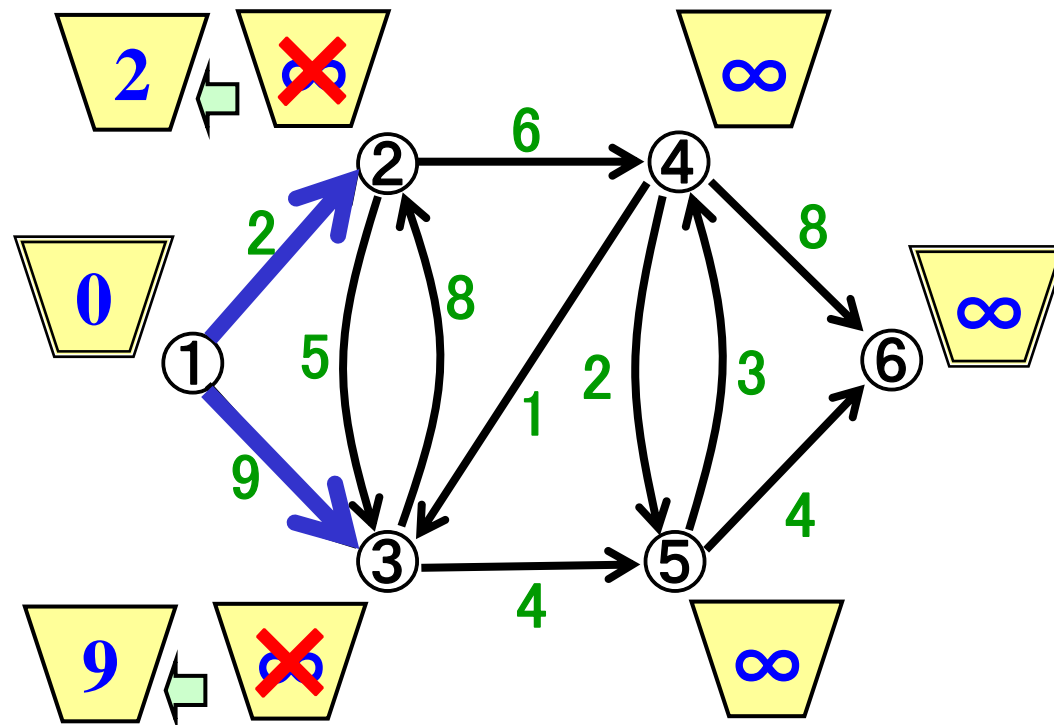
Dijkstra



例題1(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(1)

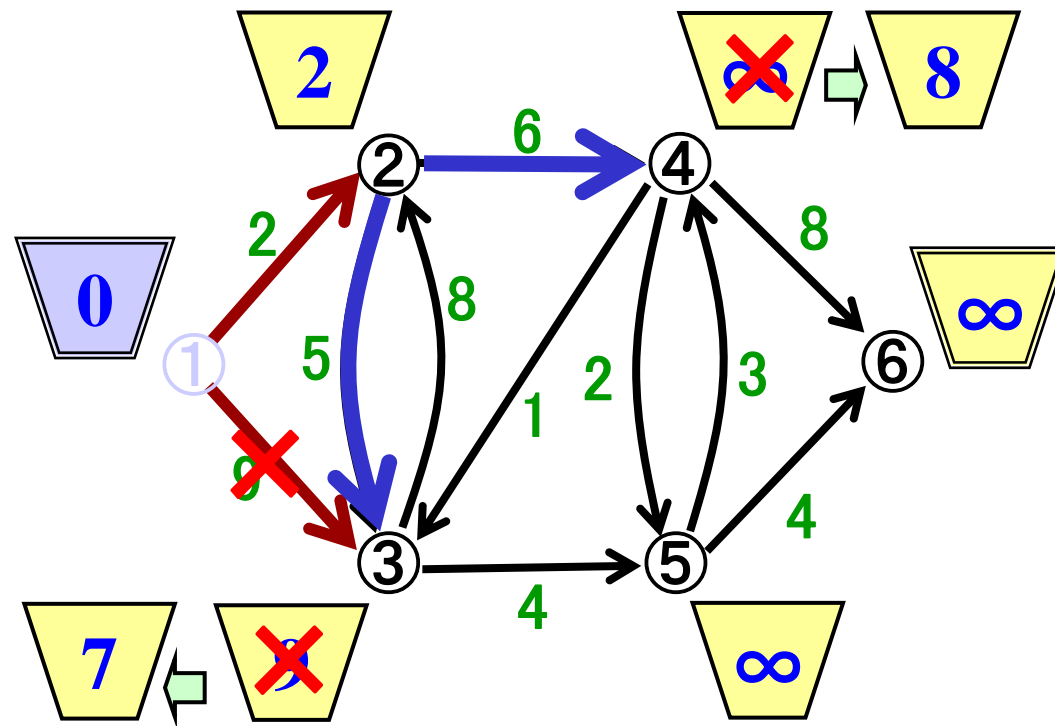
手順: 全点が確定するまで以下を繰り返す

- ① ポテンシャル最小未確定点の選択
- ② ポテンシャル更新
- ③ 点を確定



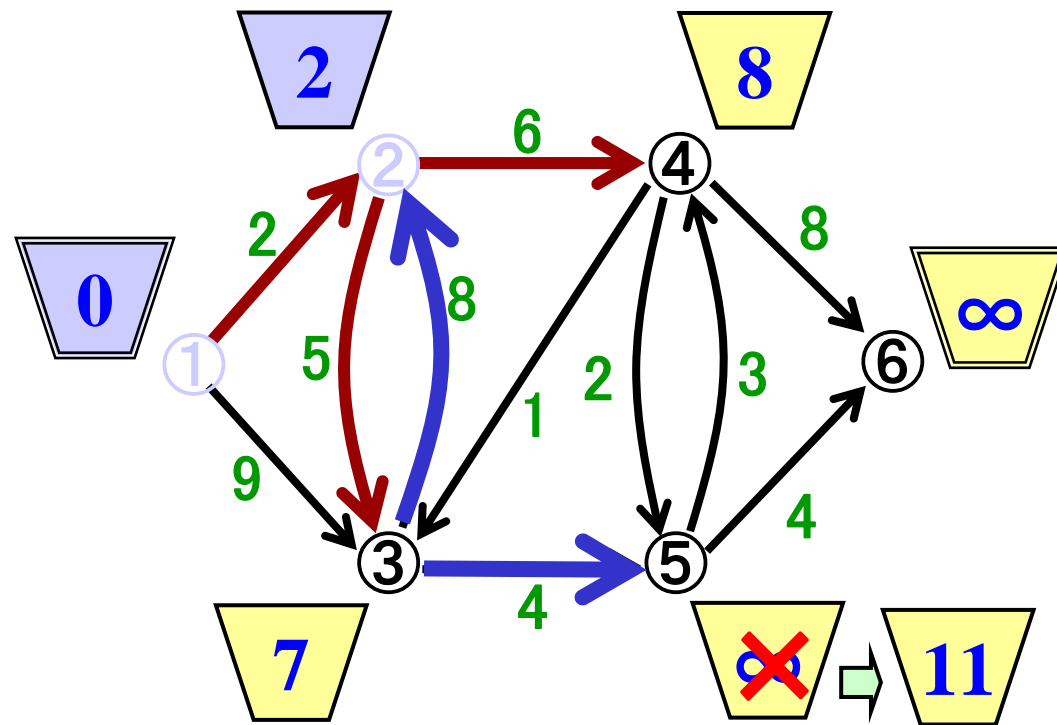
例題1(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(2)

- ① ポテンシャル最小未確定点の選択
- ② ポテンシャル更新
- ③ 点を確定



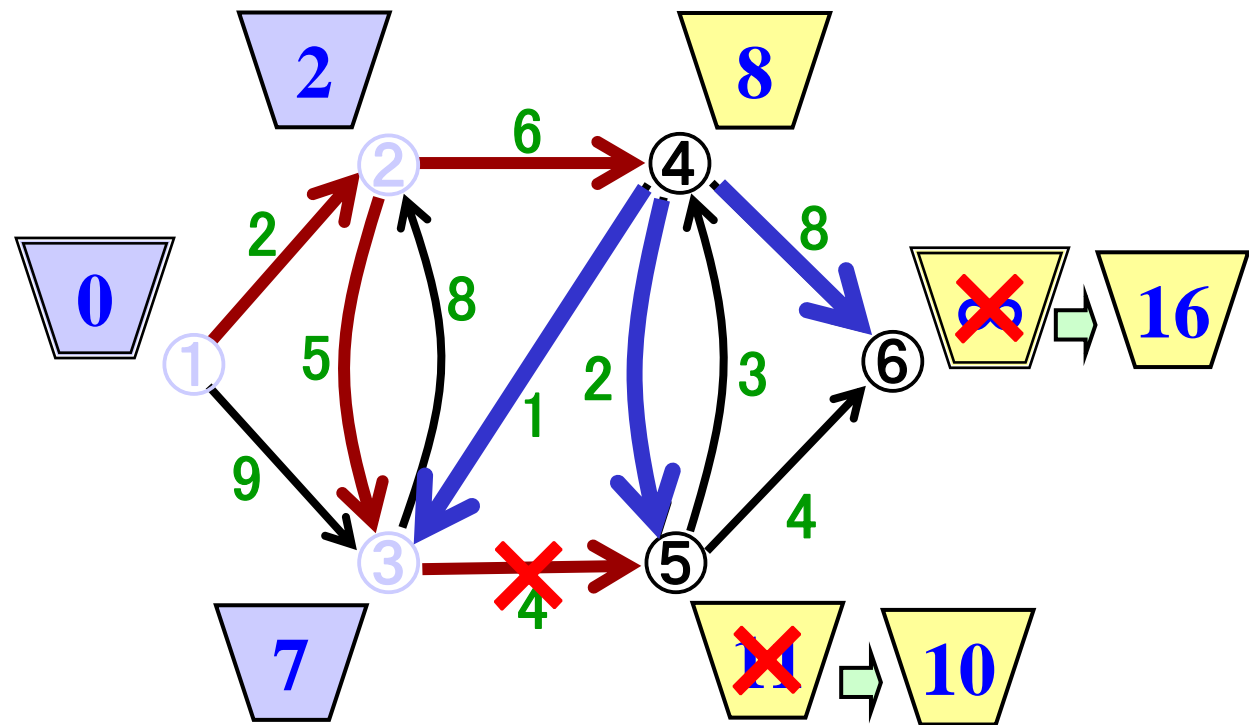
例題1(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(3)

- ① ポテンシャル最小未確定点の選択
- ② ポテンシャル更新
- ③ 点を確定



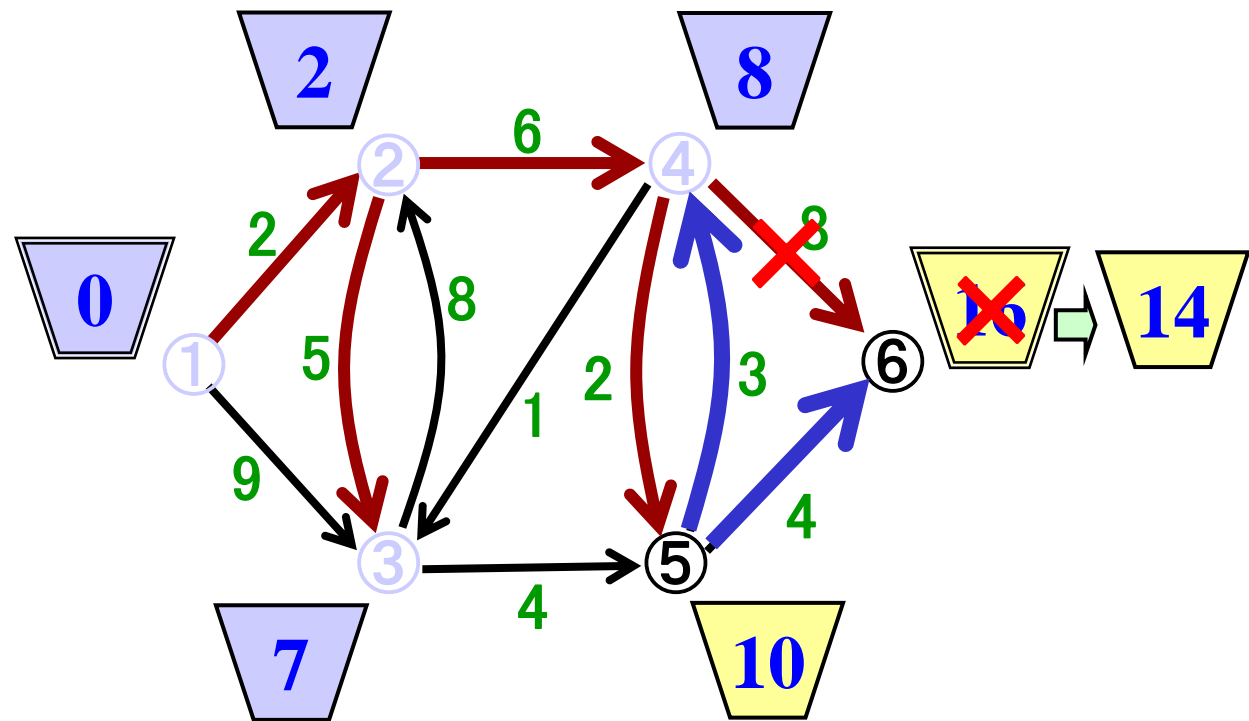
例題1(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(4)

- ① ポテンシャル最小未確定点の選択
- ② ポテンシャル更新
- ③ 点を確定



例題1(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(5)

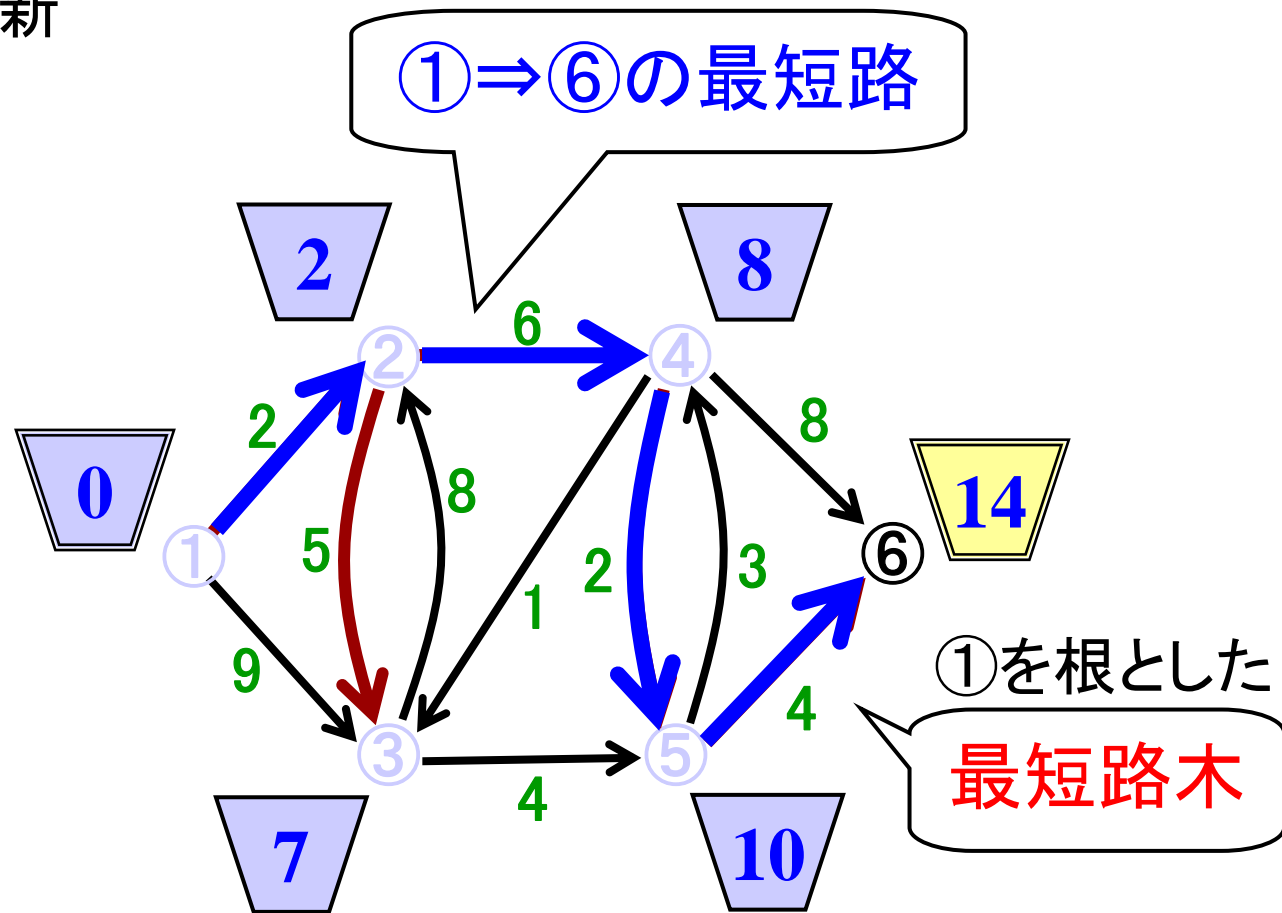
- ① ポテンシャル最小未確定点の選択
- ② ポテンシャル更新
- ③ 点を確定



例題1(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(6)

- ① ポテンシャル最小未確定点の選択
- ② ポテンシャル更新
- ③ 点を確定

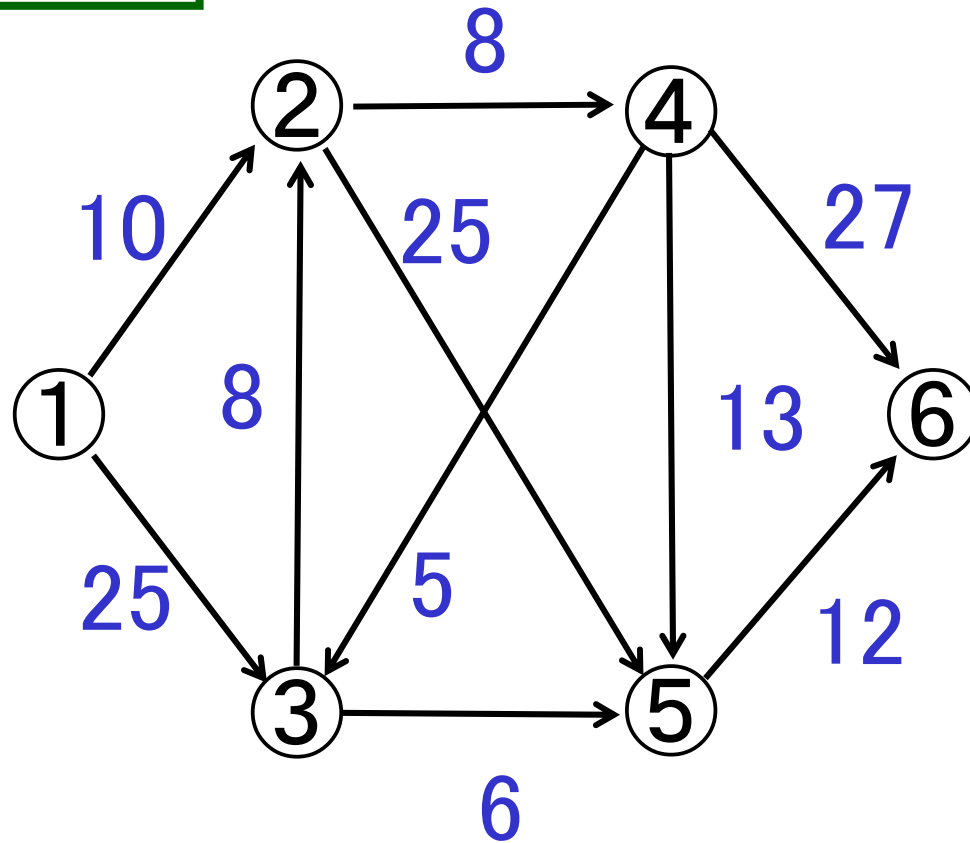
↓
全点が確定し終了



最適なポテンシャルが見つかった ⇒ 最短路も見つかった

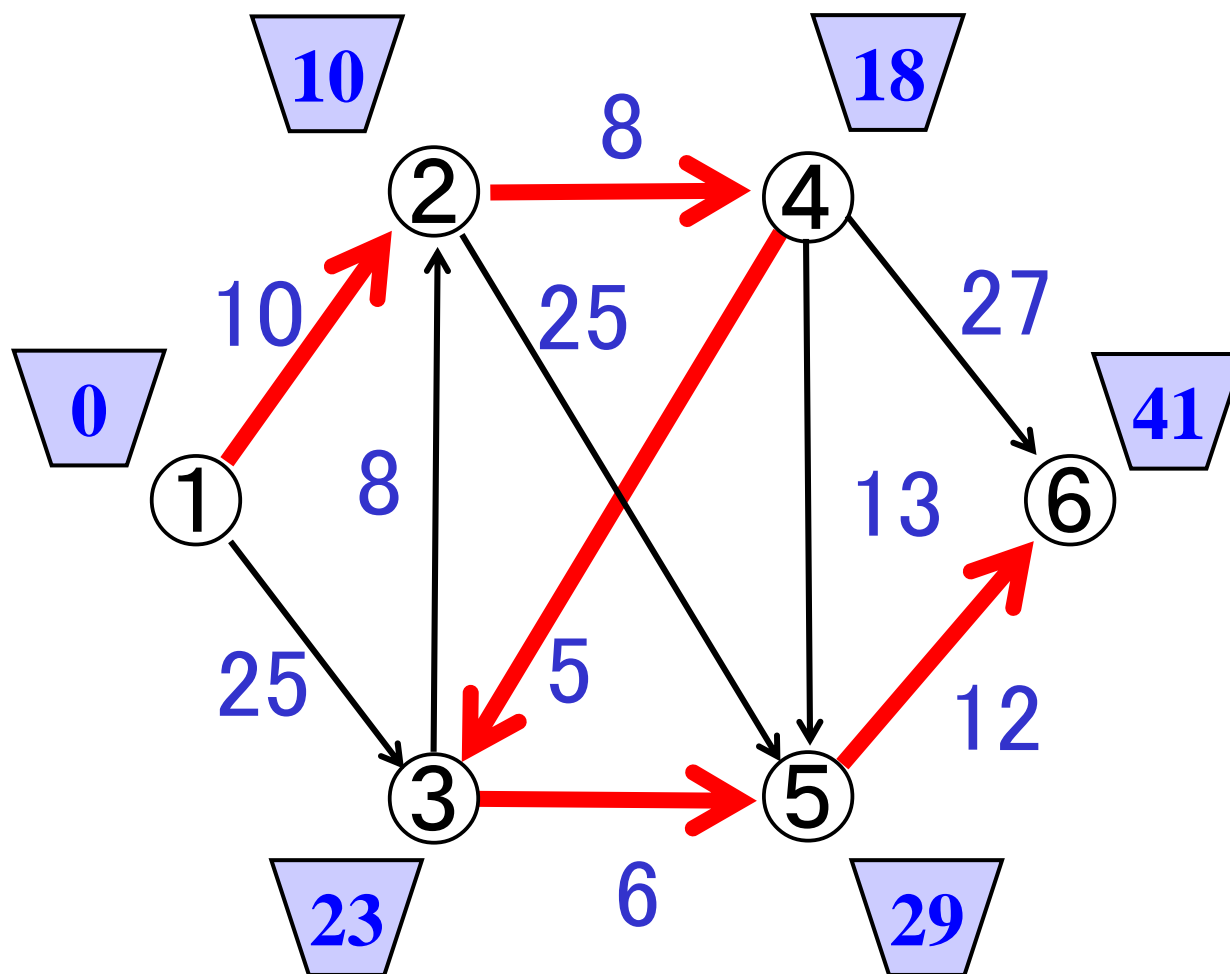
練習1 ダイクストラ法

①⇒⑥の最短路は?



練習1 解答例

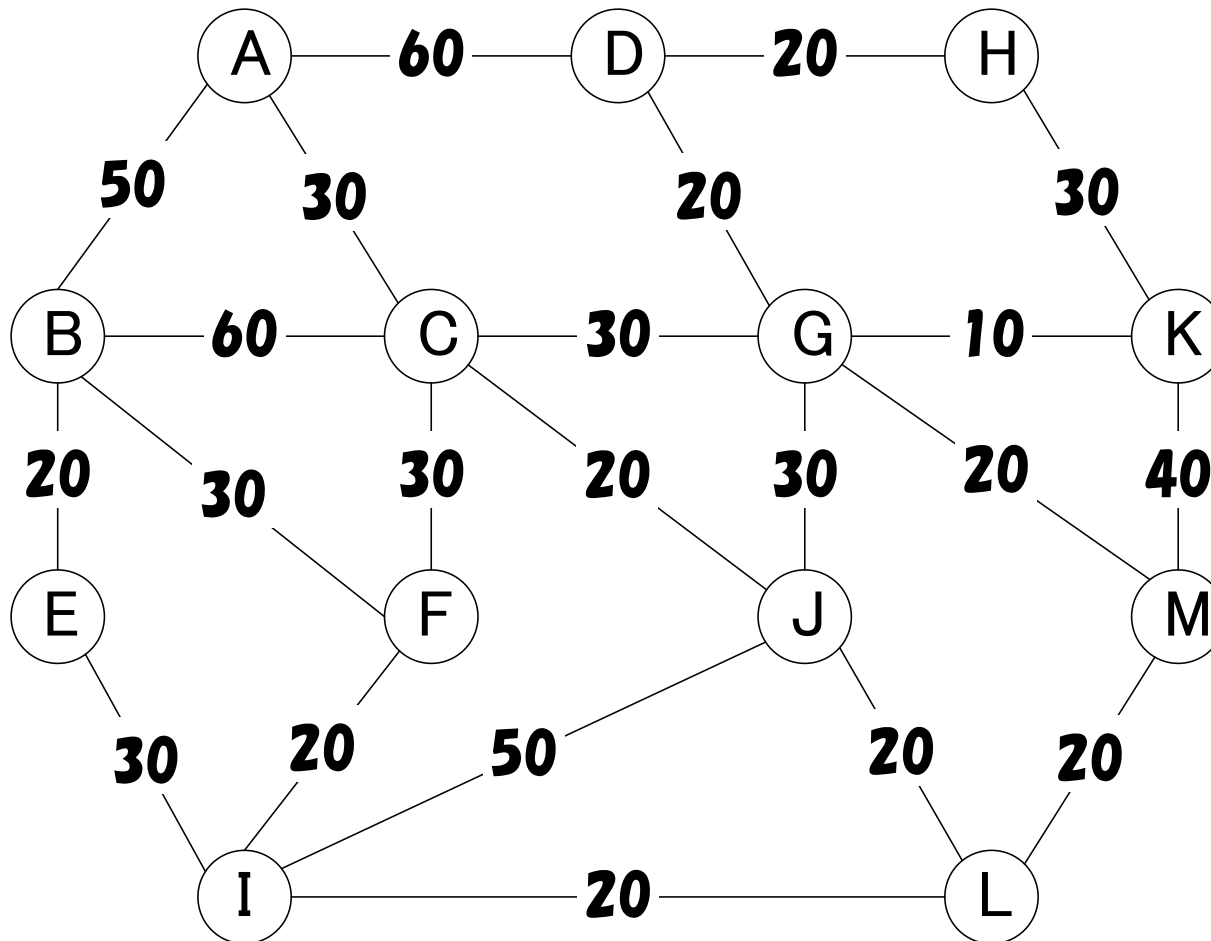
①を根とした最短路木



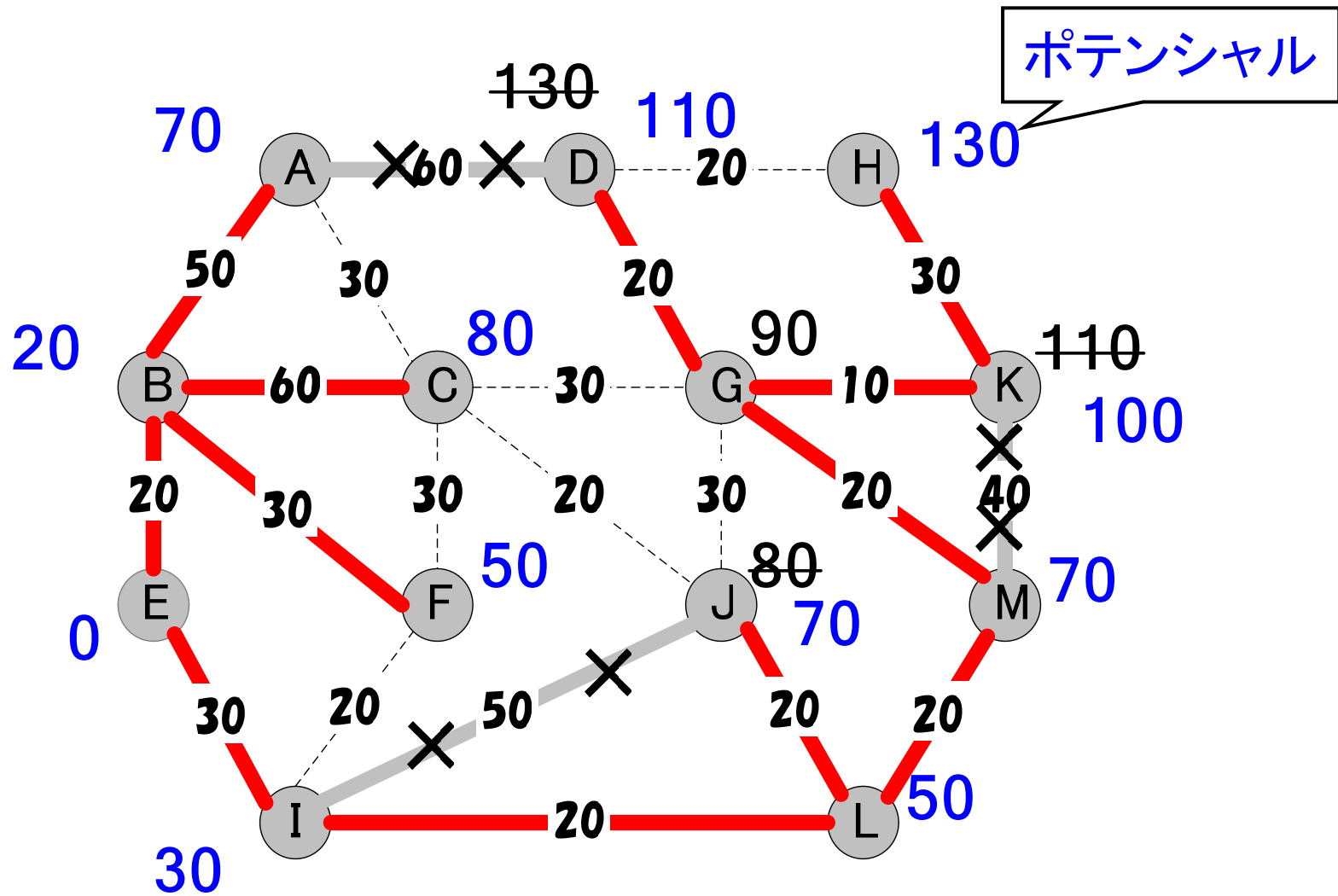
練習2 無向グラフの最短路

- Eを根とした最短路木は?
- E⇒Hの最短路は?

両方向の枝があると考える

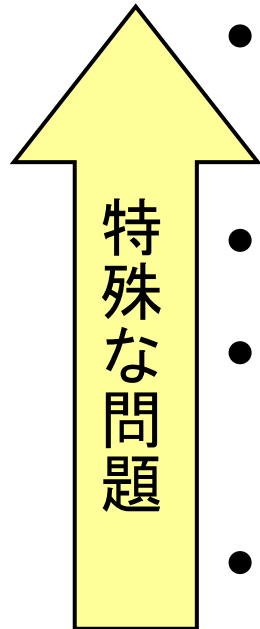


練習2 解答例



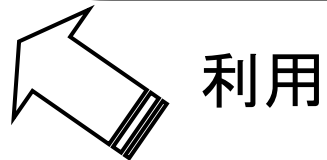
Eを根とした最短路木

最短路問題のタイプ



- 1始点-1終点間
- 1始点-全点間
- 全点-1終点間
- 全点間

専用の高速解法があるかどうかは未解決



中心的なタイプ
主な解法:
ダイクストラ法

枝の数値が非負の時のみ
利用可能

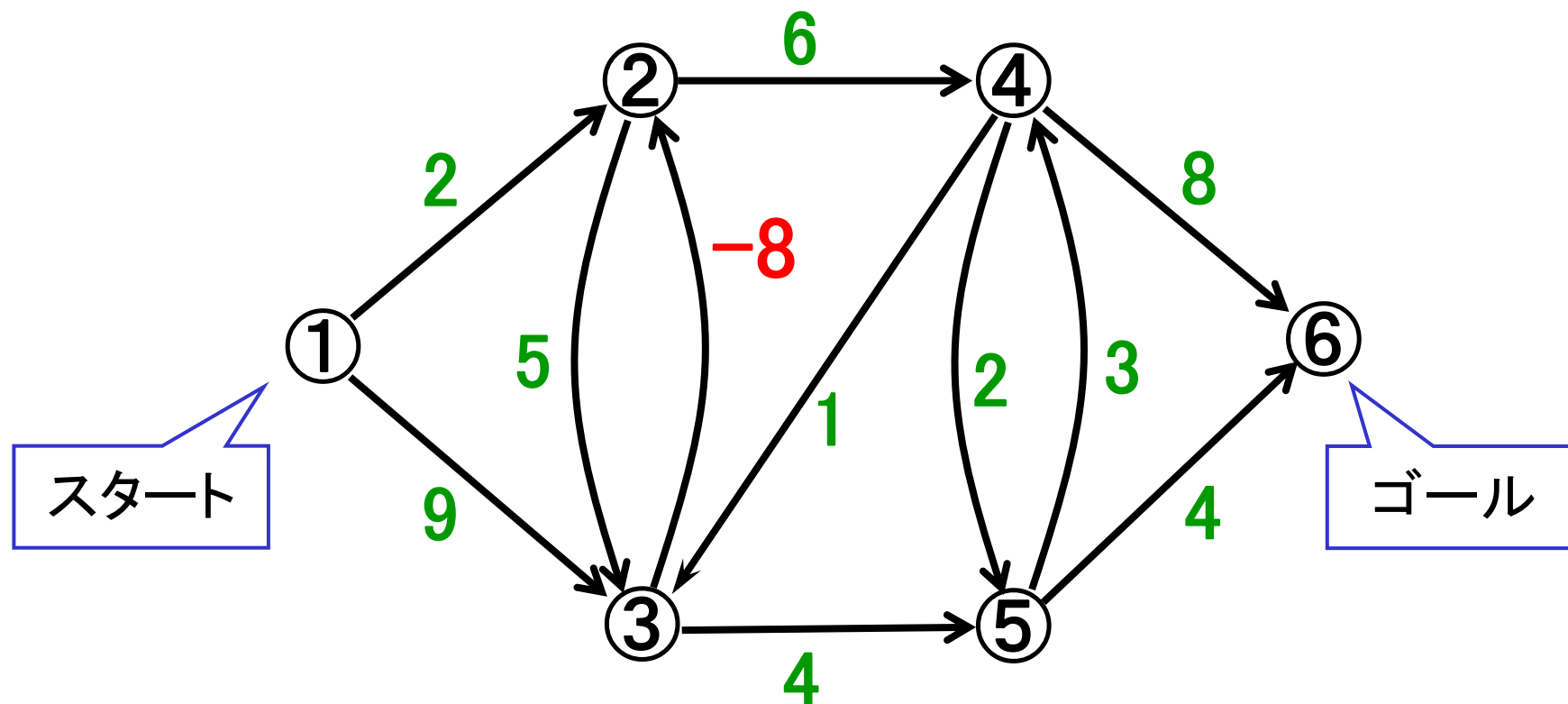


Floyd-Warshall法
Johnsonの繰り返し法



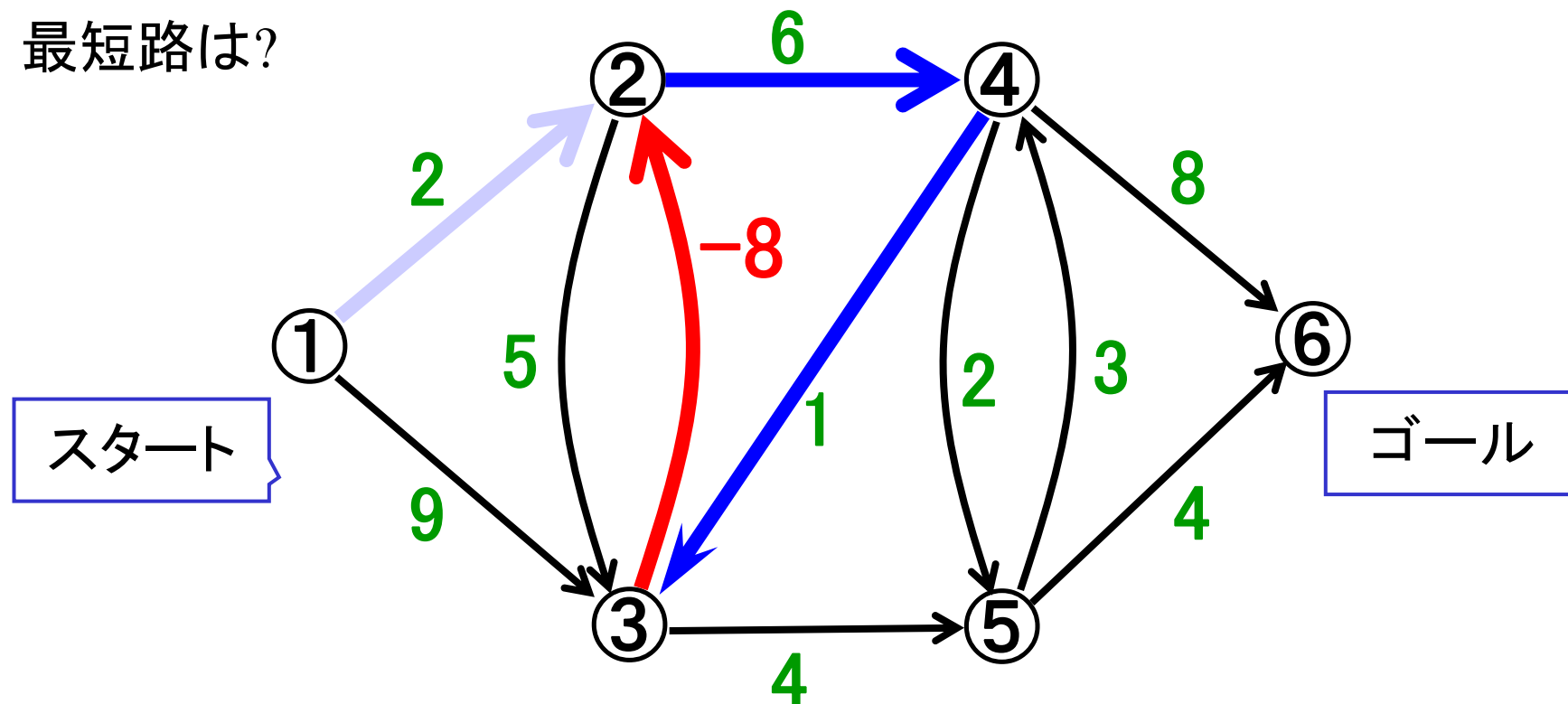
例題2 負の長さがある場合

最短路を求めよ

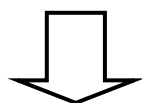


例題2(続) 負閉路の存在

最短路は?



ダイクストラ法で実施⇒確定したはずの点が確定できない
⇒正しい最短路を導かない



負の値があるときは、別な解法を適用(例: **べき乗法**)

応用例1 端末取替

5年契約で端末リースを受けたい

費用は、5年分のリース料と維持費の合計

端末リース料

端末維持費

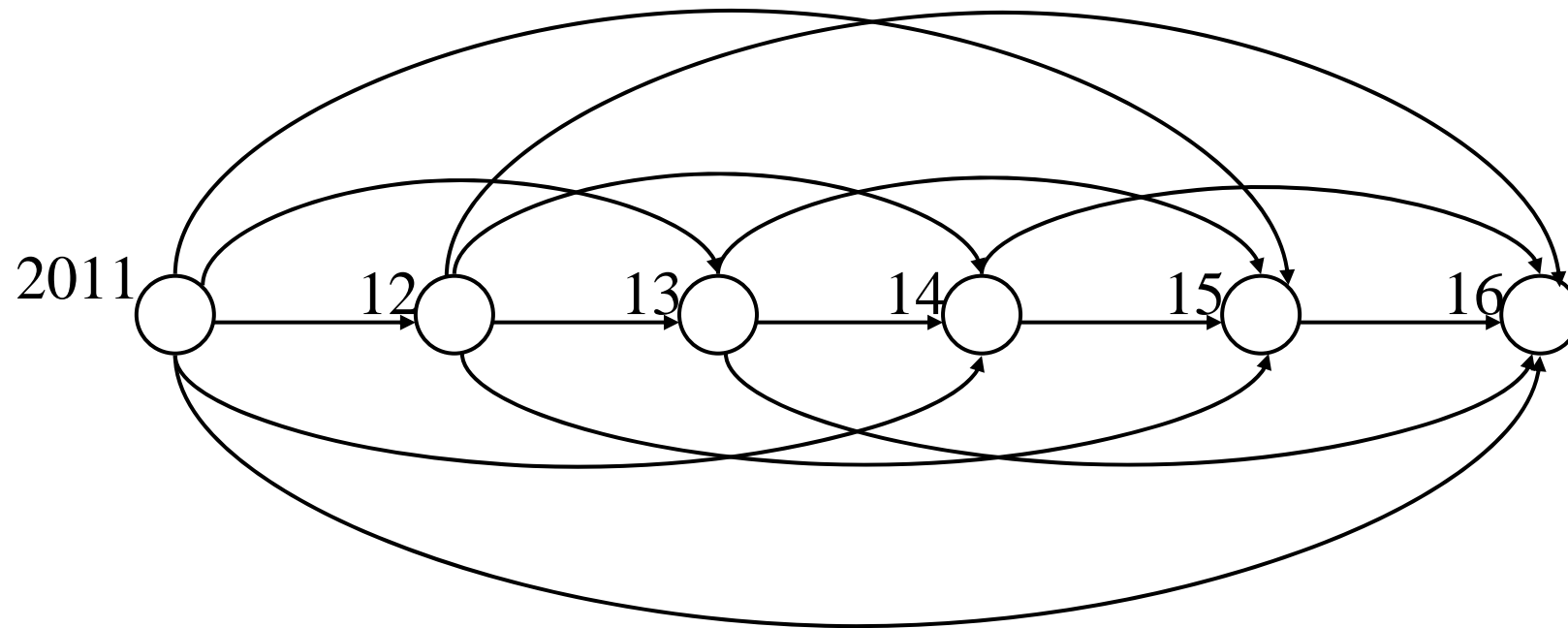
から

	12年	13年	14年	15年	16年	まで
2011年	5	9	13	15	19	
2012年		6	10	17	17	
2013年			7	15	15	
2014年				9	12	
2015年					11	
				(百万円)		

1年間	1
2年間	3
3年間	6
4年間	11
5年間	16
	(百万円)

5年間の最も安価な契約内容を提案せよ

応用例1(続き) ネットワークで表現しよう



- 費用最小な取替計画を見つけよう
- 最短路問題との関連は?

ダイクストラ法の高速実現法

ポテンシャル最小の点を高速に発見する

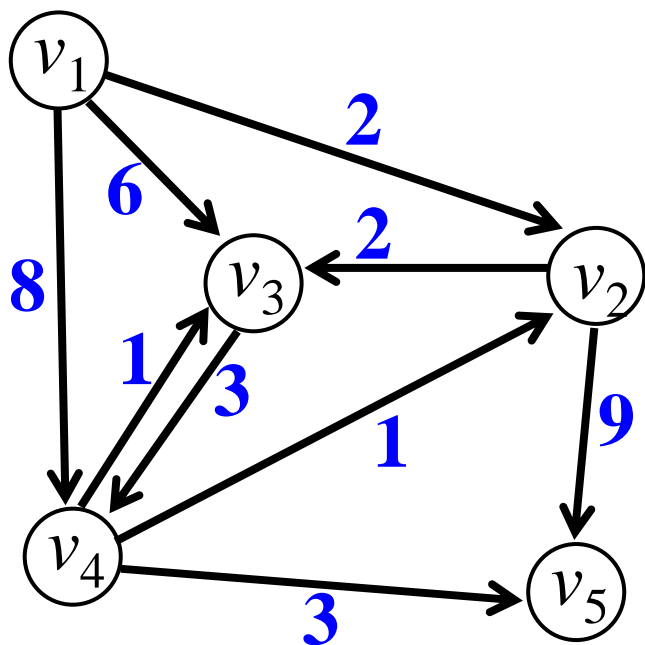
- 未確定点を配列でなくリスト構造で保持
(走査する点数を減らす)
- 未確定点をポテンシャルの値順に整列
→ 整列アルゴリズムの知識が必要

効率的実装に

基本的なアルゴリズム+
データ構造の知識は
不可欠



演習6-1



- (1) 点 v_1 を根とした最短路木と、各点までの最短距離を求めよ.
- (2) 有向グラフの枝の向きを無視した無向グラフを考える. 最小木とその重さを求めよ.

演習6-2

文教警備では9時から17時までの警備を契約社員でまかなう。
警備には常時一人いれば十分である(複数人いても問題はない)。
契約社員の中で候補者をリストアップした。

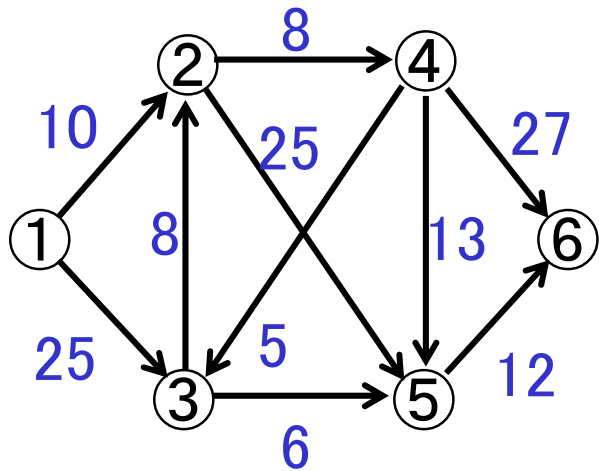
社員ID	A	B	C	D	E	F	G	H
労働 時間帯	9-12	9-11	11-13	12-15	12-17	14-17	13-16	16-17
給料	31	14	16	22	38	20	26	9

契約上、各社員の労働時間帯も給料も変更はできない。
1日当たりの総給与を最小にしたい。
誰にいつで働いてもらうかの雇用計画を提案せよ。



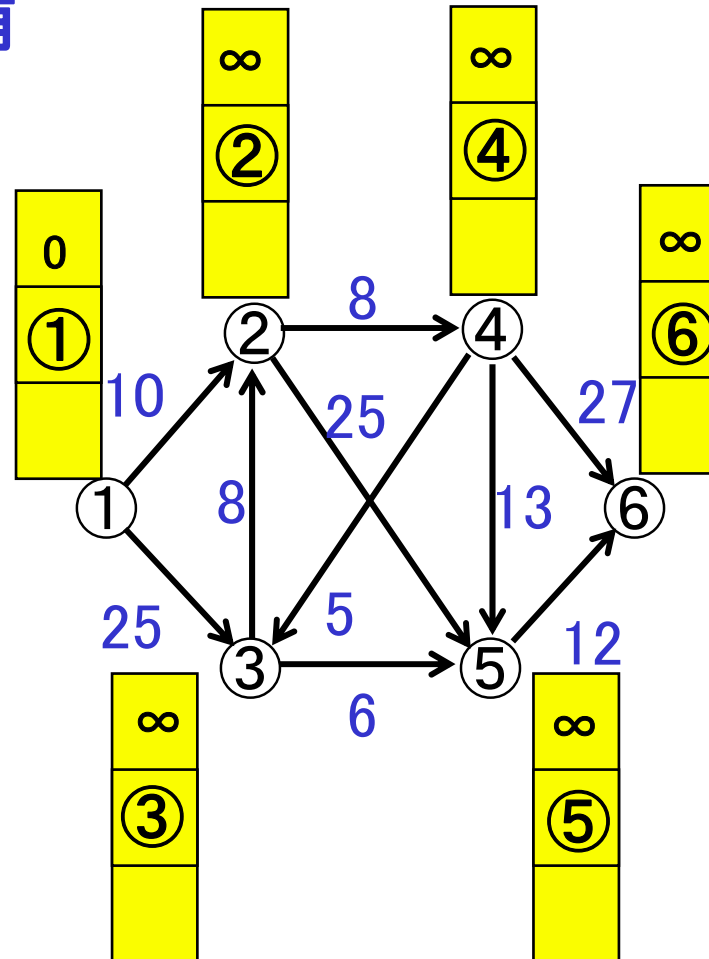
練習1 解答例詳細

①⇒⑥の最短路は?



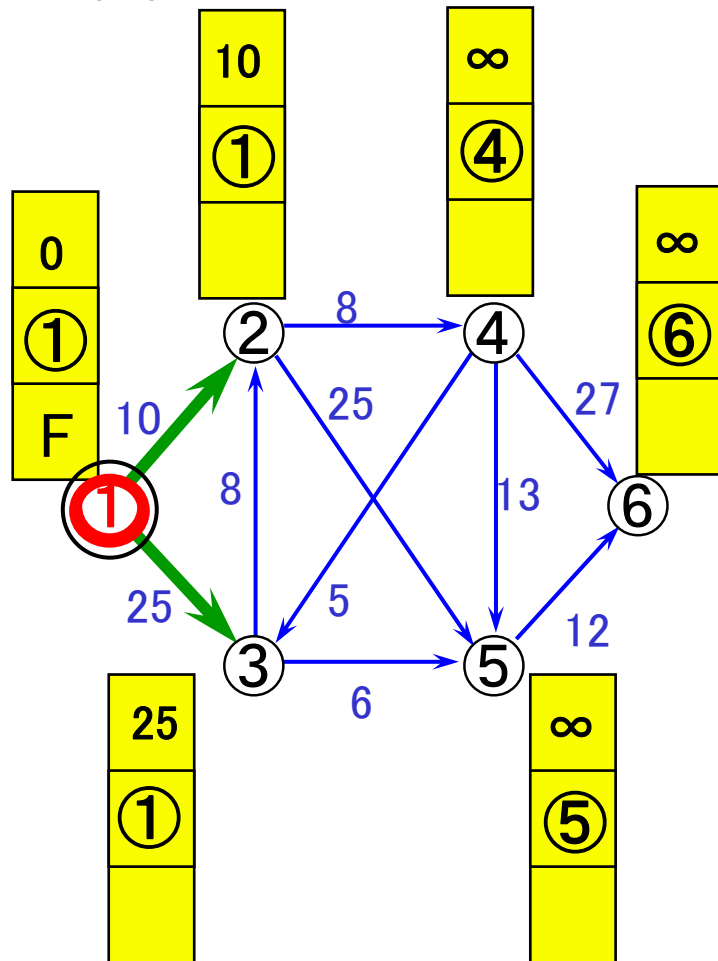
- ポテンシャル
- ポテンシャルを更新した点
- 確定済? F=確定

準備

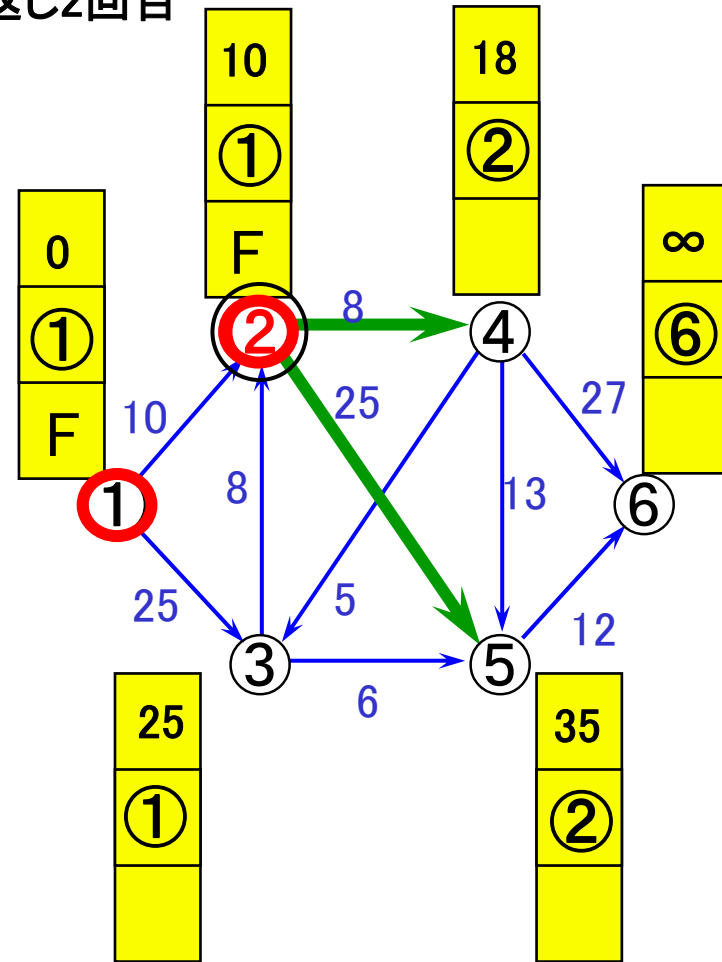


練習1 ポテンシャルの更新

繰り返し1回目

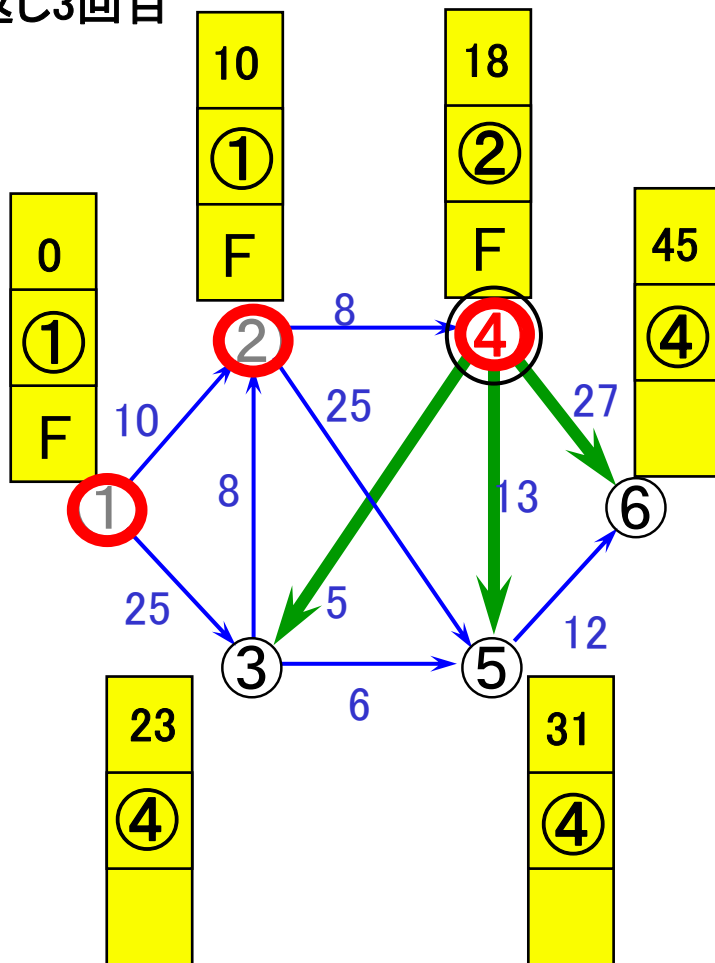


繰り返し2回目

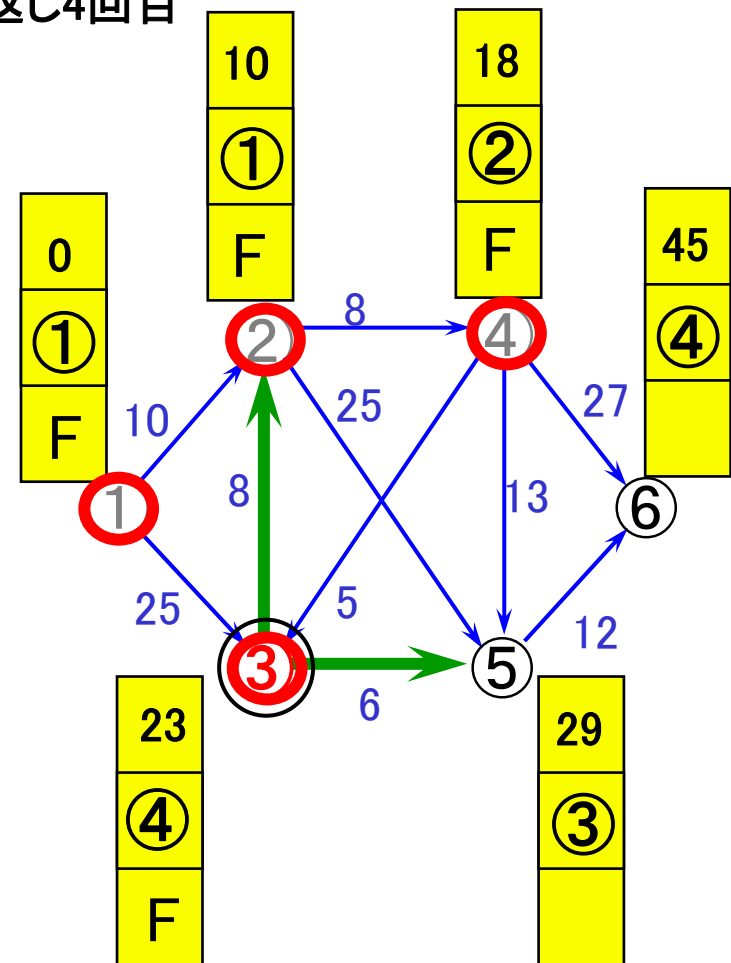


練習1 ポテンシャルの更新(2)

繰り返し3回目

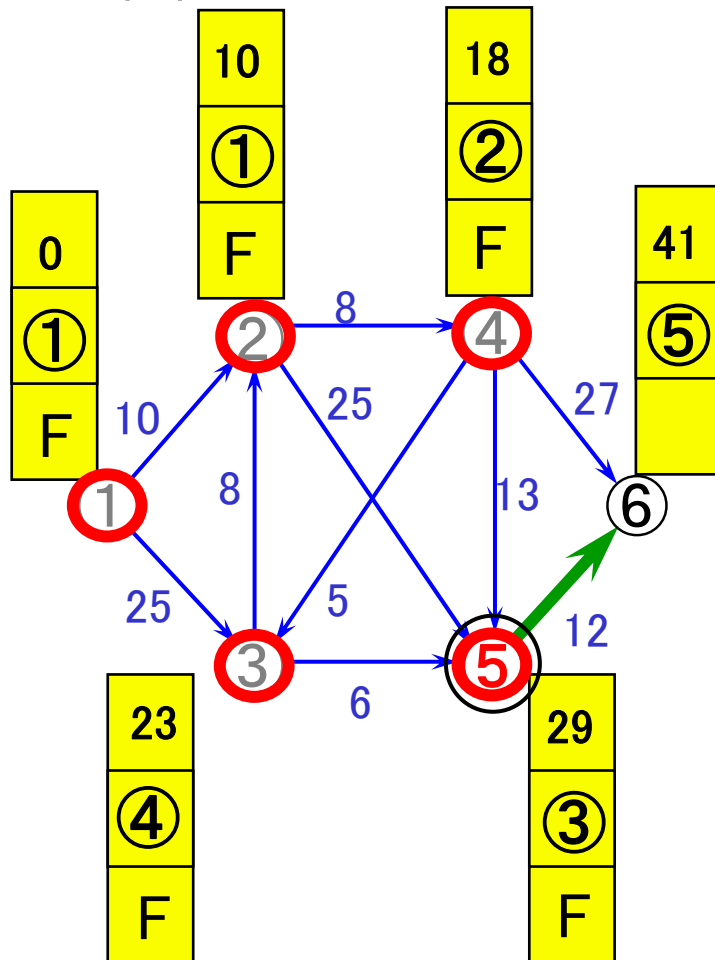


繰り返し4回目

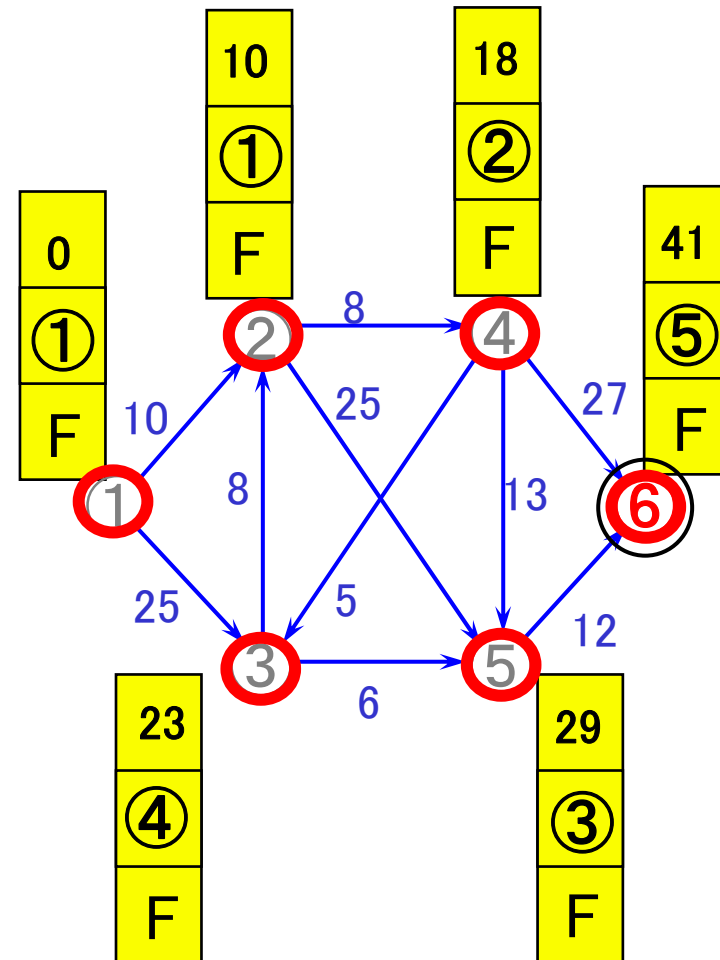


練習1 ポテンシャルの更新(3)

繰り返し5回目

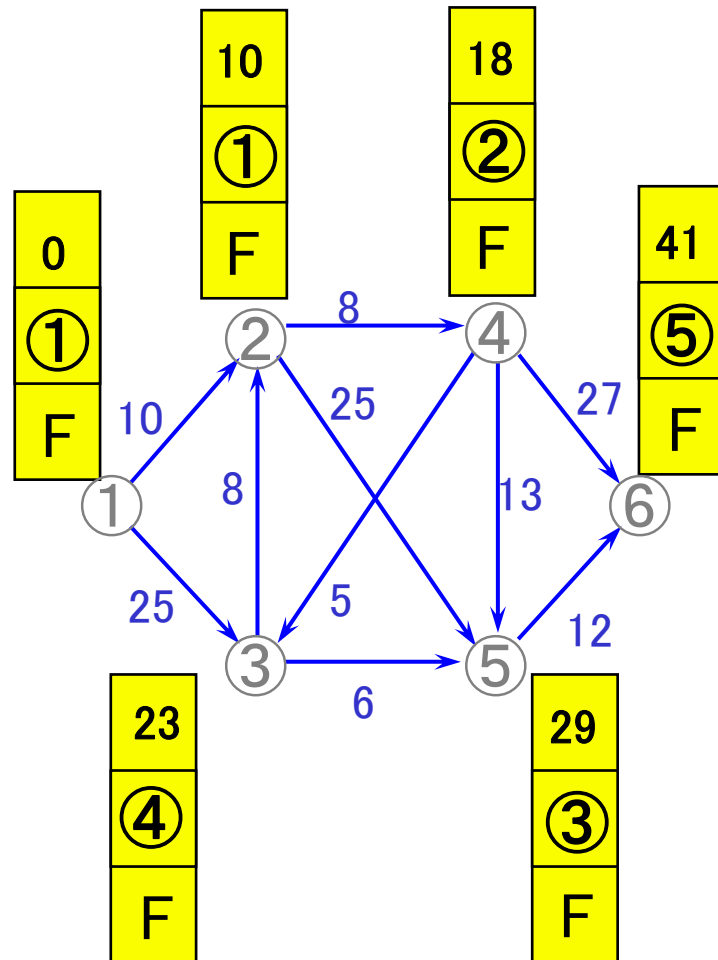


繰り返し6回目



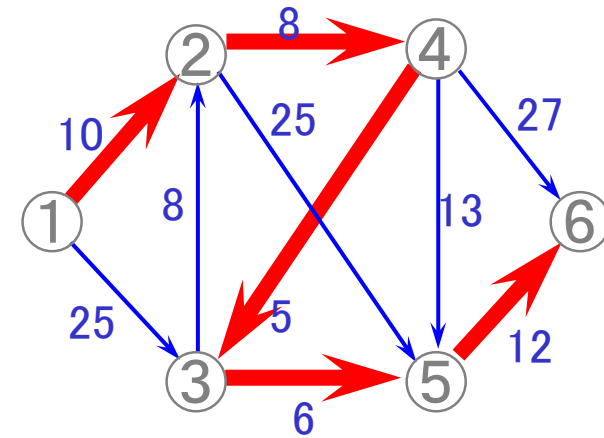
練習1 解答例 まとめ

繰り返し6回目



終了

①を根とした最短路木



最短路の長さは41