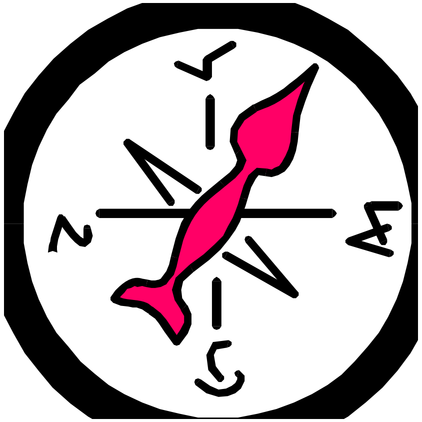
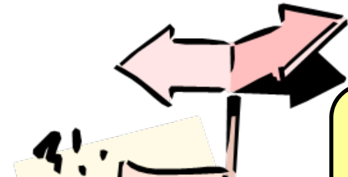


Network Programming II

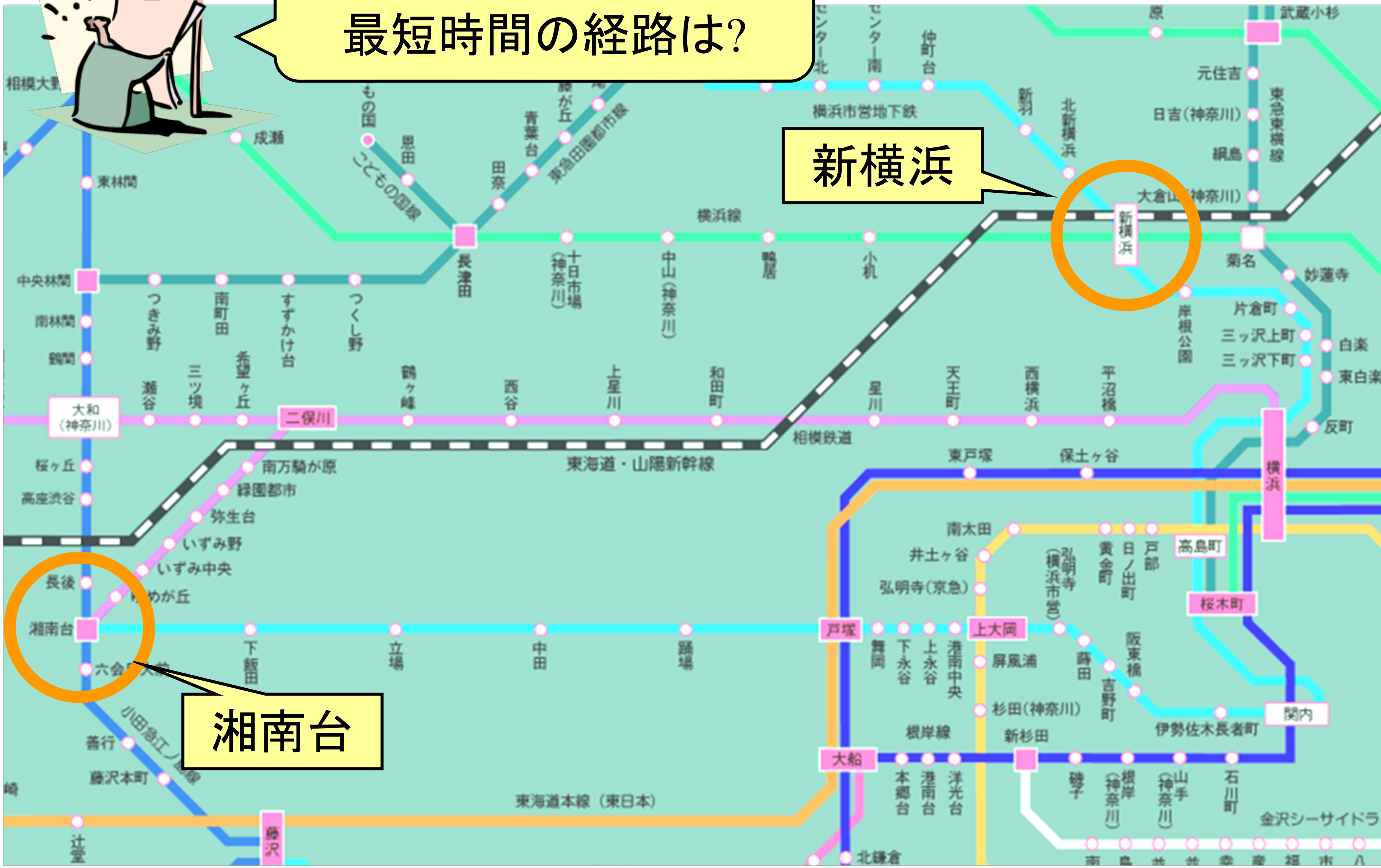
Shortest path problem

最短路を探せ!

最短路問題



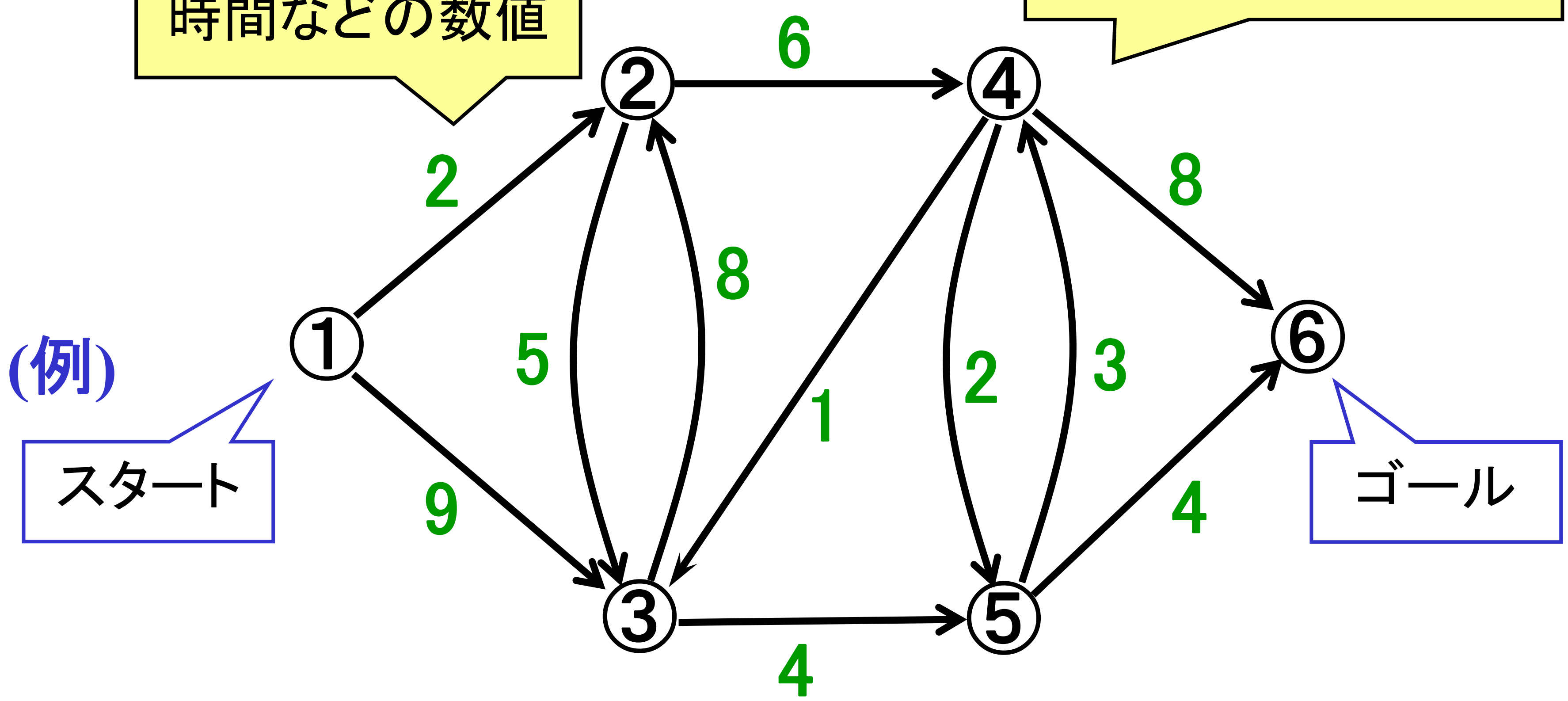
最短距離の経路は?
最短時間の経路は?



最短路問題のネットワーク表現

各枝に距離or
時間などの数値

問題の舞台を
（有向）グラフで表現

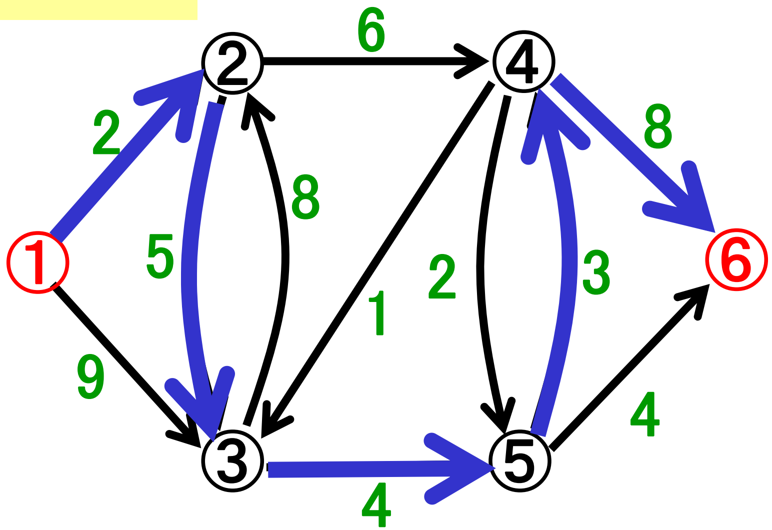


スタートとゴールの点を指定

パス(経路)とその長さ

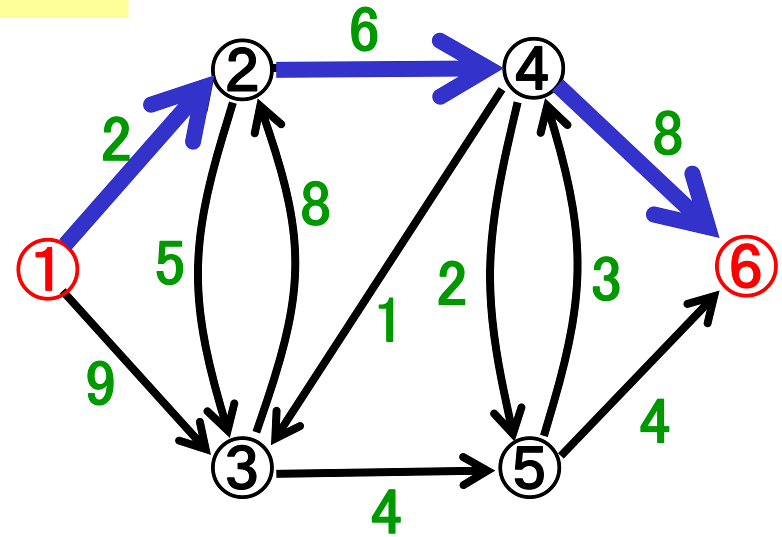
パス(経路):ある点とある点を結ぶ枝の列(向きに注意!)

パスA



パスの長さ:2+5+4+3+8=**22**

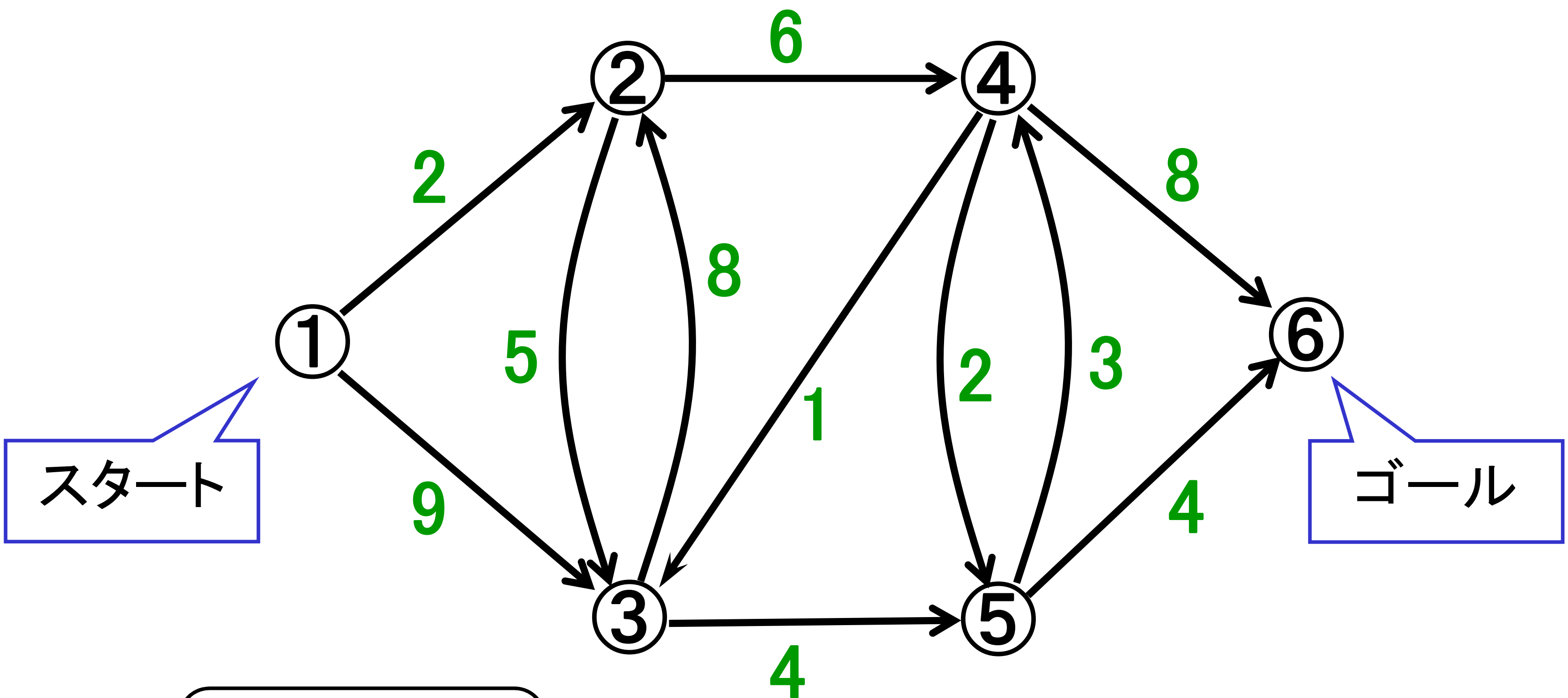
パスB



2+6+8=**16**

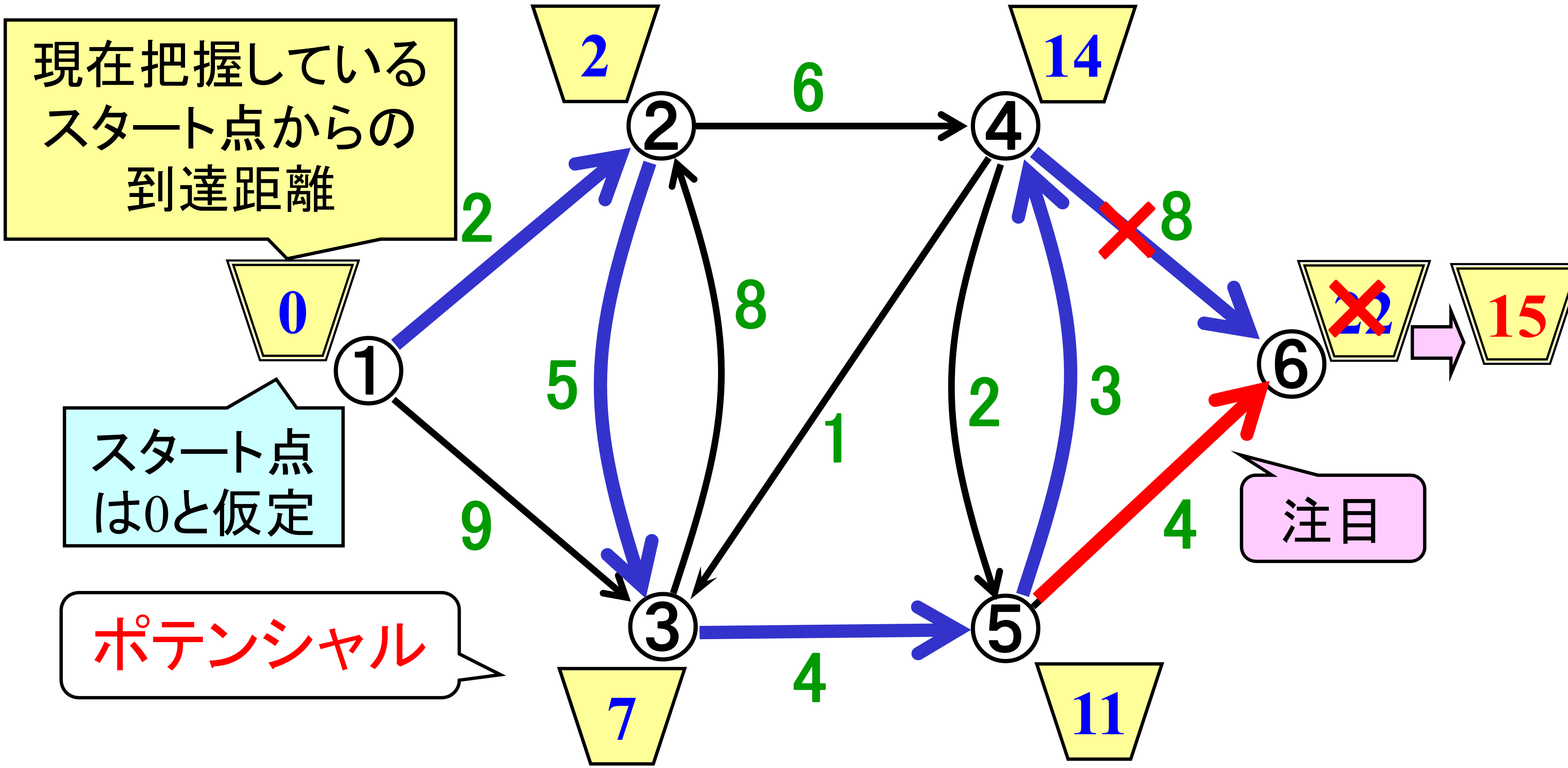
- スタートとゴールを結ぶパスは多数
- その中で長さが最短のパス＝最短路
- 最短路を見つける問題:最短路問題

例題1 最短路を求めよ



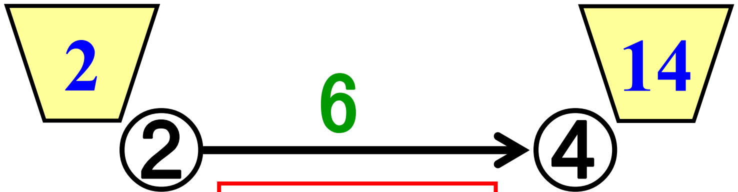
例題1(続) 最短路ではないパス

なぜ最短路ではない?



最短路を見つけた⇔ポテンシャルはどういう状況を満足している？

最短路とポテンシャル



$2+6<14$

最短路を見つけていない

一般的に書くと

ある枝で $p+a<q$ が成立

最短路を見つけていない証拠

⇔

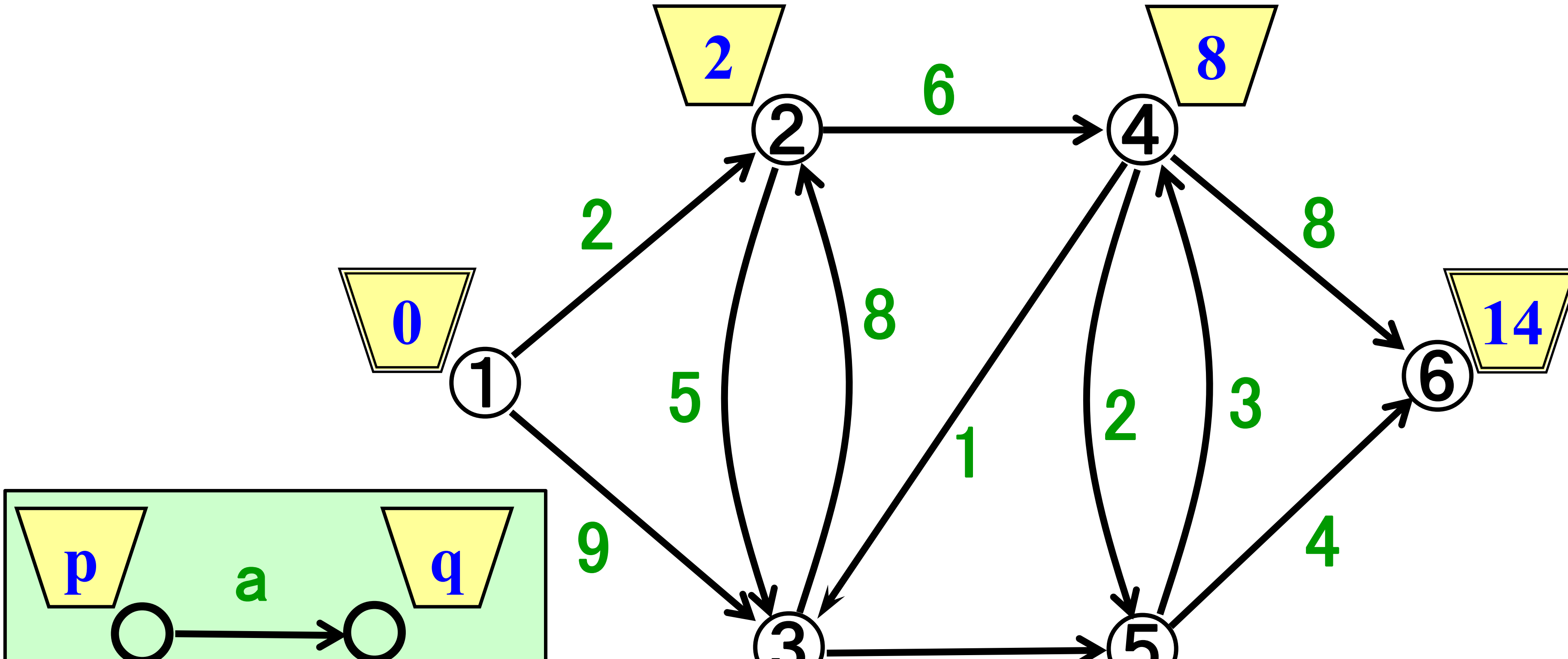
下の性質を満たすポテンシャルの見つければいいんだ. どうやって？

すべての枝で $p+a \geq q$ が成立

最短路でない証拠が存在しない

➡ 最短路を見つけた！

例題1(続) 性質を満たすポテンシャルの例



すべての枝で

$\boxed{p+a \geqq q}$

が成立

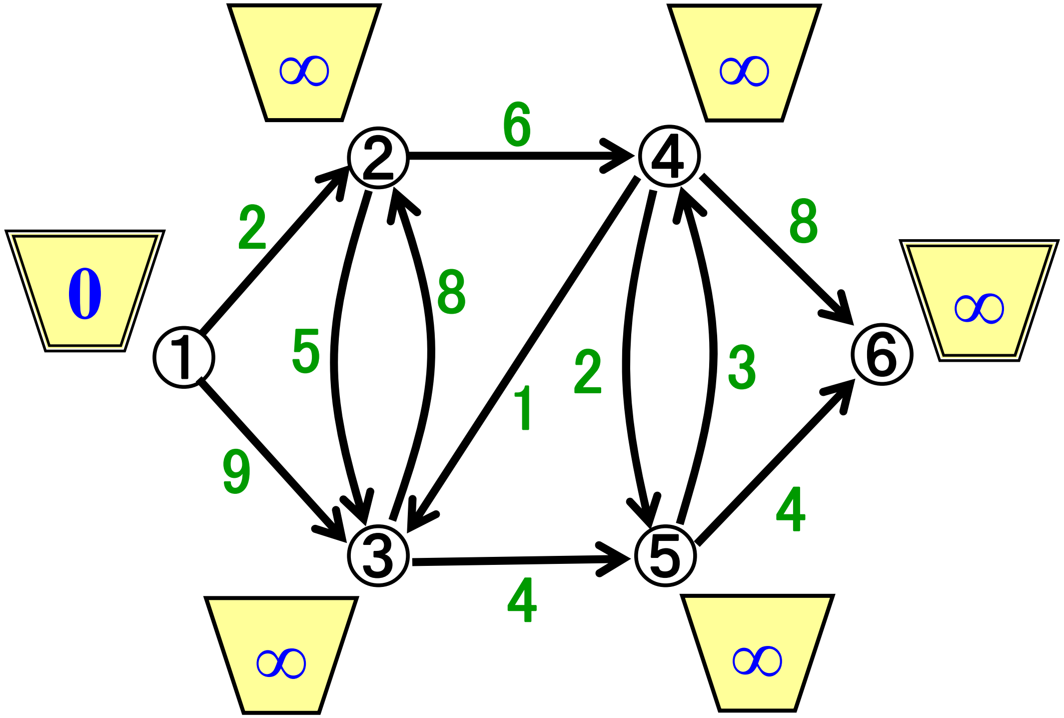
確認してみよう

例題1(続) 性質を満たす ポテンシャルの見つけ方(1)

準備:
- スタートのポテンシャルを**0**
- 残りの点のポテンシャルは∞
- 全点が未確定.

性質を満たすよう
ポテンシャルを順に更新

ダイクストラ法
Dijkstra



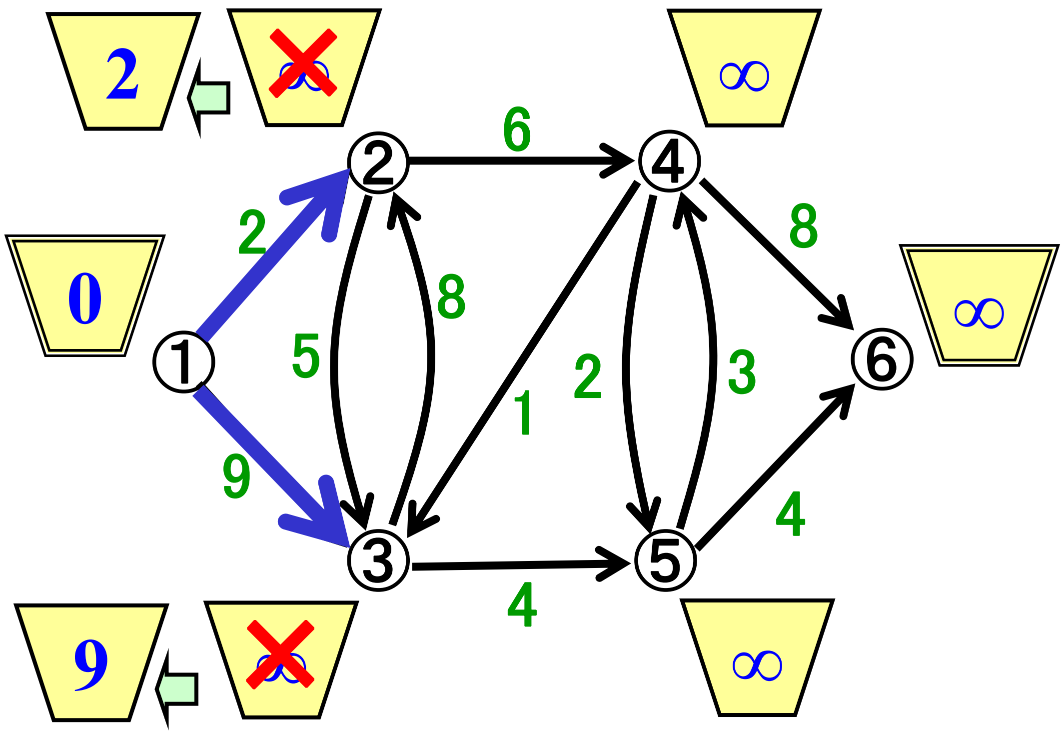
例題1(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(1)

手順：全点が確定するまで以下を繰り返す

① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定

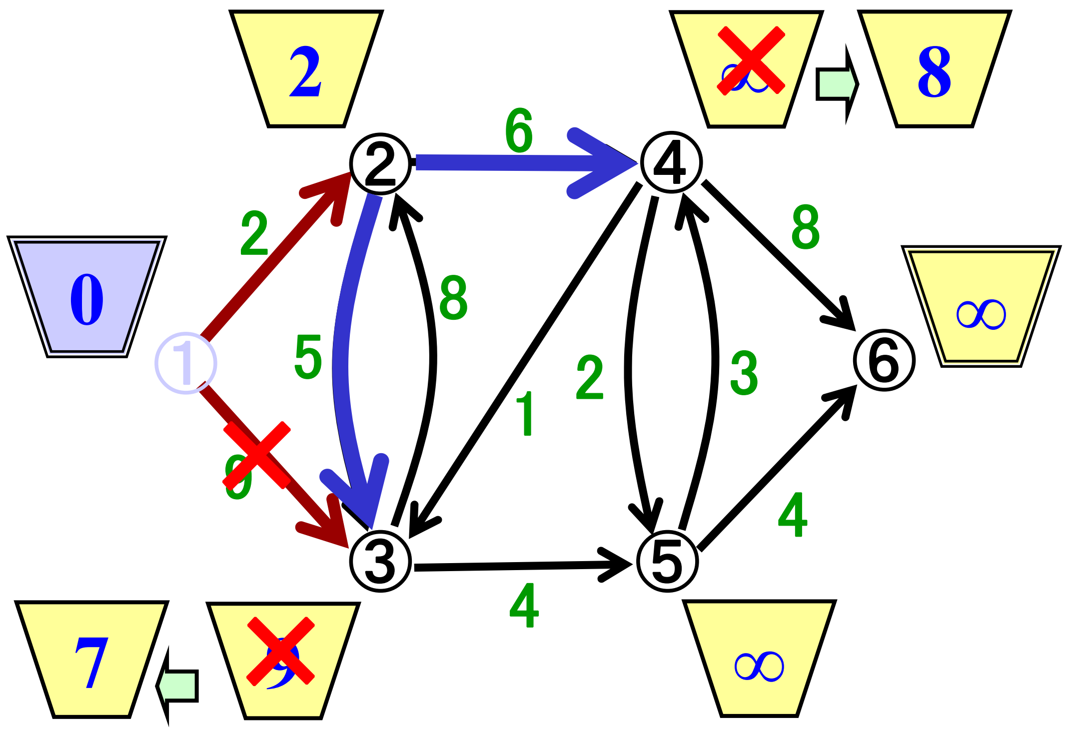


例題1(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(2)

① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定

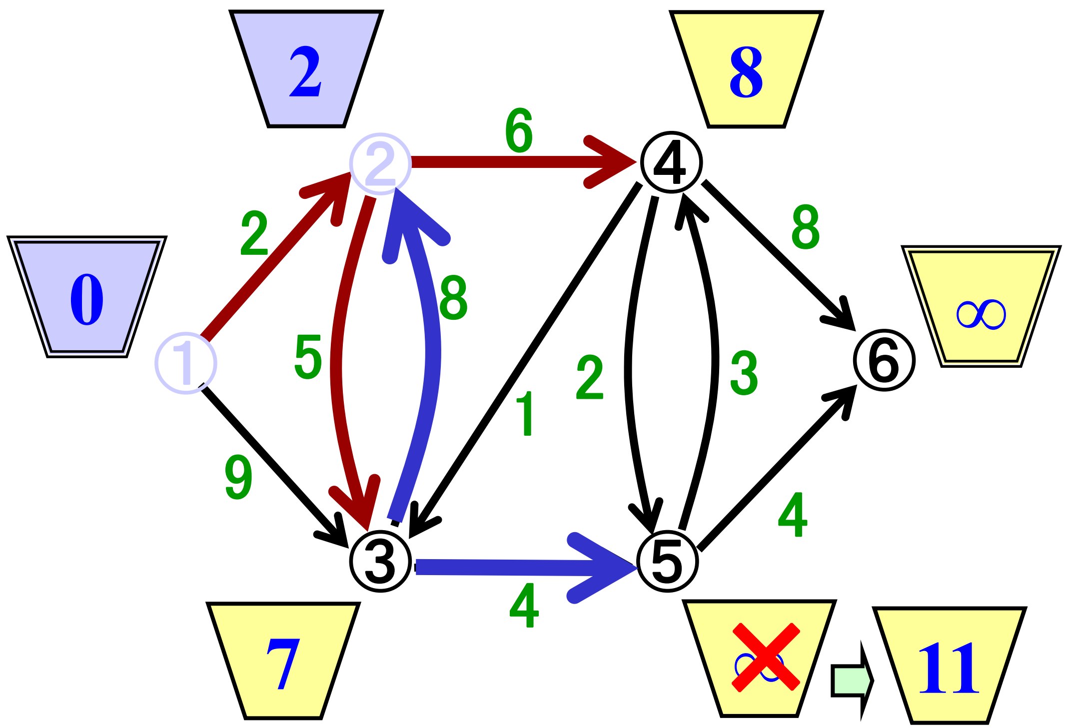


例題1(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方（3）

① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定

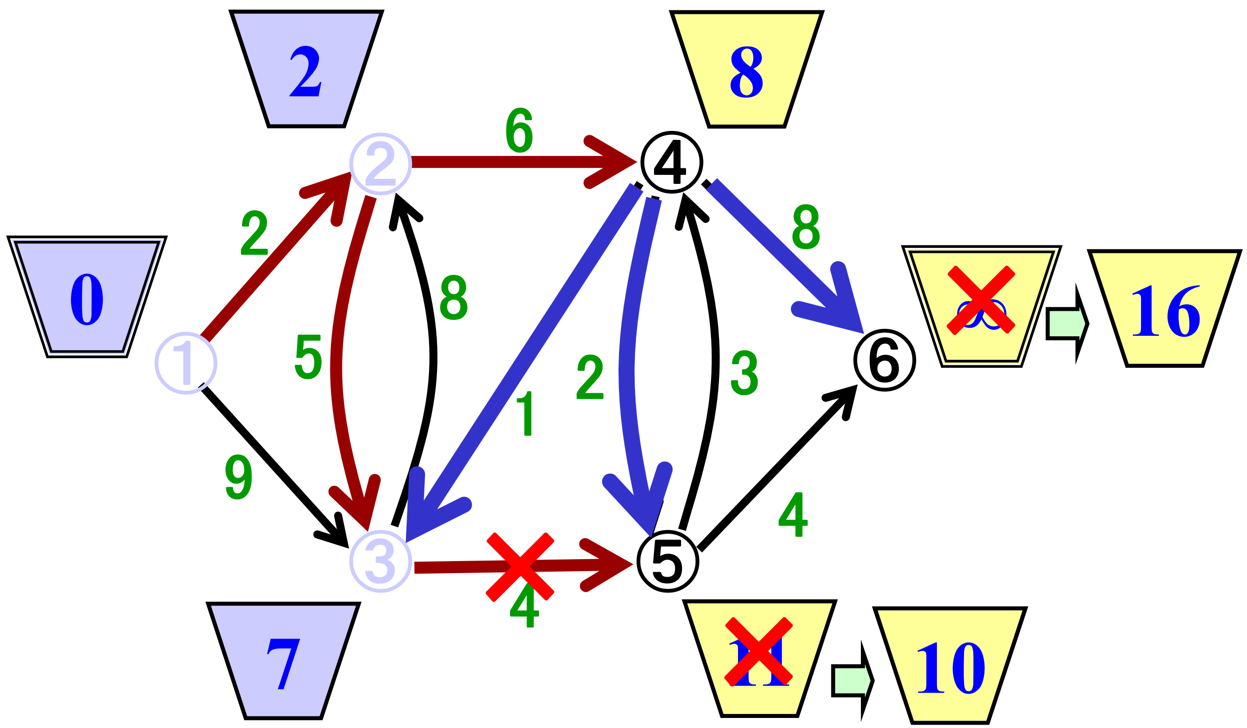


例題1(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(4)

① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定

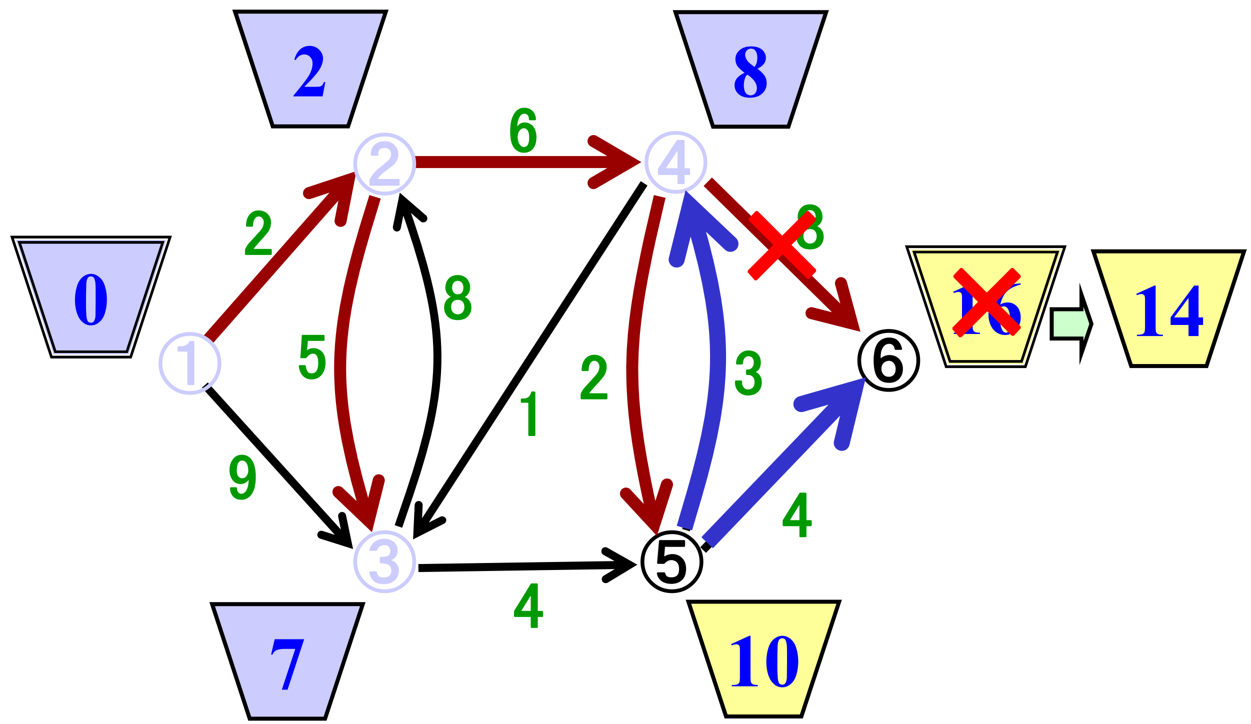


例題1(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(5)

① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定



例題1(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(6)

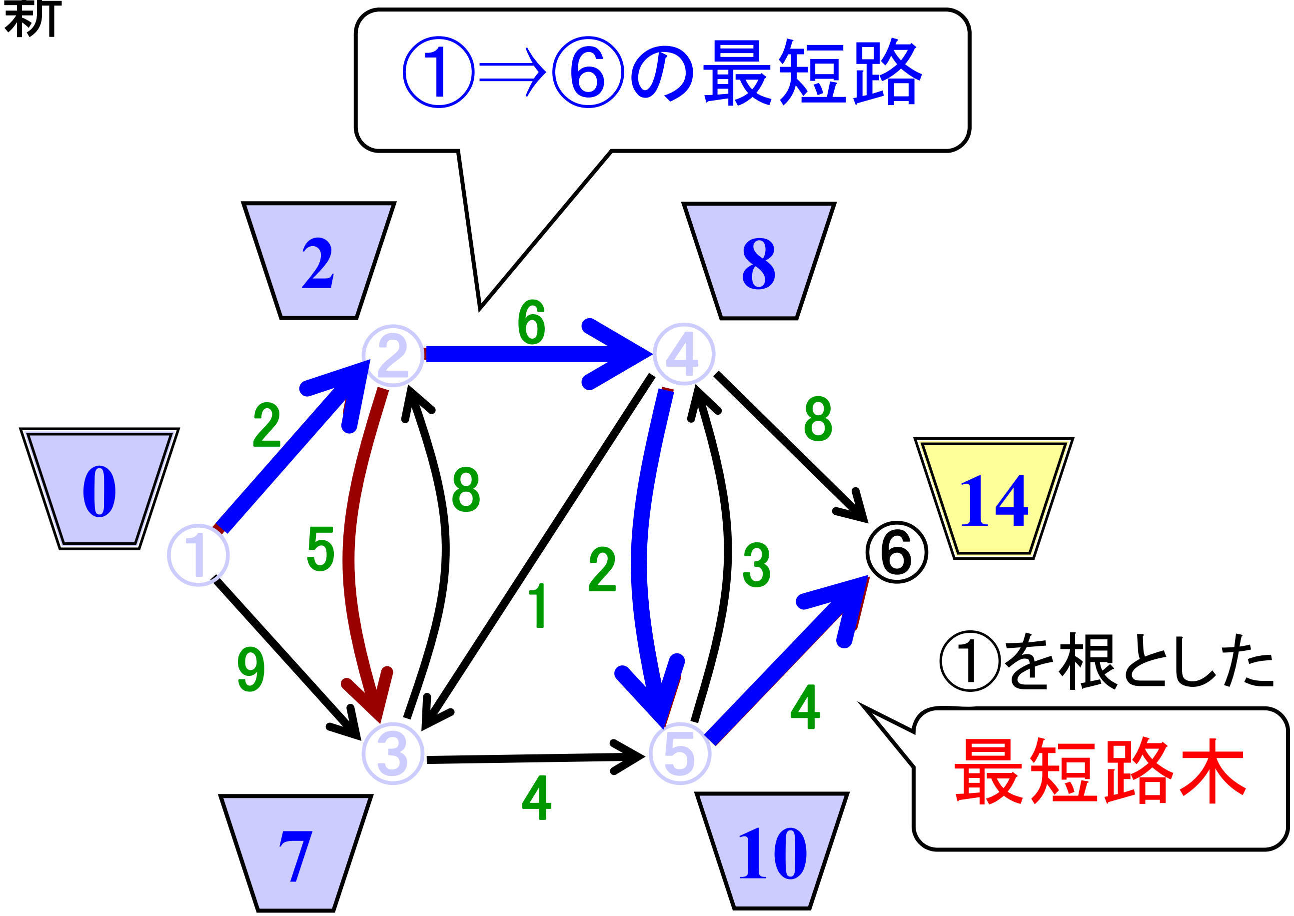
① ポテンシャル最小未確定点の選択

② ポテンシャル更新

③ 点を確定

⇩

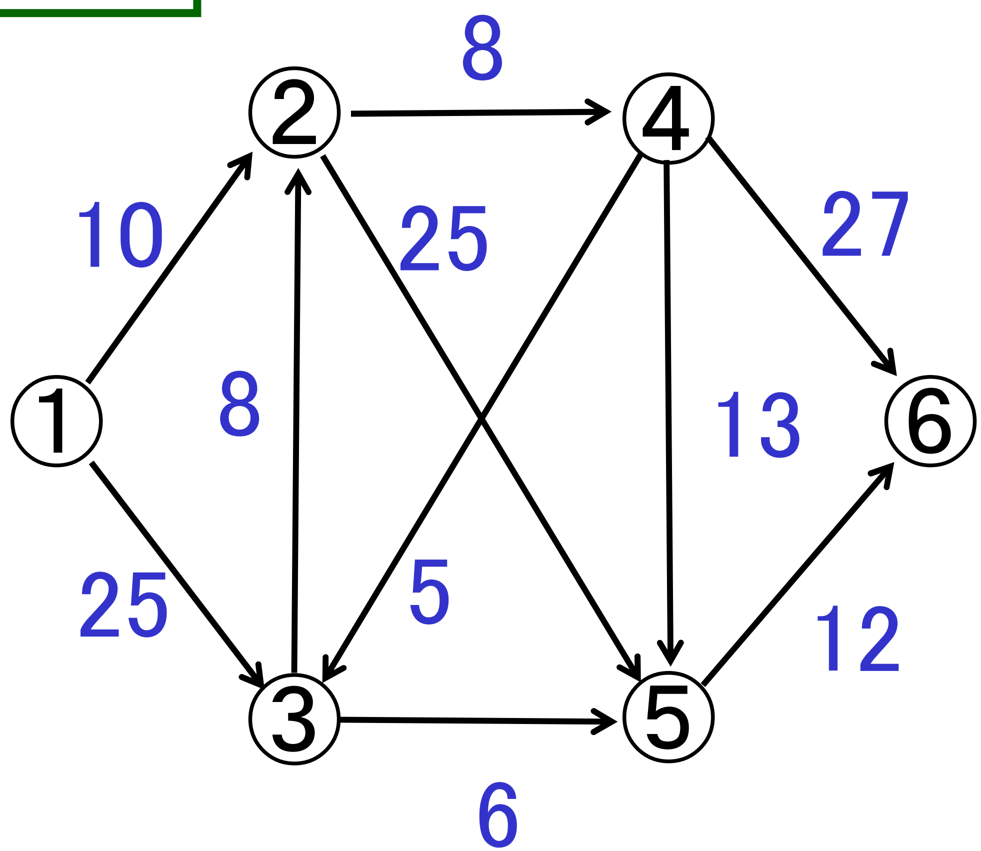
全点が確定し終了



最適なポテンシャルが見つかった ⇨ 最短路も見つかった

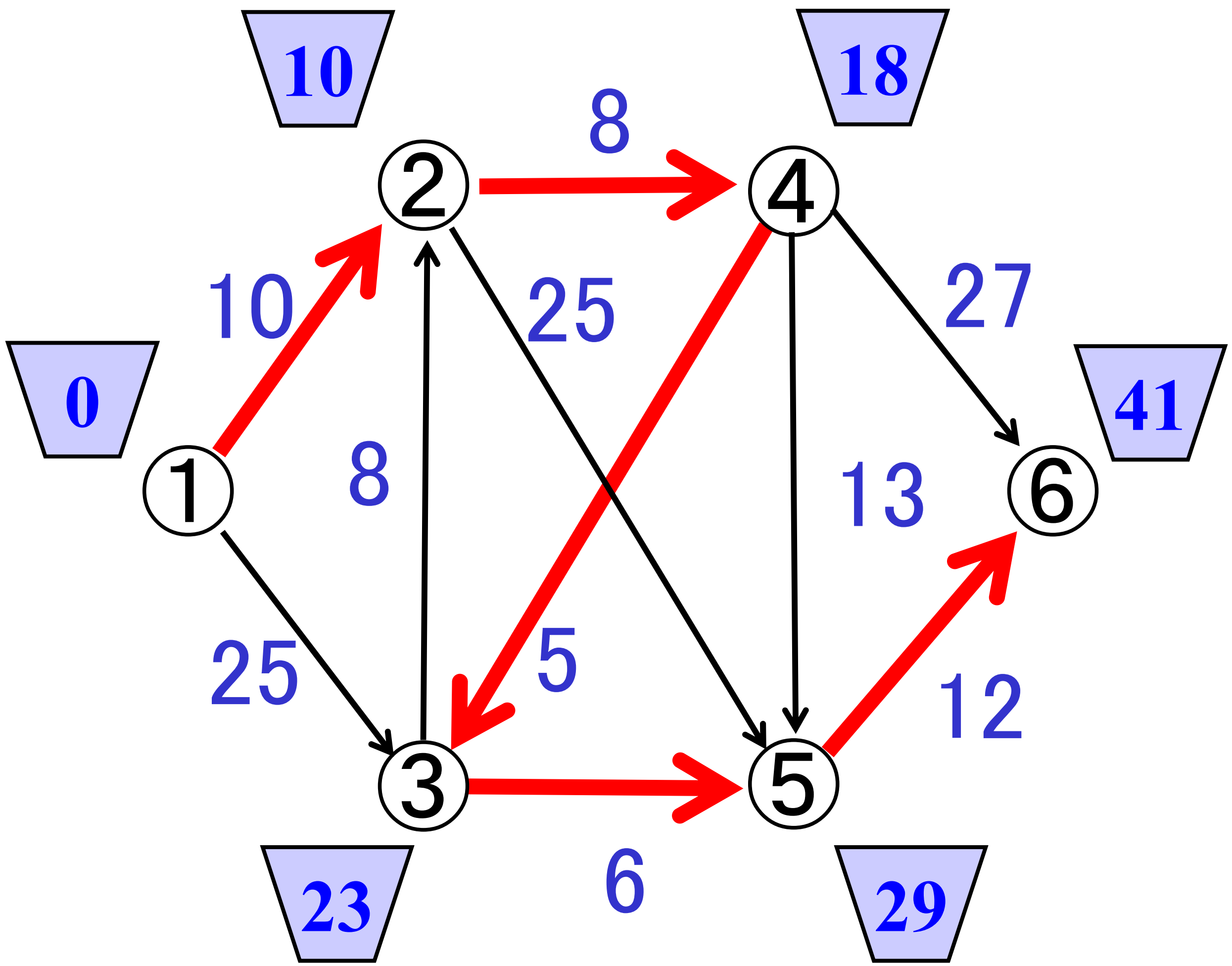
練習1 ダイクストラ法

①⇒⑥の最短路は?



練習1 解答例

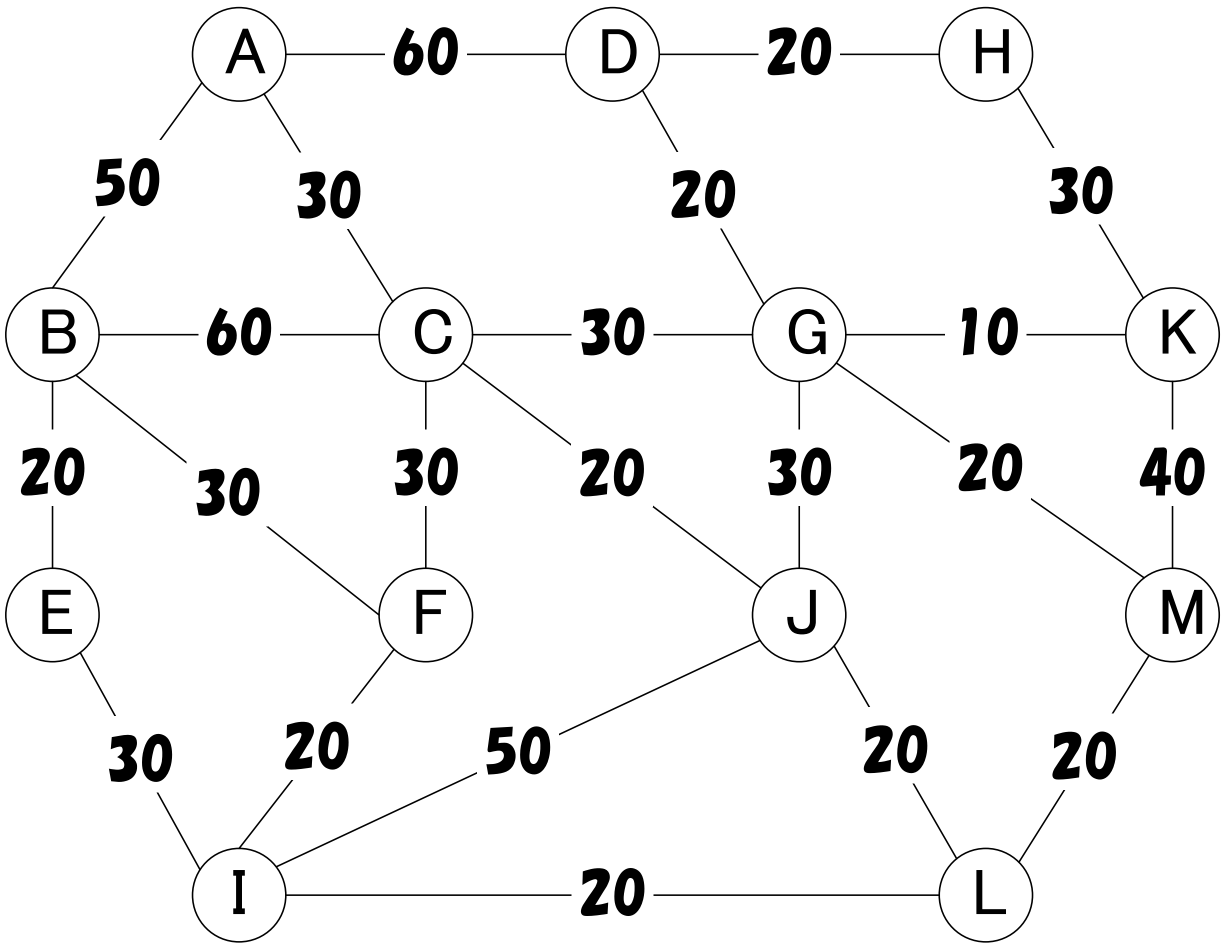
①を根とした最短路木



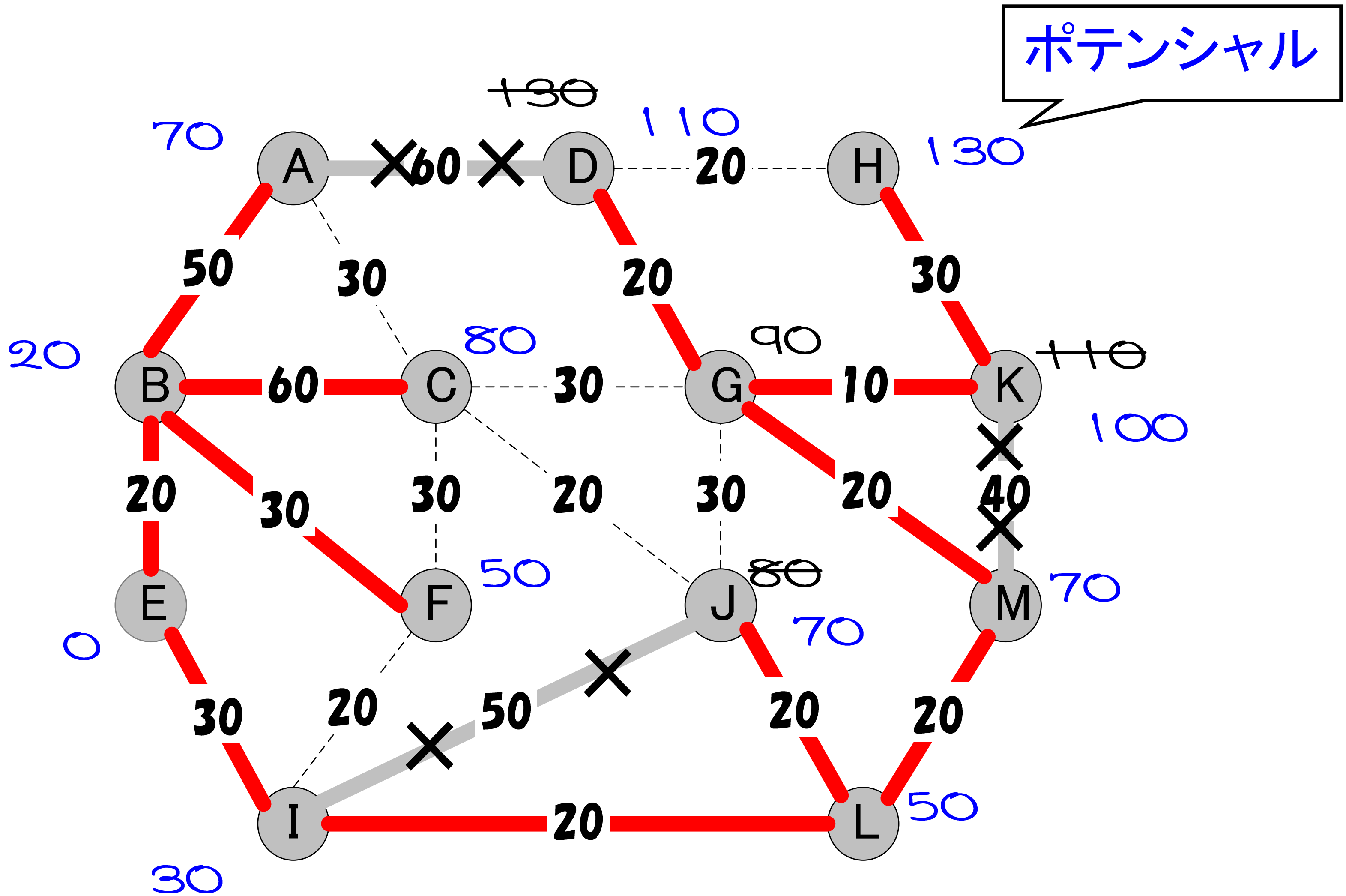
練習2 無向グラフの最短路

- •Eを根とした最短路木は?
- •E⇒Hの最短路は?

両方向の枝があると考える



練習2 解答例



Eを根とした最短路木

最短路問題のタイプ

特殊な問題

- 1始点-1終点間

専用の高速解法がある
かどうかは未解決

利用

- 1始点-全点間
- 全点-1終点間

中心的なタイプ
主な解法:
ダイクストラ法

枝の数値が
非負の時のみ
利用可能

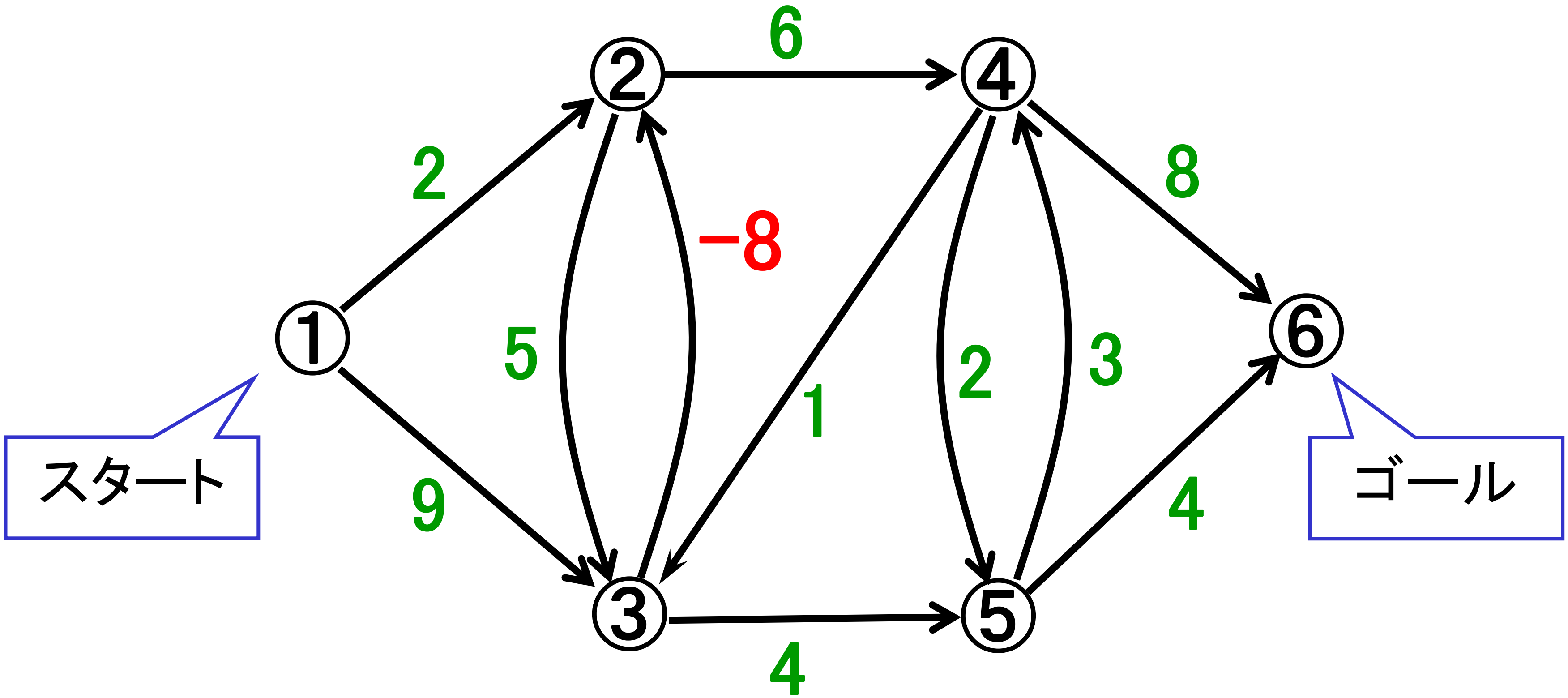
影響

- 全点間

Floyd-Warshall法
Johnsonの繰り返し法

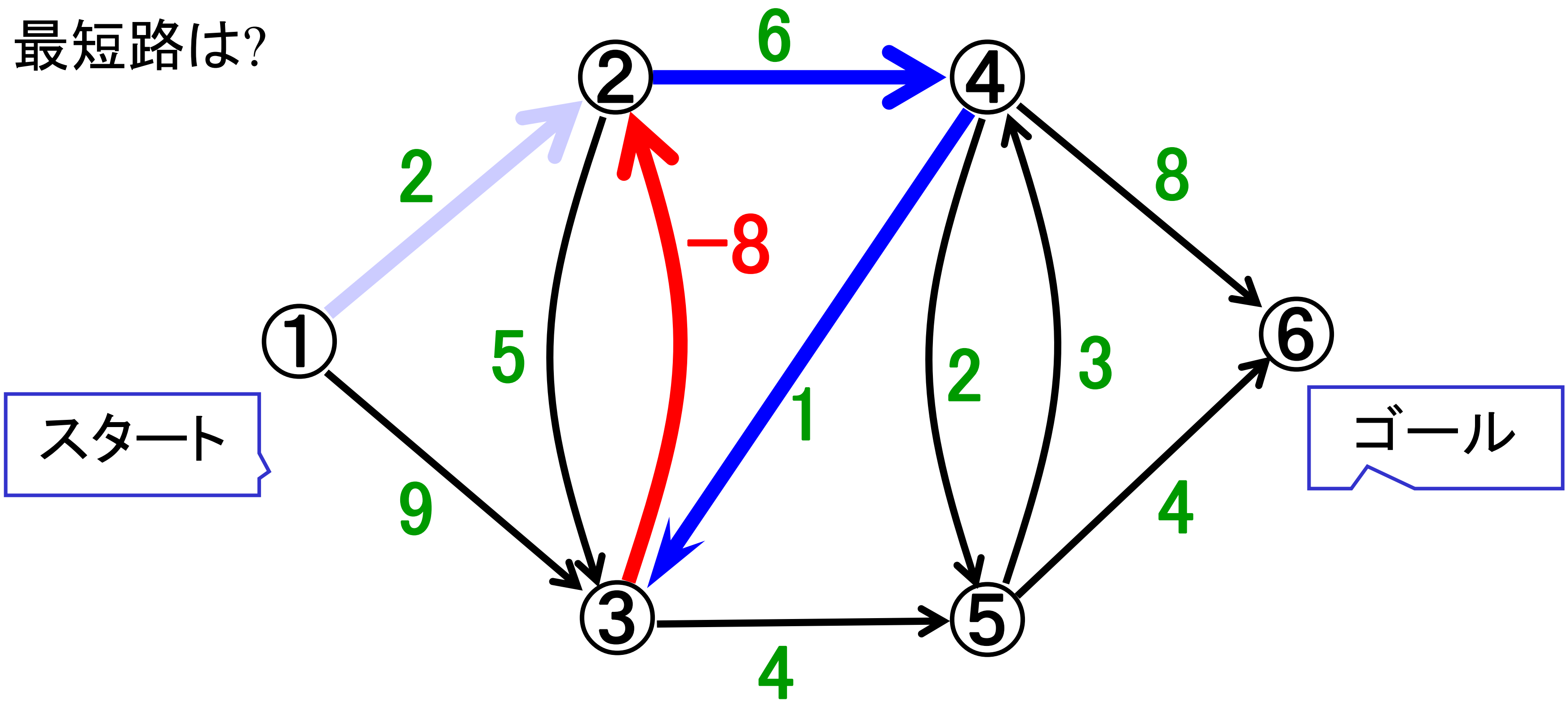
例題2 負の長さがある場合

最短路を求めよ



例題2(続) 負閉路の存在

最短路は?



ダイクストラ法で実施⇒確定したはずの点が確定できない

⇒正しい最短路を導かない

負の値があるときは，別な解法を適用（例：べき乗法）

応用例1 端末取替

5年契約で端末リースを受けたい

費用は，5年分のリース料と維持費の合計

端末リース料

から / まで

	12年	13年	14年	15年	16年
2011年	5	9	13	15	19
2012年		6	10	17	17
2013年			7	15	15
2014年				9	12
2015年					11

（百万円）

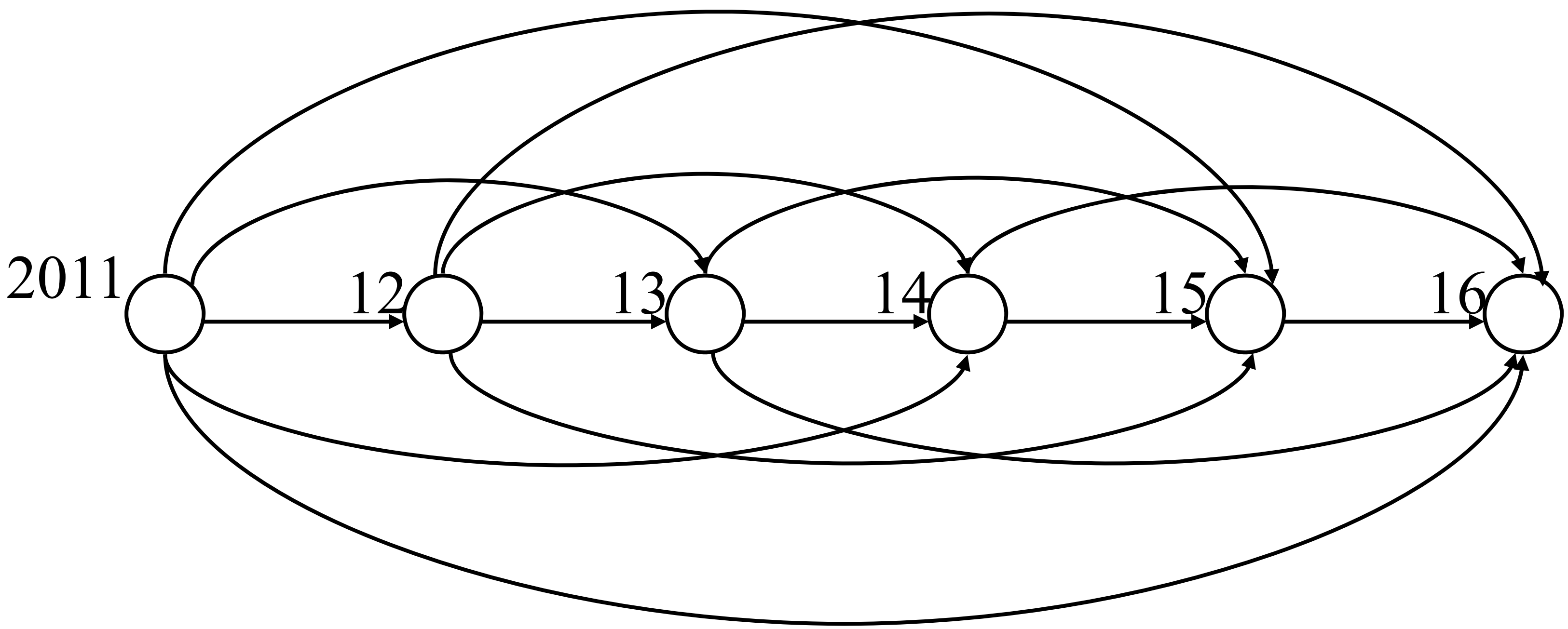
端末維持費

1年間	1
2年間	3
3年間	6
4年間	11
5年間	16

（百万円）

5年間の最も安価な契約内容を提案せよ

応用例1(続き)ネットワークで表現しよう



•費用最小な取替計画を見つけてみよう
•最短路問題との関連は?

ダイクストラ法の高速実現法

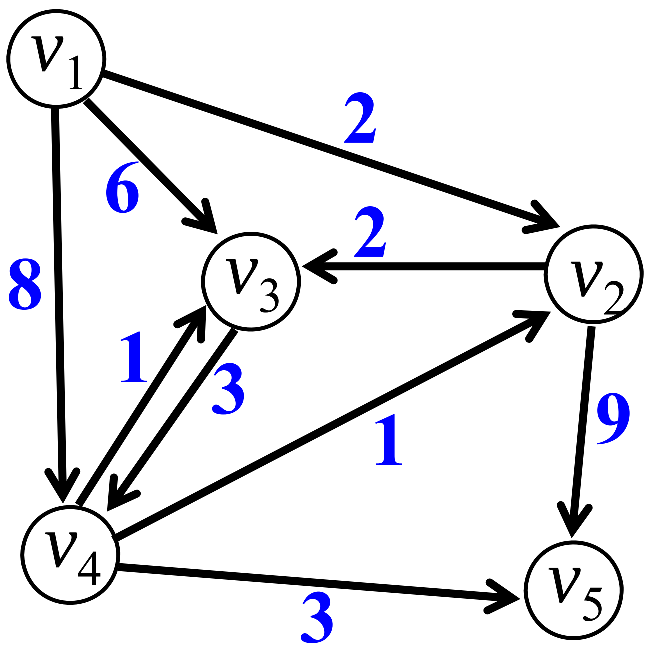
ポテンシャル最小の点を高速に発見する

- 未確定点を配列でなくリスト構造で保持（走査する点数を減らす）
- 未確定点をポテンシャルの値順に整列
→整列アルゴリズムの知識が必要

効率的実装に

基本的なアルゴリズム+
データ構造の知識は
不可欠

演習6-1



(1) 点$v1$を根とした最短路木と，各点までの最短距離を求めよ.

(2) 有向グラフの枝の向きを無視した無向グラフを考える. 最小木とその重さを求めよ.

演習6-2

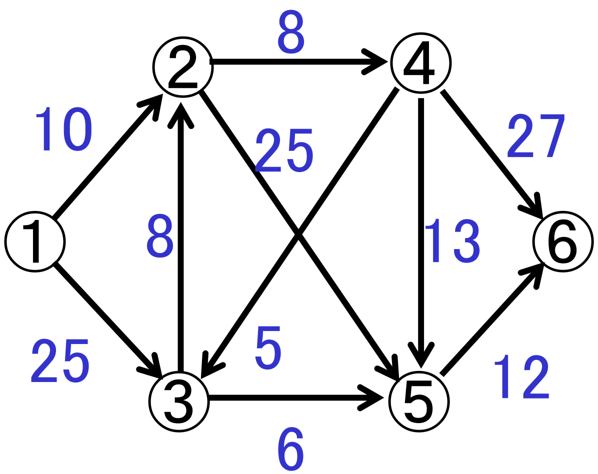
文教警備では9時から17時までの警備を契約社員でまかなう.
警備には常時一人いれば十分である(複数人いても問題はない).
契約社員の中で候補者をリストアップした.

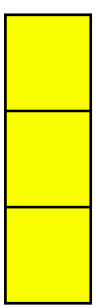
社員ID	A	B	C	D	E	F	G	H
労働時間帯	9-12	9-11	11-13	12-15	12-17	14-17	13-16	16-17
給料	31	14	16	22	38	20	26	9

契約上, 各社員の労働時間帯も給料も変更はできない
1日当たりの総給与を最小にしたい.
誰にいつで働いてもらうかの雇用計画を提案せよ.

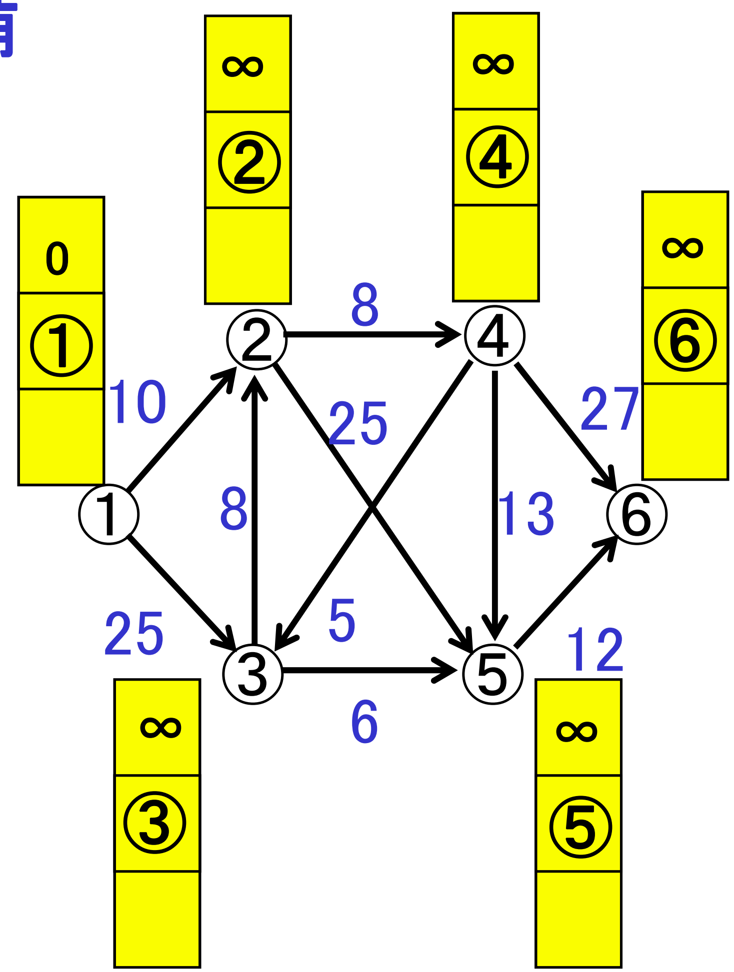
練習1 解答例詳細

①⇒⑥の最短路は?



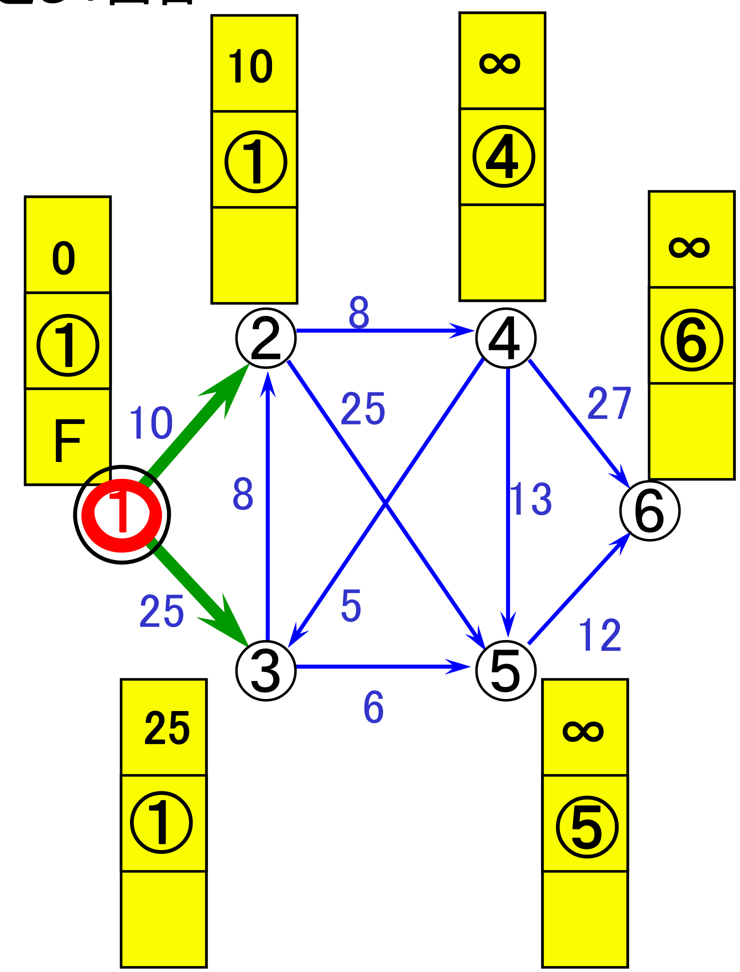


準備

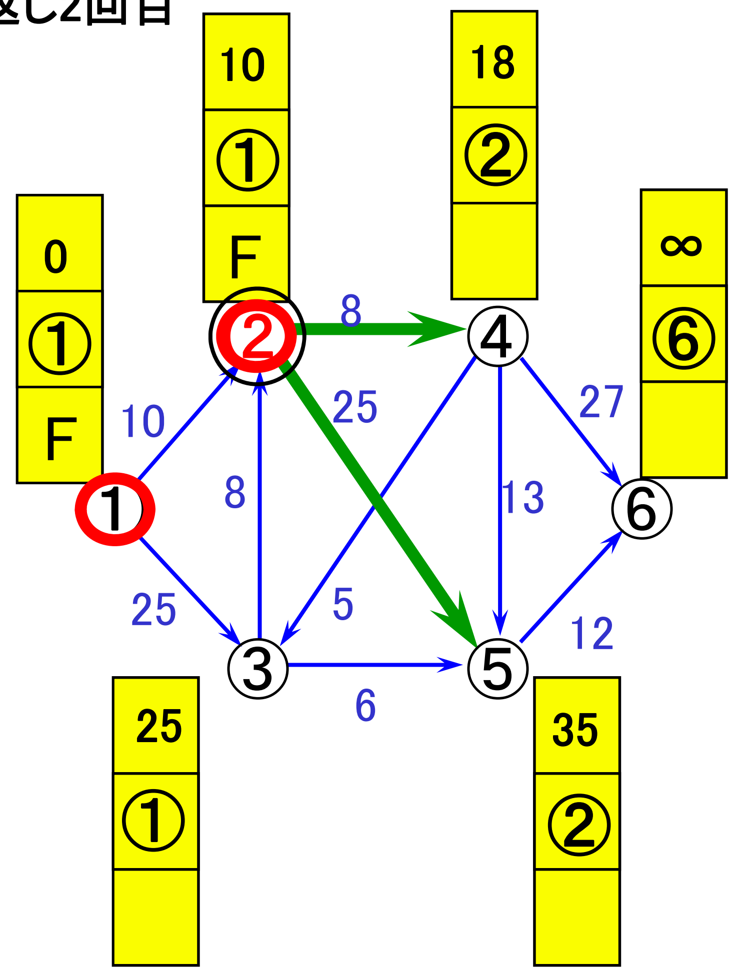


練習1 ポテンシャルの更新

繰り返し1回目

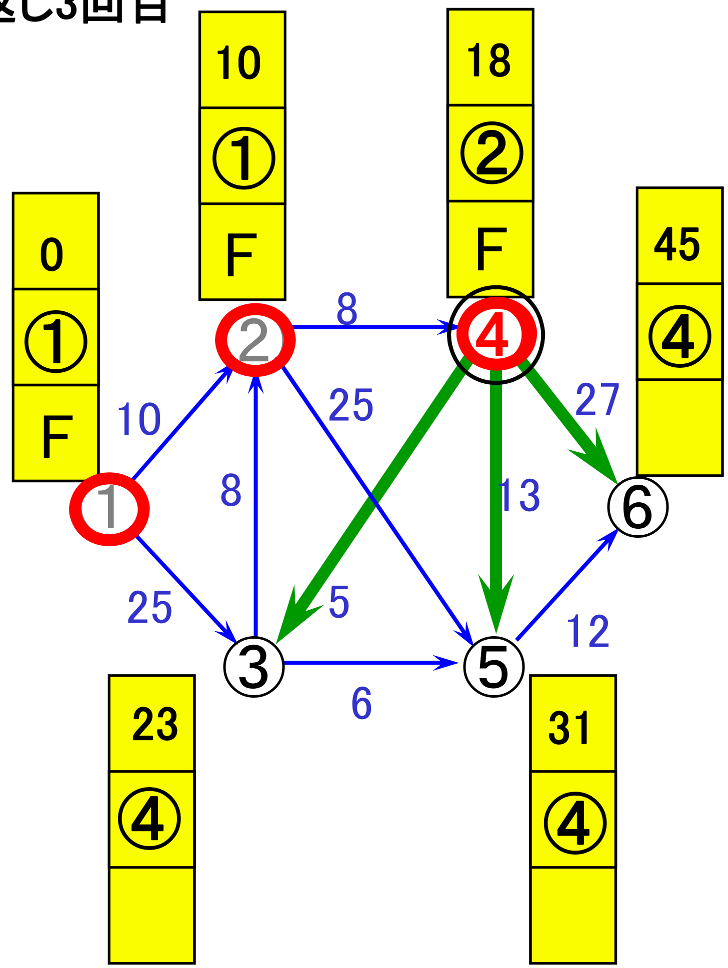


繰り返し2回目

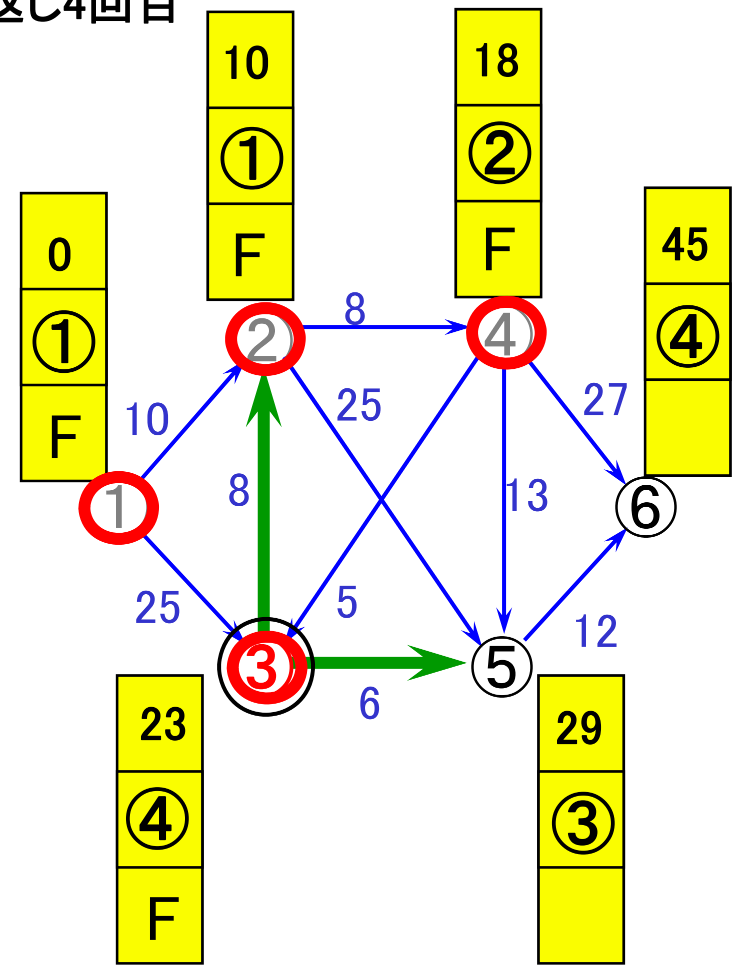


練習1 ポテンシャルの更新(2)

繰り返し3回目

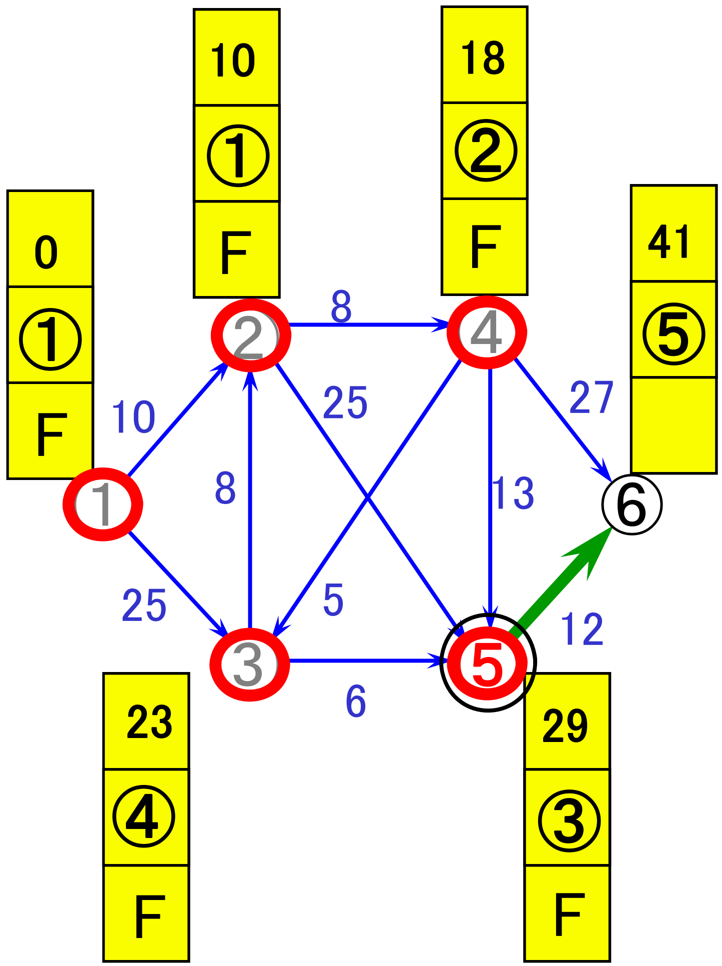


繰り返し4回目

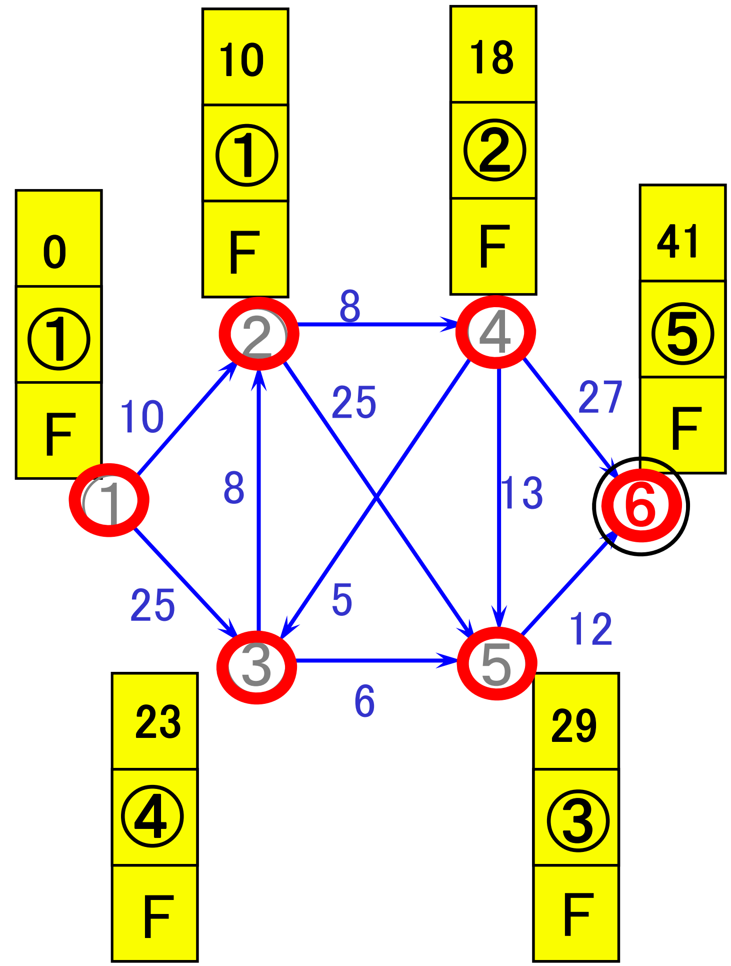


練習1 ポテンシャルの更新(3)

繰り返し5回目

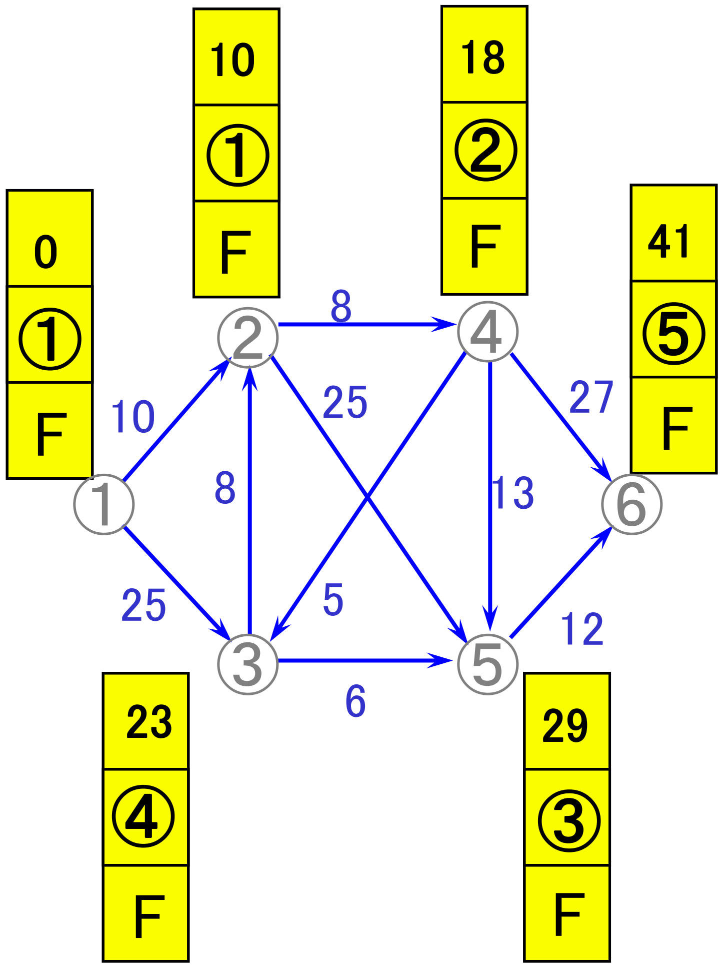


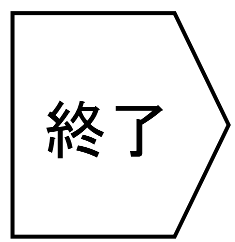
繰り返し6回目



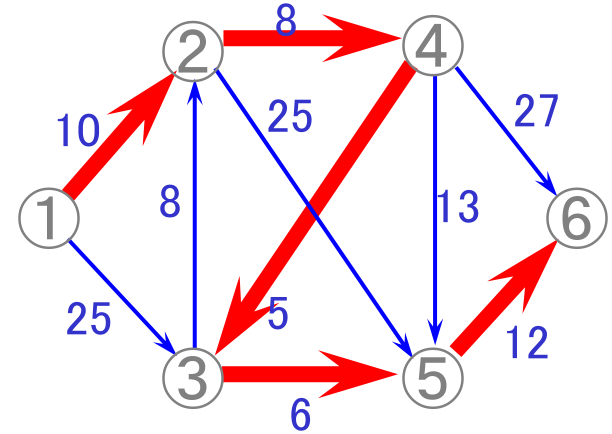
練習1 解答例 まとめ

繰り返し6回目





①を根とした最短路木



最短路の長さは41