

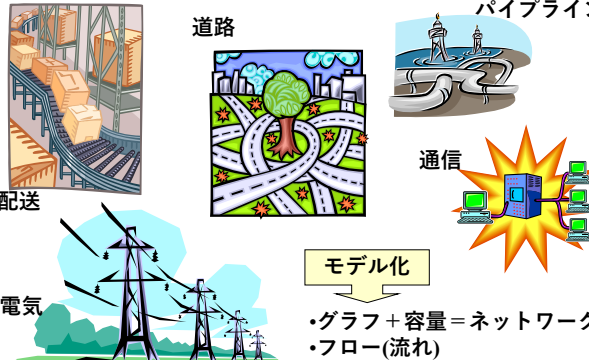


Network Programming III

ものをなるべく多く流す
最大フロー問題

1

ネットワーク上に“モノ”を流す

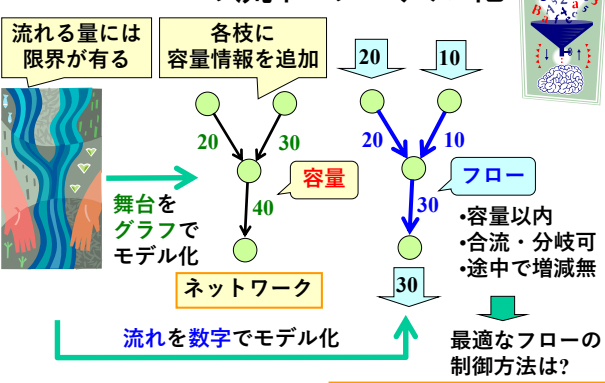


モデル化

- グラフ + 容量 = ネットワーク
- フロー (流れ)

2

モノの流れのモデル化



流れる量には限界が有る

各枝に容量情報を追加

容量

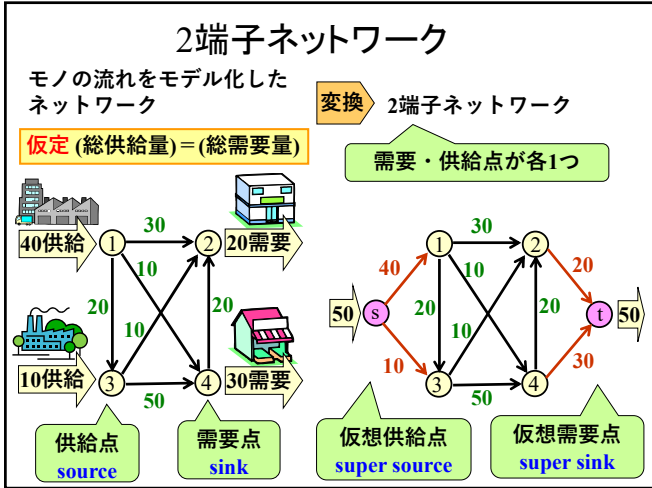
フロー

容量以内
合流・分岐可
途中で増減無

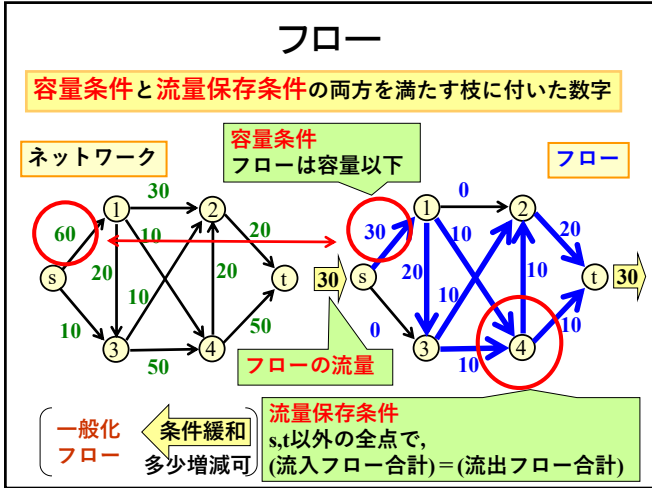
最適なフローの制御方法は?

ネットワークフロー計画問題

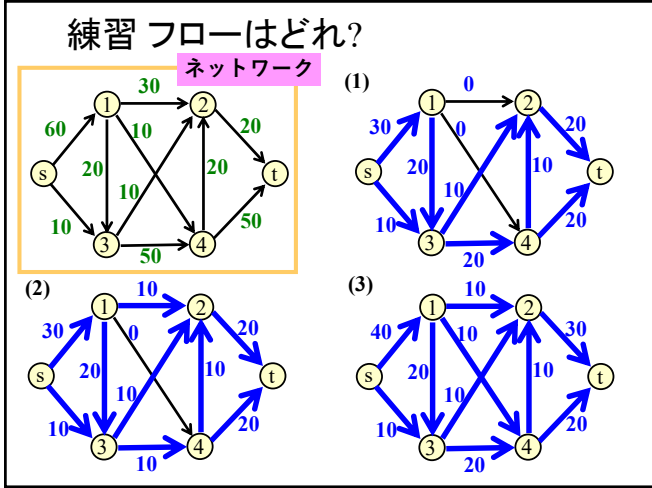
3



4

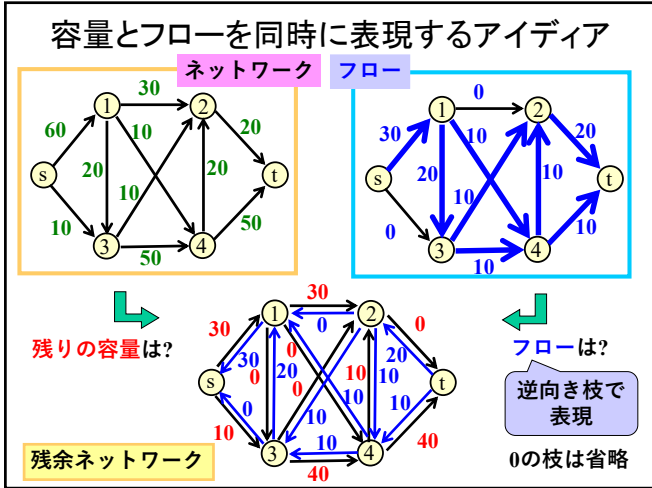


5

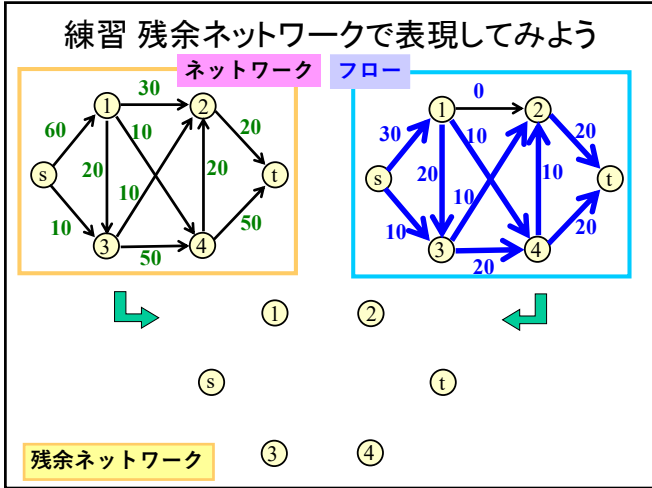


6

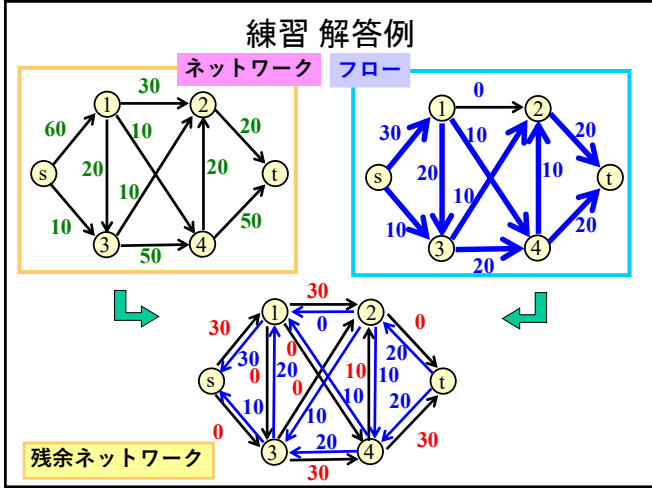
ネットワークモデル分析



7

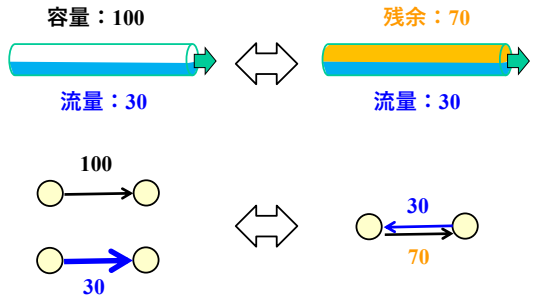


8



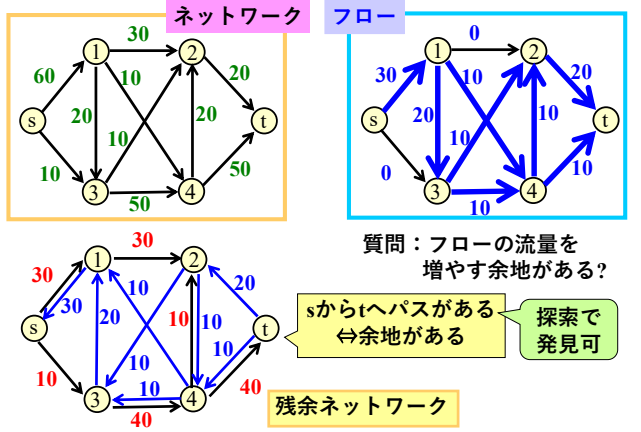
9

残余ネットワーク表現のイメージ



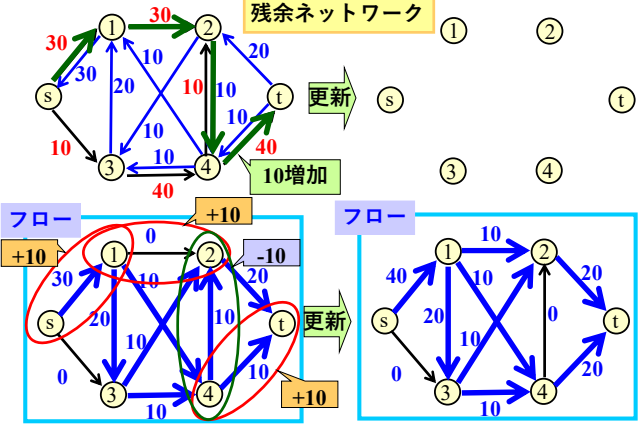
10

残余ネットワーク表現の利点

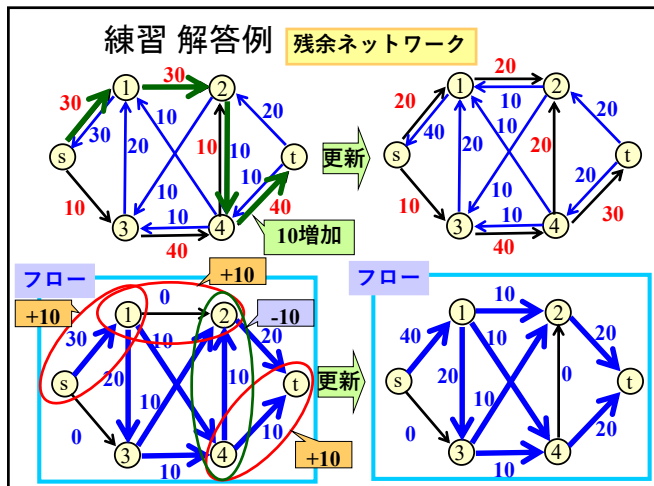


11

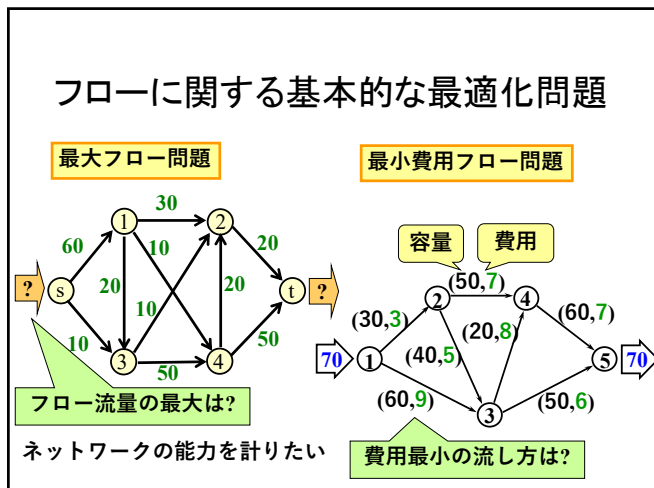
練習 残余ネットワーク上でのフローの変化



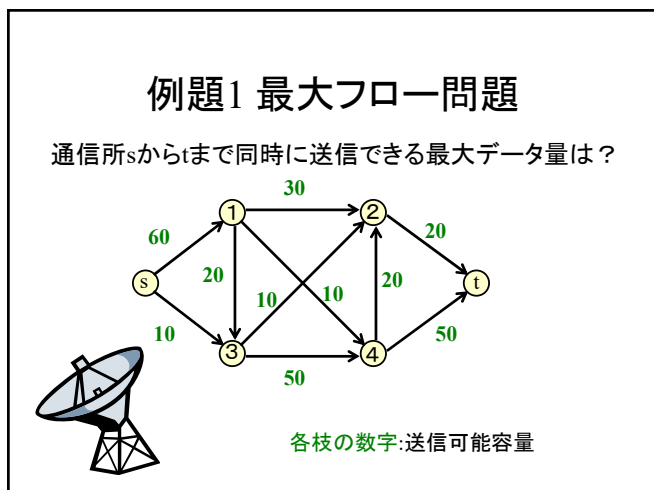
12



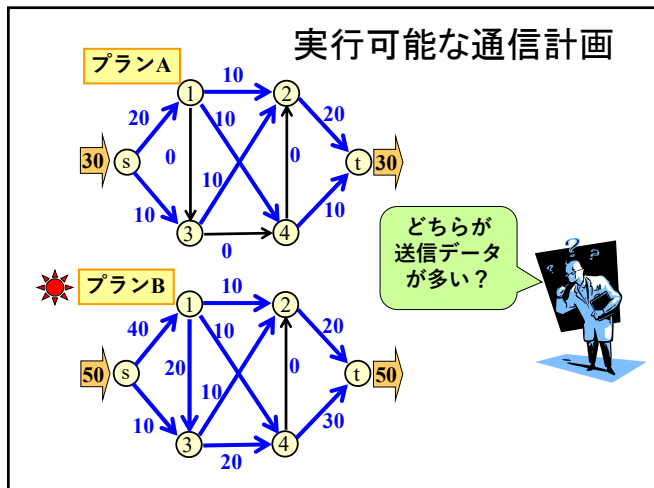
13



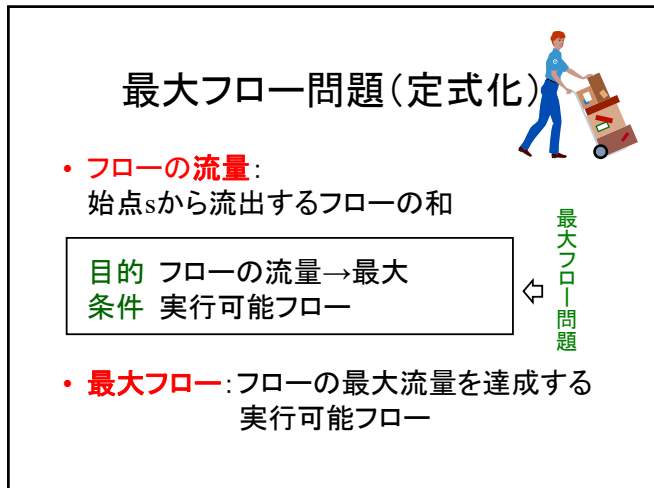
14



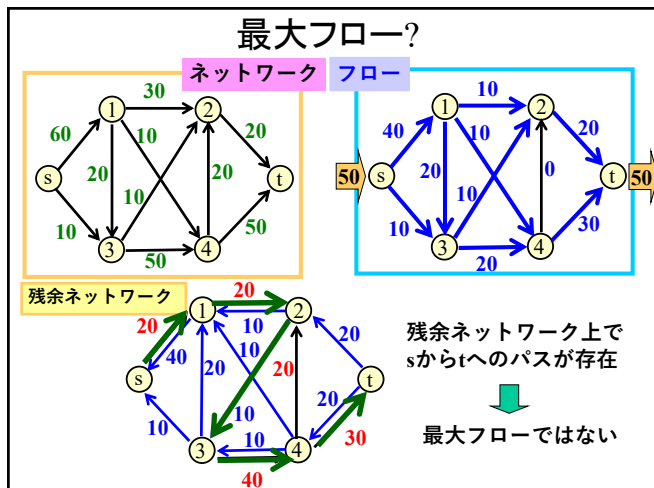
15



16



17



18

最大フローの求め方のアイデア

観察された事実

残余ネットワーク上で
sからtへのパスが存在
↓
最大フローではない

導かれる事実

残余ネットワーク上で
sからtへのパスが存在しない
↑
最大フローである

増加道
(増加パス)

残余ネットワーク上で
sからtへのパスがなくなるまで
フローを増やし続けよう



増加道法

19

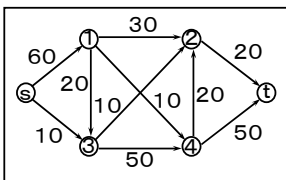
増加道法

- 手順1 各枝のフローを0にする.
- 手順2 **増加道**がある限り以下を繰り返す.
 - 増加道をひとつ見つける.
 - その増加道上の枝容量の最小値分のフローを、残余ネットワーク上で増加道に沿って流す.

残余ネットワーク上で流すので、
実際のネットワーク上ではフローが
減る枝も出てくることに注意!



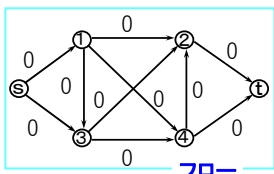
20



容量付きネットワーク

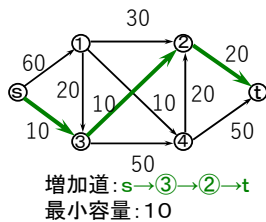
例題1(続) 増加道法

手順1

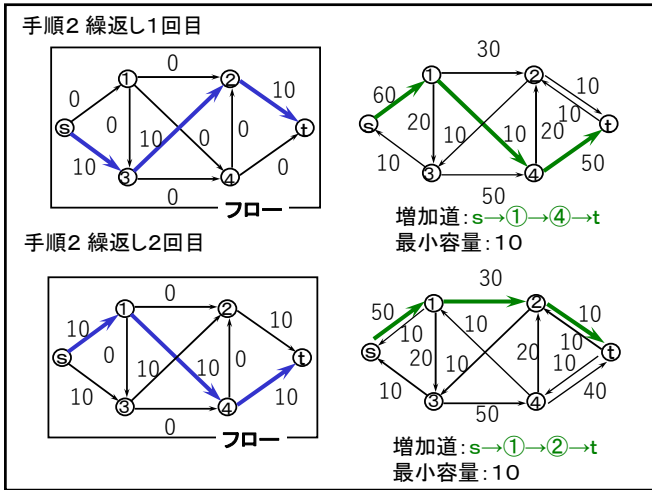


フロー

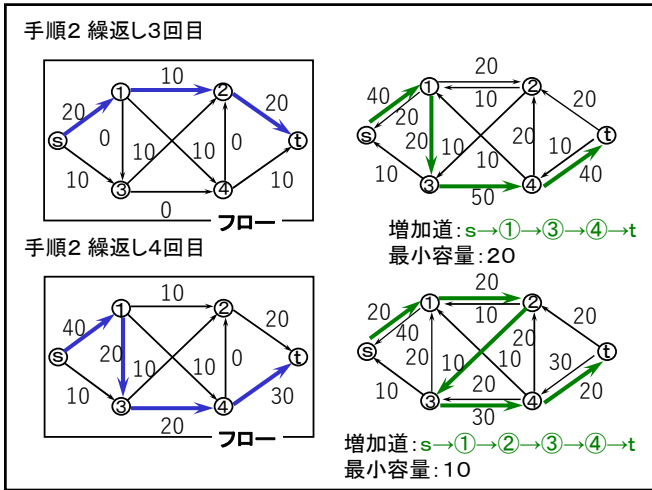
左側のフローに対する
残余ネットワーク



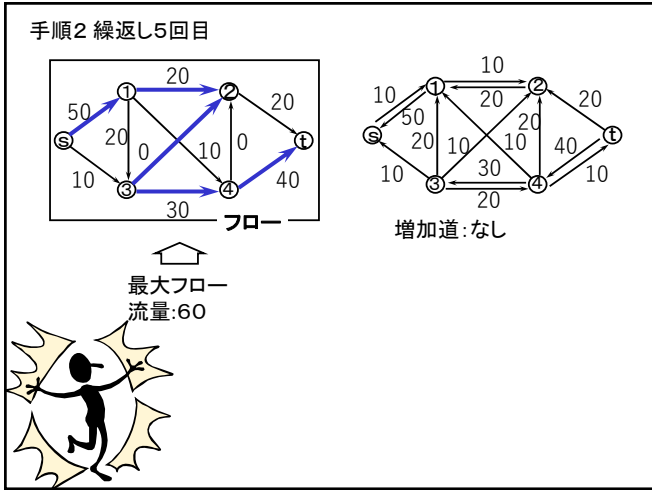
21



22



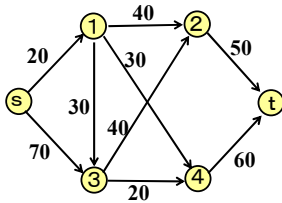
23



24

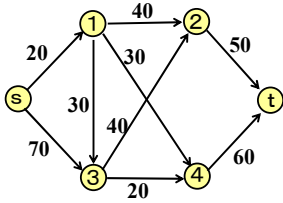
練習 増加道法

増加道法で最大フローを求めよ

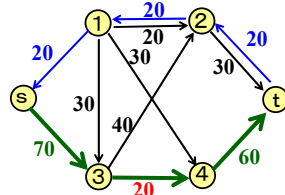
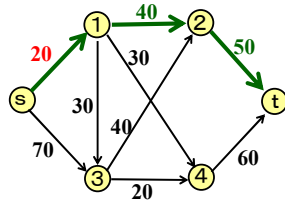


25

練習 解答例

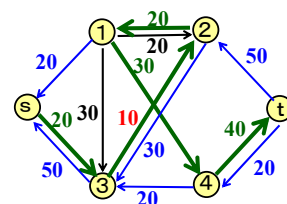
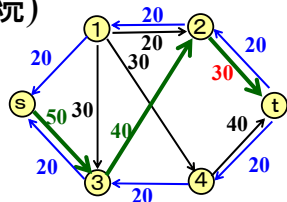


初期の残余ネットワーク
(フローの流量は0)

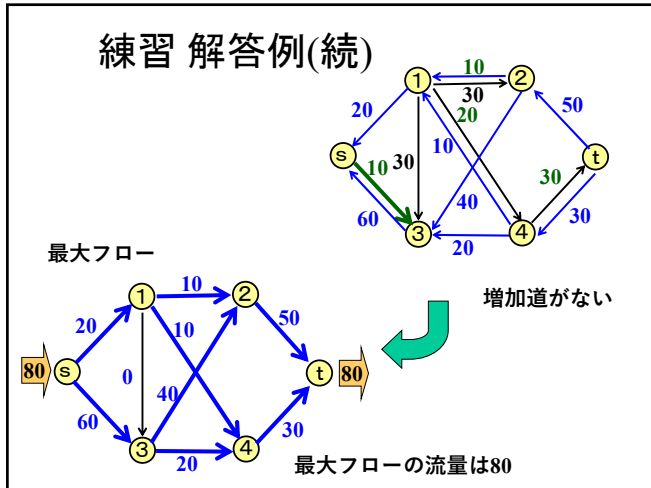


26

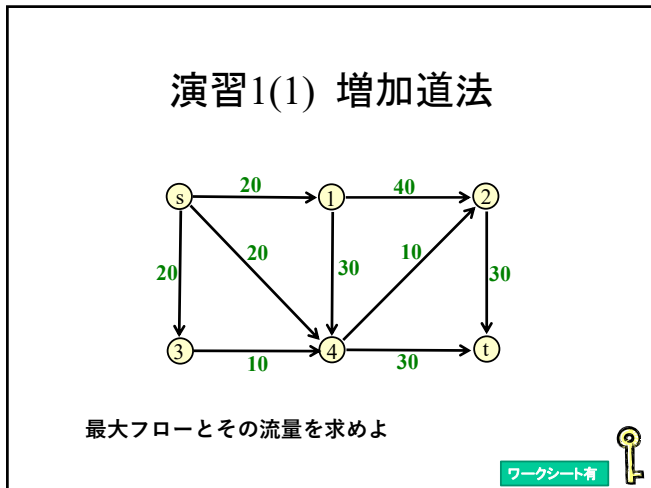
練習 解答例(続)



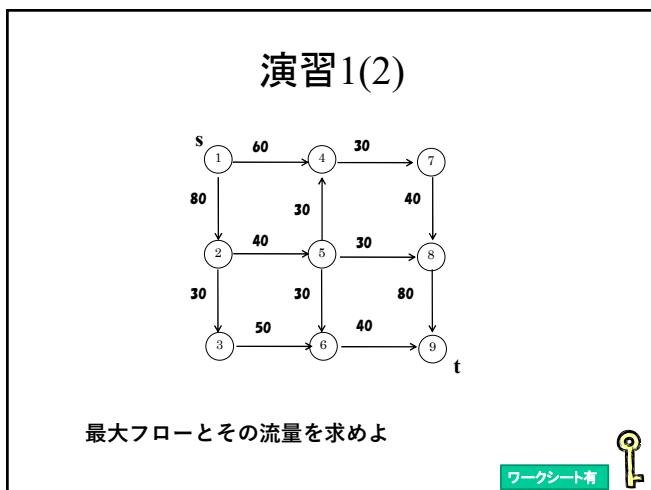
27



28



29



30

演習1(3)

最大フローとその流量を求めよ

ワークシート有

31

ワークシート 演習1(1)

ネットワーク

① 流量0の残余ネットワークを鉛筆で描く
残余ネットワーク

② 増加道発見 → 更新

答：最大フロー

最大フローの流量 =

④ 最大フローを提示

③ 増加道なし → 最大フロー発見

32

ワークシート 演習1(2)

ネットワーク

① 流量0の残余ネットワークを鉛筆で描く
残余ネットワーク

② 増加道発見 → 更新

答：最大フロー

最大フローの流量 =

④ 最大フローを提示

③ 増加道なし → 最大フロー発見

33

ワークシート 演習1(3) 答：最大フロー

ネットワーク

① 流量0の残余ネットワークを鉛筆で描く
残余ネットワーク

② 増加道発見 → 更新

③ 増加道なし → 最大フロー発見

④ 最大フローを提示

最大フローの流量 =

34

ワークシート 演習1(1) 答：最大フロー

ネットワーク

① 流量0の残余ネットワークを鉛筆で描く
残余ネットワーク

② 増加道発見 → 更新

③ 増加道なし → 最大フロー発見

④ 最大フローを提示

最大フローの流量 =

35

ワークシート 演習1(2) 答：最大フロー

ネットワーク

① 流量0の残余ネットワークを鉛筆で描く
残余ネットワーク

② 増加道発見 → 更新

③ 増加道なし → 最大フロー発見

④ 最大フローを提示

最大フローの流量 =

36

解答例

ワークシート 演習1(3) 答: 最大フロー

ネットワーク

① 流量0の残余ネットワークを鉛筆で描く
残余ネットワーク

② 増加道発見 → 更新

③ 増加道なし → 最大フロー発見

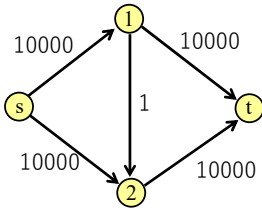
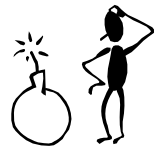
④ 最大フローを提示

最大フローの流量 = 11

37

増加道法の欠点

sからtへの最大フローを求めよ。
手順2を何回繰り返し返す?



演習2 増加道法を改良せよ

38

最大フロー問題の二大基本解法

• 増加道法 (Ford-Fulkerson)

- 簡単な手順の繰り返し。直感的に妥当性が理解できる。計算時間が多くかかる。

改良: Dinicの解法

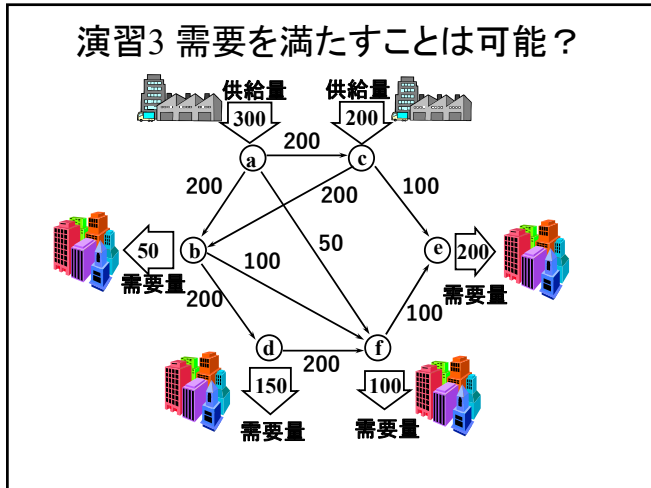
• Preflow-Push解法

- 工夫を加えることで高速に最大フローを求める。

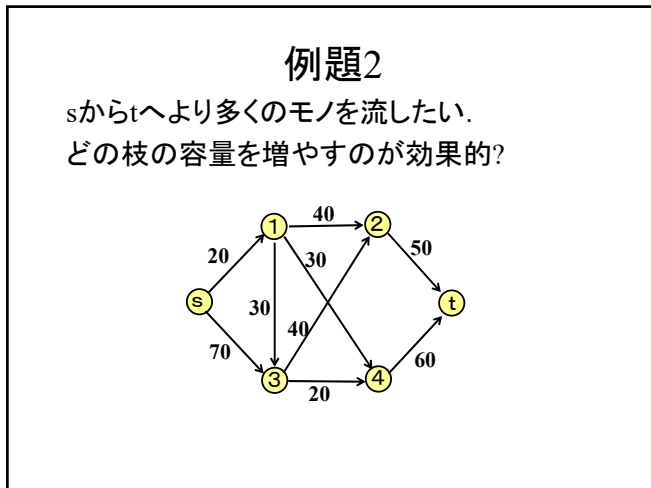


仮定: ネットワークの容量は整数で与えられる。

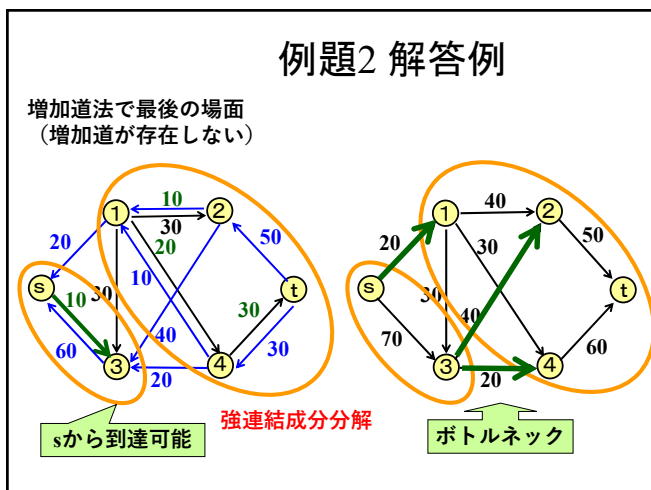
39



40



41



42

カット

sを含み, tを含まない点の部分集合を**カット**という.
 ※ネットワーク上にカットはたくさんある

カットの容量: カットから出ている枝の容量の総和

※上記のカットを特に「s-tカット」と呼ぶ場合もある

43

最小カット

最小カット: 容量最小のカット

演習7-4: 以下のネットワークの最小カットを見つけよう

➡ **最小カット問題**

44

最大フローと最小カットの関係

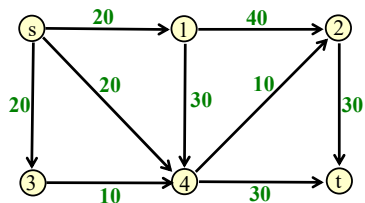
- **最大フローの流量 = 最小カットの容量**
 (最大フロー・最小カット定理)
- 最小カットは最大フロー問題から導出可能
 - 導出概要: 容量いっぱい流れ, 始点sと終点tを分割する枝集合 → 最小カット.

⇒CPMを実行する時の最小カットは最大フロー問題に帰着することにより得られる.

45

演習4(1)

• 最小カットをすべて図示せよ. その容量 = _____

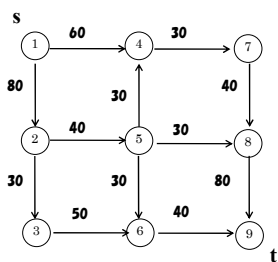


演習1で導出した最大フローの(残余ネットワーク)情報を利用しよう

46

演習4(2)

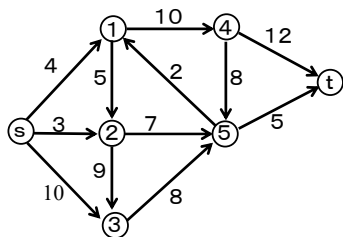
• 最小カットをすべて図示せよ. その容量 = _____



47

演習 4(1)

• 最小カットをすべて図示せよ. その容量 = _____



48

演習4(1) 解答例 答：すべての最小カット

増加道がなくなった残余ネットワーク

強連結成分分解

カットの容量 = 50

49

演習4(2) 解答例 答：すべての最小カット

増加道がなくなった残余ネットワーク

強連結成分分解

カットの容量 = 100

50

演習4(3) 解答例 答：すべての最小カット

増加道がなくなった残余ネットワーク

強連結成分分解

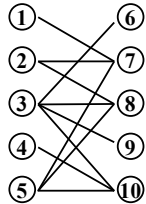
カットの容量 = 11

51

例題3 Shall we dance?



社交ダンスパーティーに男性・女性5人ずつ集まった。幹事がアンケートをとったところ、パートナーになってもよいとお互い思っているペアは以下の組合せであることがわかった。



男性 女性

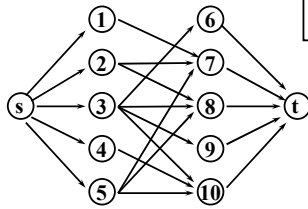
さて、なるべく多くのペアを組みたいが最大で何組できるか？その組み方は？

同時にペアになれる組合せを「**マッチング**」、このような問題を「**マッチング問題**」とよぶ。

52

マッチング問題の解法

以下のように変形し最大フローを求める。



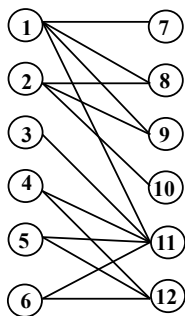
各枝の容量はすべて1

- ・「フローが流れている元の枝⇔マッチング」⇐なぜか？
- ・「最大フロー⇔最大マッチング」⇐なぜか？

演習5
求めてみよう！

53

演習6 最大マッチングを求めよう

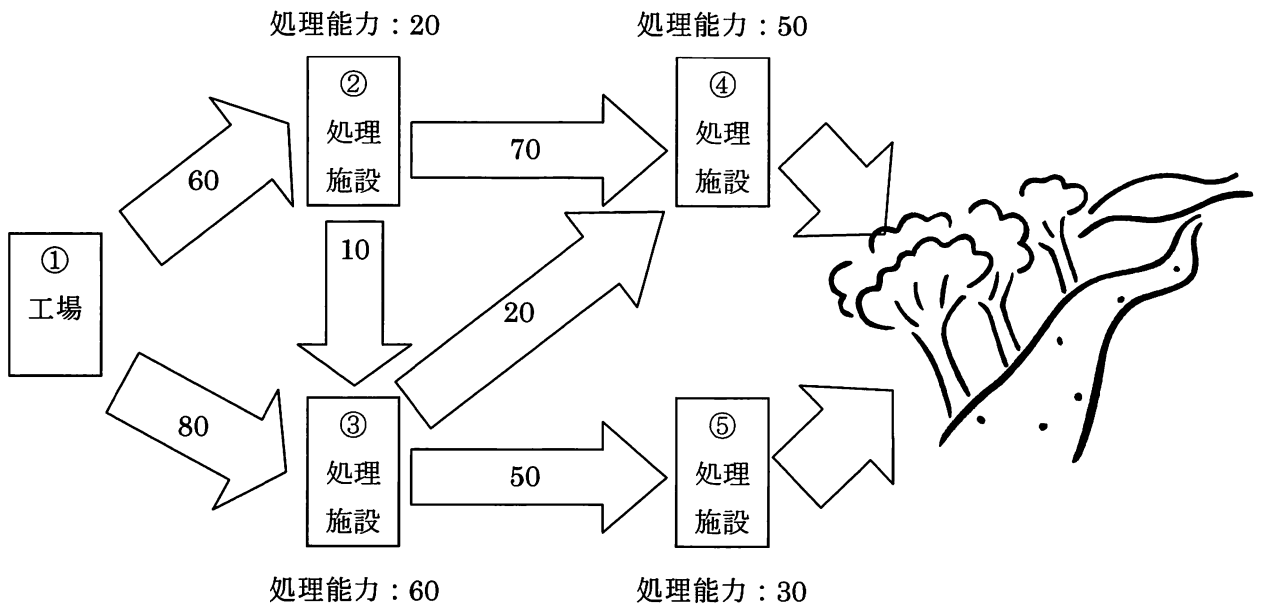


54

演習 7

文教工業の工場（①）から排出され川に至る汚水処理網がある（下図参照）。②，③，④，⑤は汚水のある段階の処理施設を，矢線は汚水（中間処理済の水）を誘導する水路を示す。各汚水処理施設には設備の関係で単位時間当たりの処理量には限度がある。また，誘導水路にも単位時間当たりに流すことができる容量がある。ただし，処理施設④，⑤から川に流れる水路には事実上容量制限はない。

1. この汚水処理網が単位時間当たりに処理できる汚水の最大量を求めよ。
2. この汚水処理網の処置施設・誘導水路を改良し能力を高めることによって単位時間当たりにより多くの汚水を処理できるようにしたい。どの処理施設・誘導水路を改良すれば良いか理由と共に提案せよ。



演習 8

文教石油では、油田で原油を算出し、2つの精製工場 A,B のいずれかで精製し、港に輸送している。油田、精製工場、港をつなぐパイプラインの敷設状況は下図のとおりである。精製工場 A から精製工場 B にパイプラインがつながっているが、精製は一度行えばよく、精製工場 A で精製した原油は精製工場 B にて精製する必要はない（精製工場 A で精製されなかった原油は、精製工場 B で精製されなくてはならない）。各パイプラインの1日当たり通過可能量が矢線に付してある。また、精製工場 A の1日の精製可能量は40、精製工場 B の1日の精製可能量は30である。次の問いに答えよ。

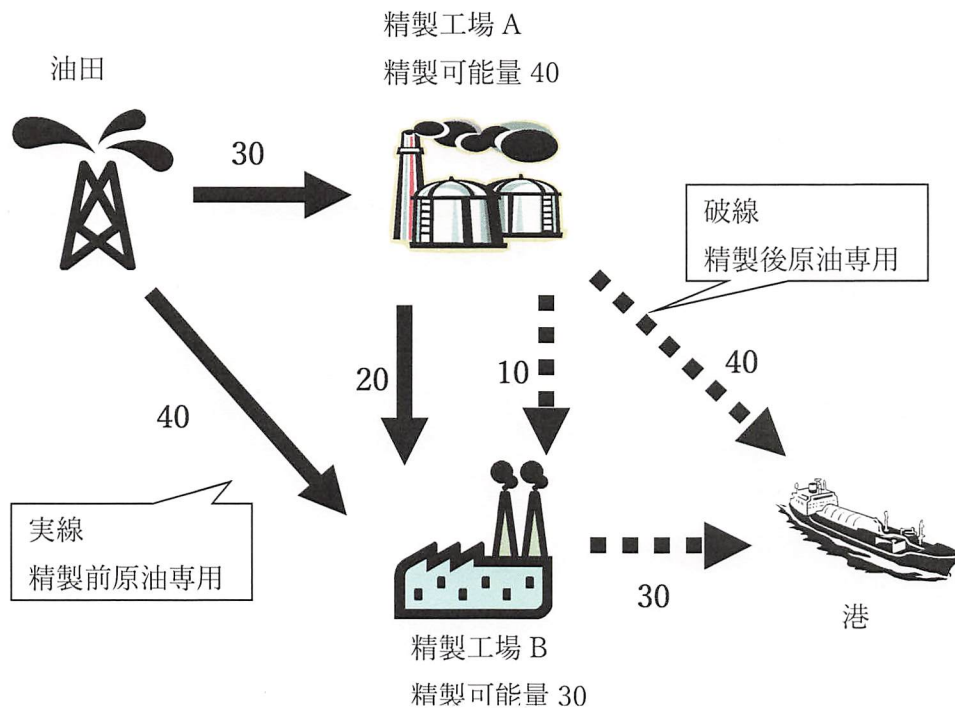


図: パイプラインの敷設状況

- (1) 油田からの原油の産出量にも港での受け入れ量にも制限がないとしたとき、この体制で油田から港に1日に送ることができる(a)原油の最大量と(b)そのフローの両方を示せ。(導出過程も解答用紙に記述すること。)
- (2) 港に送る最大量をさらに増やしたい。6本あるパイプラインと精製工場 A,B の8設備の中で1つの設備のみ強化(容量または精製量を増やすこと)が可能である。どの設備を強化すべきか適切な理由を添えて提案せよ。