

Linear Programming I

線形計画の解を導く素朴な方法達

線形計画とは (Linear Programming)

えるぴー
省略して「LP」と呼ぶ

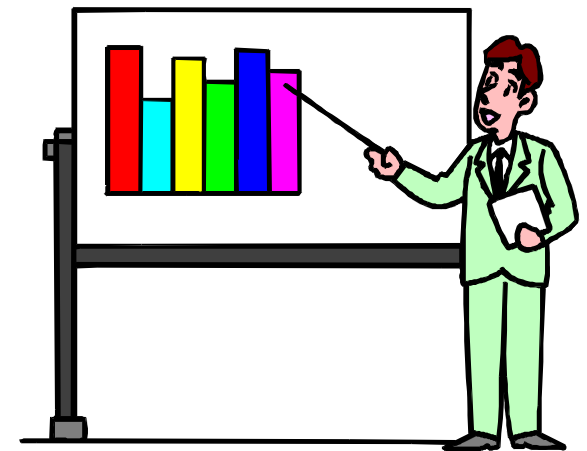
- 数理計画の中で基礎的な問題

目的関数: 線形

制約式: すべて線形

制約式の
数は有限

数理計画全般に影響する
興味深い性質が得られる



線形計画に対する主な解法

ここで学ぶこと

- **図**を利用した解法
 - 2(~3)変数の問題の最適解を図で導く
 - **総当たり法**
 - 図は用いない. シンプレックス法の基礎
-
- **シンプレックス法** (Simplex method)
 - **内点法** (Interior point method)
 - 大規模な問題でも高速に最適解を求める

学習用

実用

例題1 生産計画



- 2つの液体製品P,Qは機械A,Bを用いて加工される
- 利益が最大になる1週間の製品P,Qの加工量は？

	液体P 1ml	液体Q 1ml	使用可能時間
機械A	3(h)	1(h)	45(h/週)
機械B	1(h)	2(h)	40(h/週)
利益	6(万円)	5(万円)	

⇒ 定式化してみよう

例題1(続) グラフを用いた解法

例題1を解いてみよう.

例題1を定式化

x_1 : 製品Pの生産量(ml)

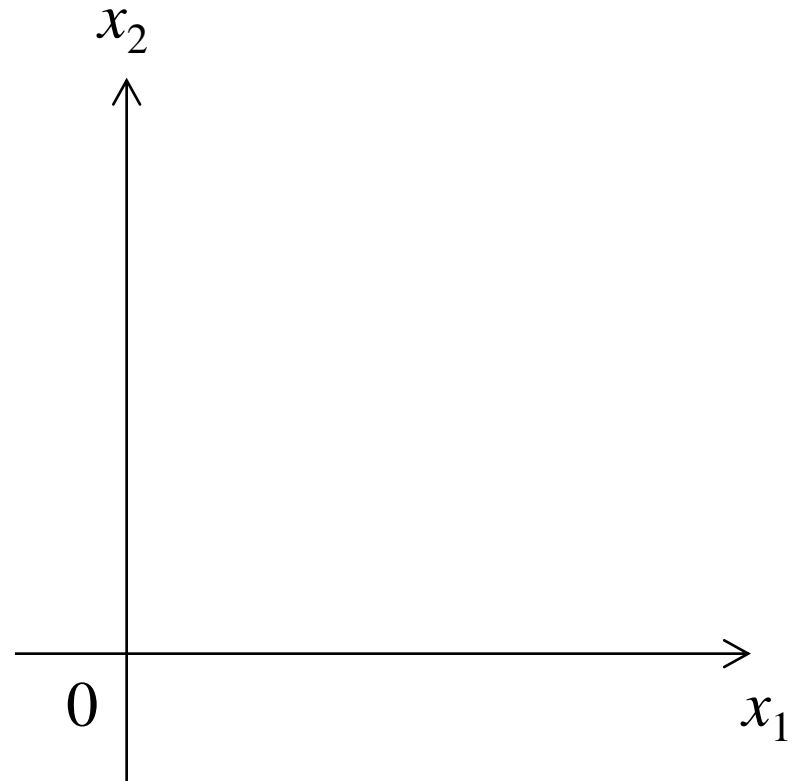
x_2 : 製品Qの生産量(ml)

$$\max. z=6x_1+5x_2$$

$$\text{s.t. } 3x_1+x_2 \leq 45$$

$$x_1+2x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



作業1: 制約式を x_1 - x_2 平面に図示せよ.

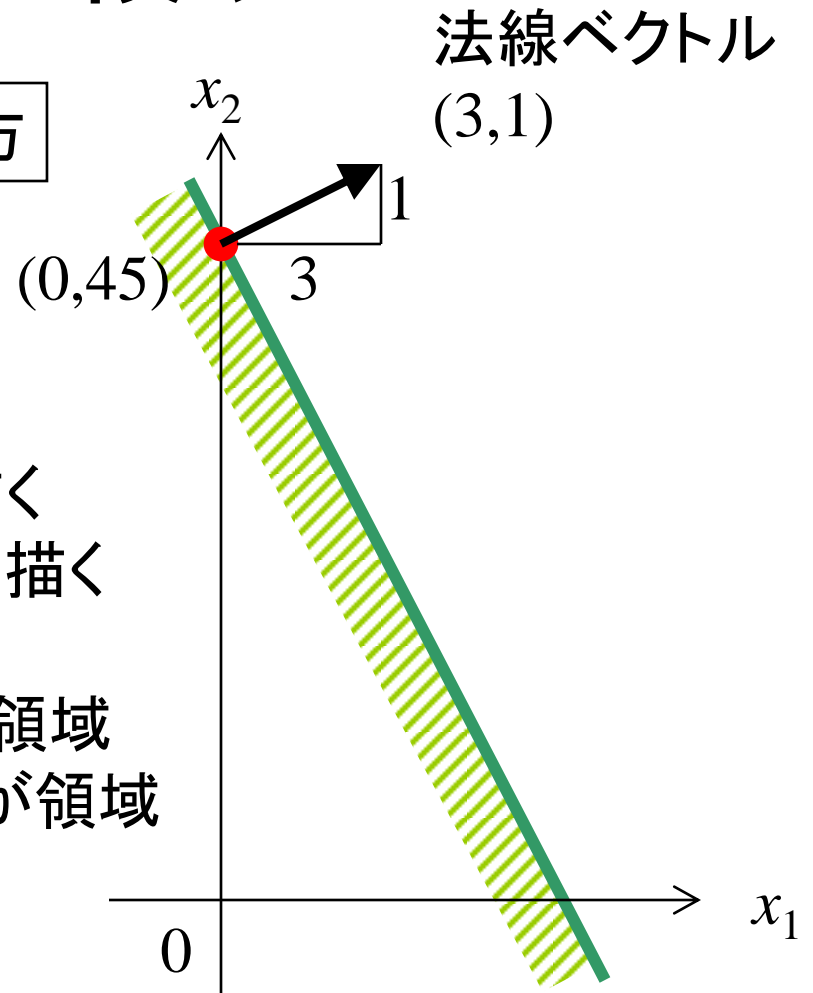
不等式と領域

$3x_1 + x_2 \leq 45$ の示す領域の描き方

① $3x_1 + x_2 = 45$ の直線を描く

- 直線が通る一点を見つける
- その点から法線ベクトルを描く
- 法線ベクトルに直交し直線を描く

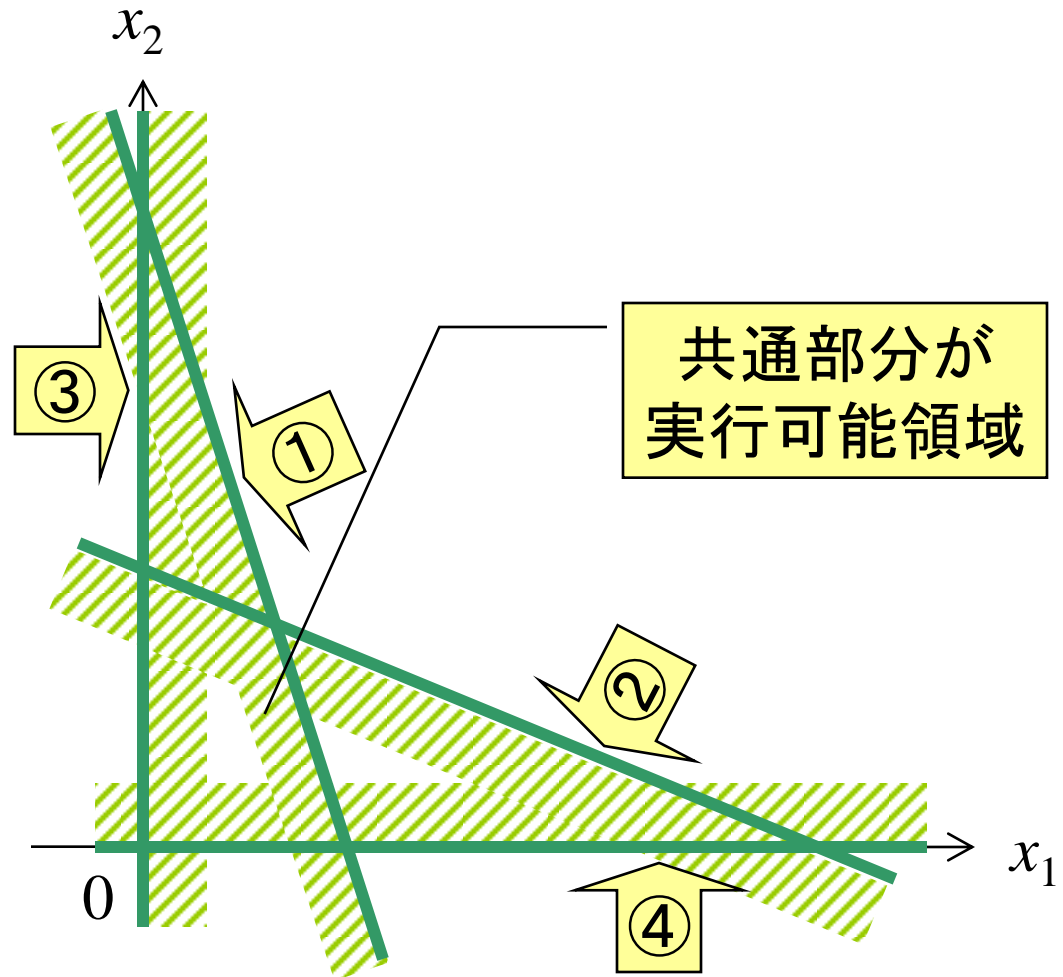
② \geq の時: 法線ベクトルの向きが領域
 \leq の時: 法線ベクトルと逆向きが領域



実行可能領域の図示

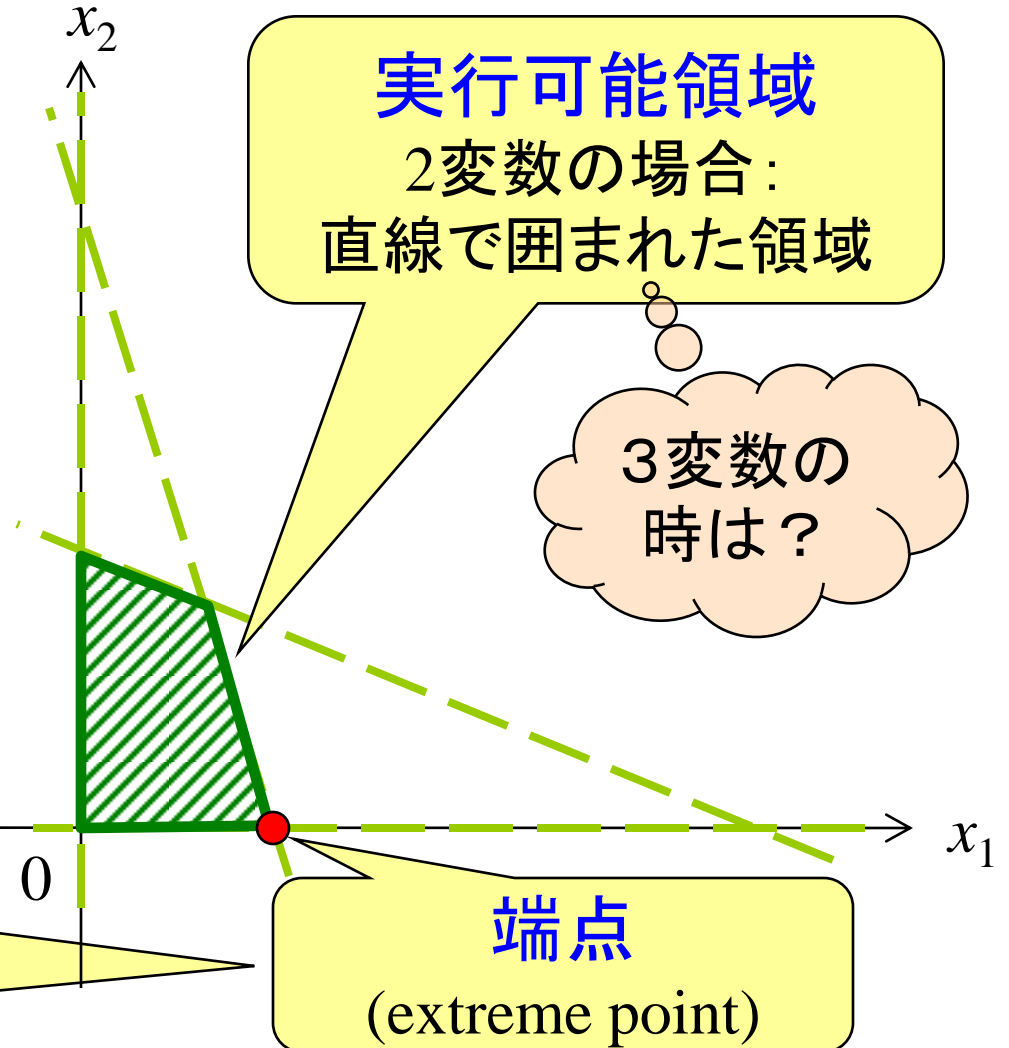
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 45 & \textcircled{1} \\ x_1 + 2x_2 \leq 40 & \textcircled{2} \\ x_1 \geq 0 & \textcircled{3} \\ x_2 \geq 0 & \textcircled{4} \end{cases}$$

実行可能領域は
これらの不等式を
全て満たす点の集合



実行可能領域の特徴

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 45 & \textcircled{1} \\ x_1 + 2x_2 \leq 40 & \textcircled{2} \\ x_1 \geq 0 & \textcircled{3} \\ x_2 \geq 0 & \textcircled{4} \end{cases}$$



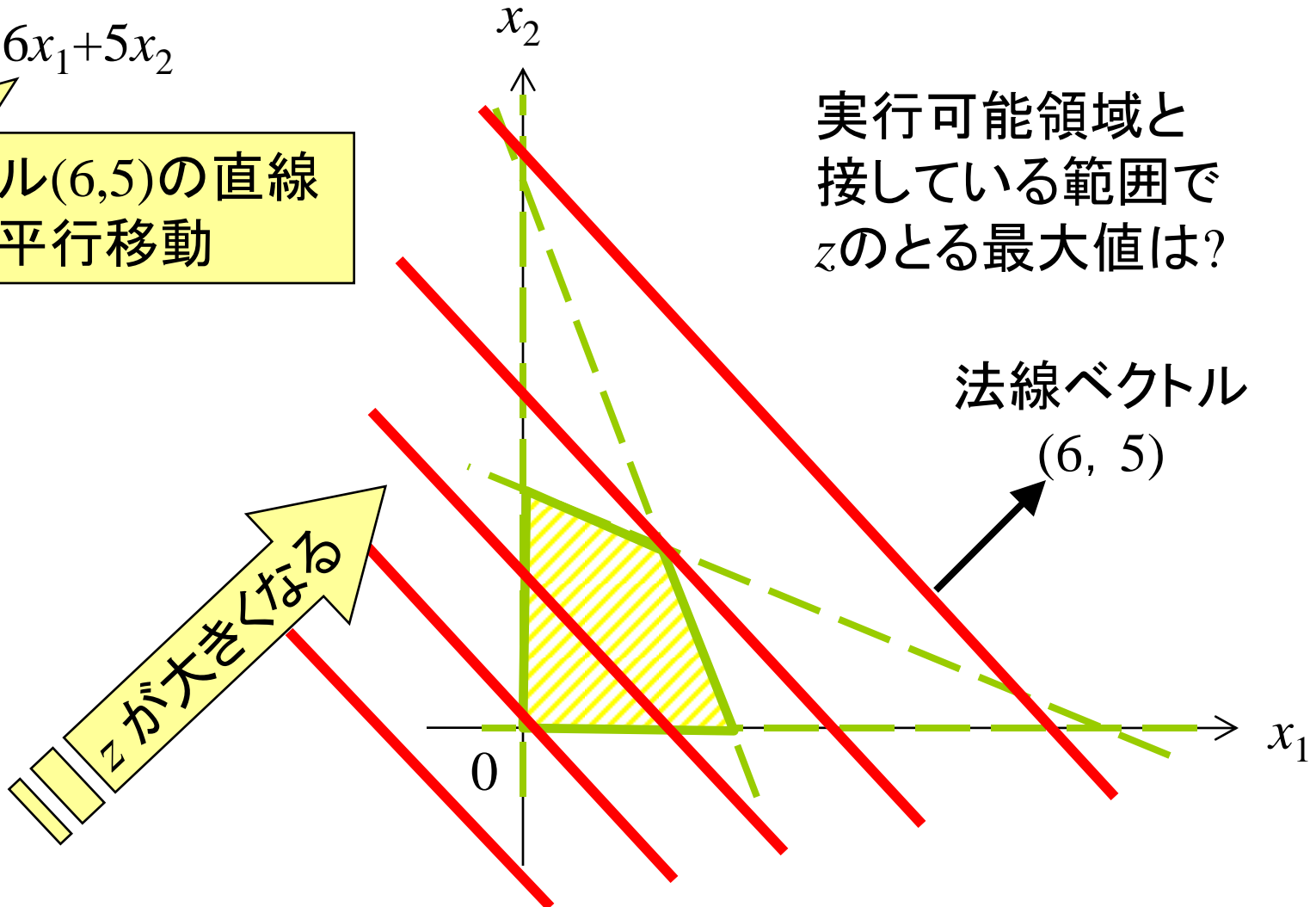
実行可能領域に
端点はたくさん存在

目的関数を動かす

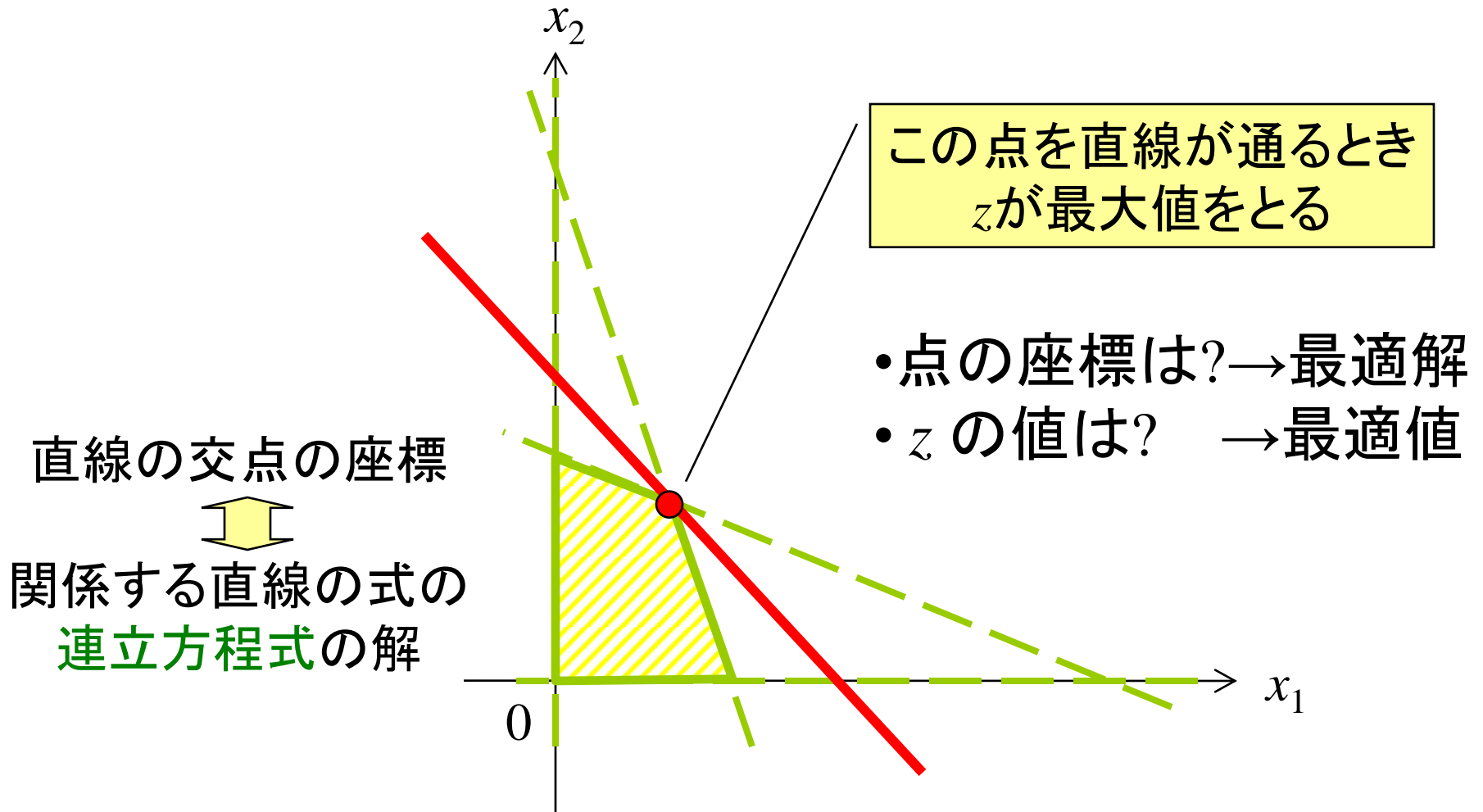
目的関数 $z=6x_1+5x_2$

- 法線ベクトル(6,5)の直線
- z が変化→平行移動

実行可能領域と接している範囲で z のとる最大値は?



最適値・最適解を見つける



演習1 数式での表現

3種類の原液A,B,Cから、
2つの粉末製品P,Qを製造



	製品P 1(kg)	製品Q 1(kg)	使用可能量
原液A	15(kl)	11(kl)	1650(kl/日)
原液B	10(kl)	14(kl)	1400(kl/日)
原液C	9(kl)	20(kl)	1800(kl/日)
利益	5(万円)	4(万円)	

利益が最大になる製品P,Qの1日の生産量は？
問題を数理モデル化しなさい。

復習：連立方程式を解く

実行可能領域の端点を求める

||

連立方程式を解く

計算機向きの
うまい解き方があるんだよな。
高校までは習わないけど...

⇒(復習) ガウスの消去法



図を用いる解法の欠点

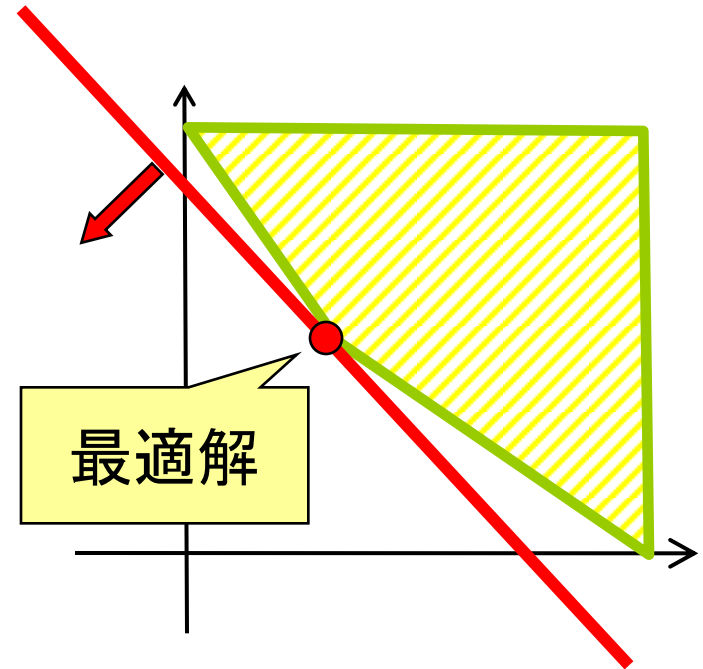
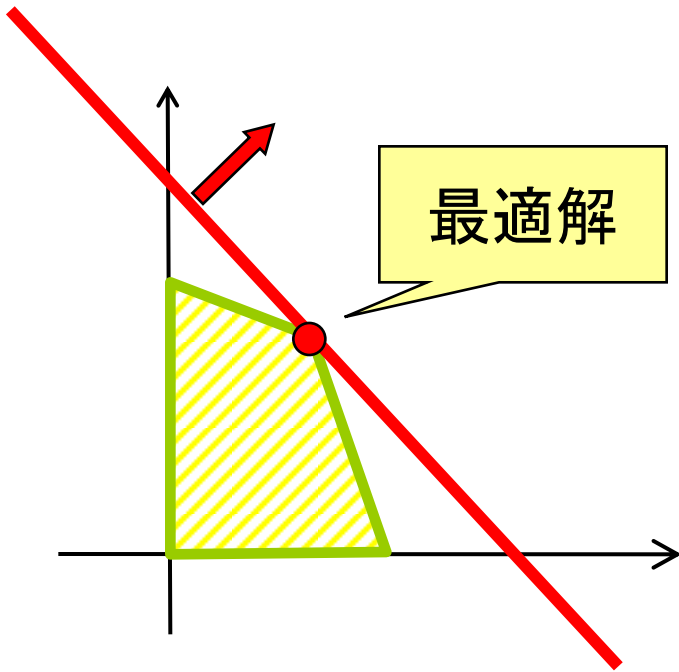
- 2～3変数までの問題にのみ適応可能
 - 現実的に解きたい問題: 数十～数百万変数
- 計算機で実行しにくい

図を用いない解法を考えよう!!



最適解を発見するヒント

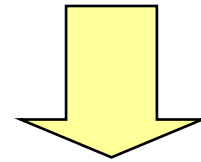
最適解は実行可能領域のどんな場所にある？



最適解の持つ性質

重要な性質:

最適解(の少なくとも一つ)は実行可能領域の端点に存在



実行可能解の端点をすべて探索



その中から最適解を見つける

総当たり法



実行可能領域の端点と式の関係

例題1より

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 45 & \textcircled{1} \\ x_1 + 2x_2 \leq 40 & \textcircled{2} \\ x_1 \geq 0 & \textcircled{3} \\ x_2 \geq 0 & \textcircled{4} \end{cases}$$

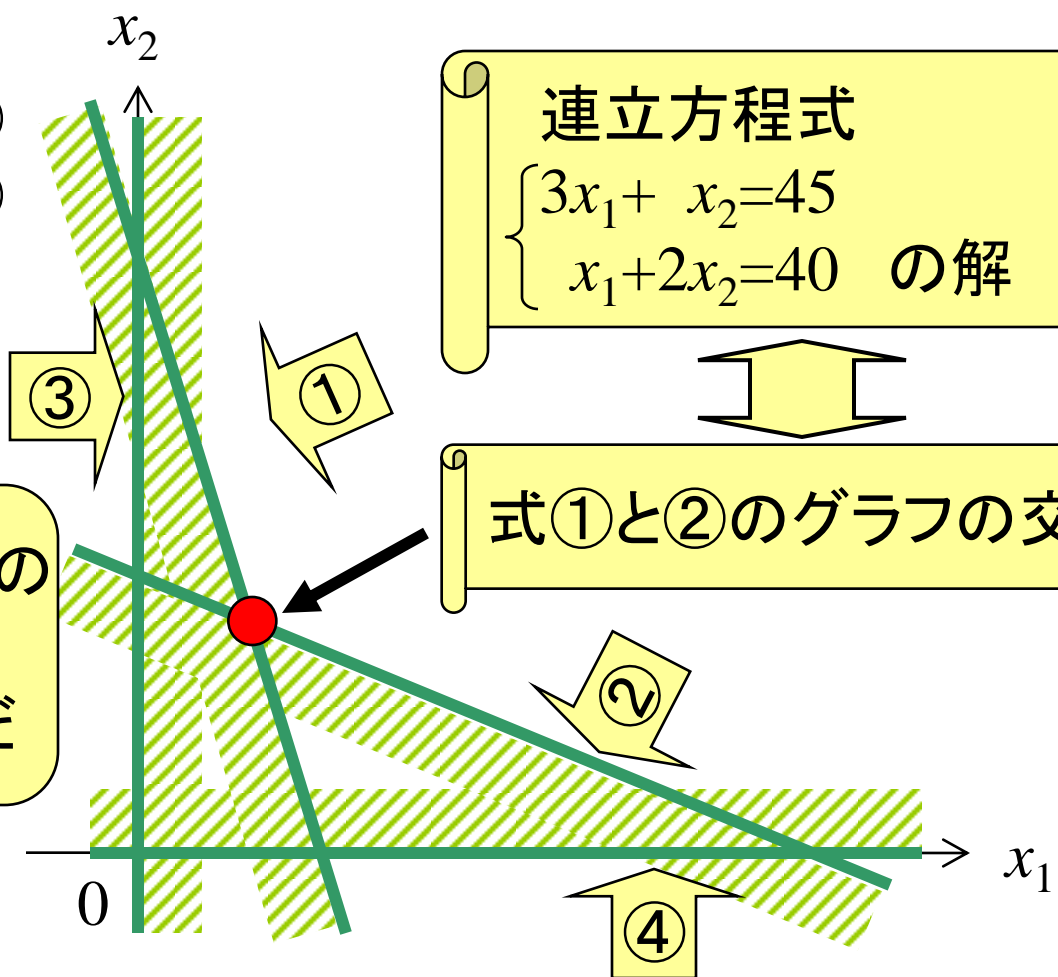
連立方程式

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 45 \\ x_1 + 2x_2 = 40 \end{cases} \text{ の解}$$

式①と②のグラフの交点

?
すべての組合せの
連立方程式を
解けばいいんだ

解いてみよう!!



演習2 例題1の全交点を探そう

すべての組合せの連立方程式とその解

式の組合せ	x_1 の値	x_2 の値	実行可能?	目的関数値
①と②				
①と③				
①と④				
②と③				
②と④				
③と④				

目的関数 : $\max. z = 6x_1 + 5x_2$

実行可能領域の端点？

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 45 & \textcircled{1} \\ x_1 + 2x_2 \leq 40 & \textcircled{2} \\ x_1 \geq 0 & \textcircled{3} \\ x_2 \geq 0 & \textcircled{4} \end{cases}$$

連立方程式

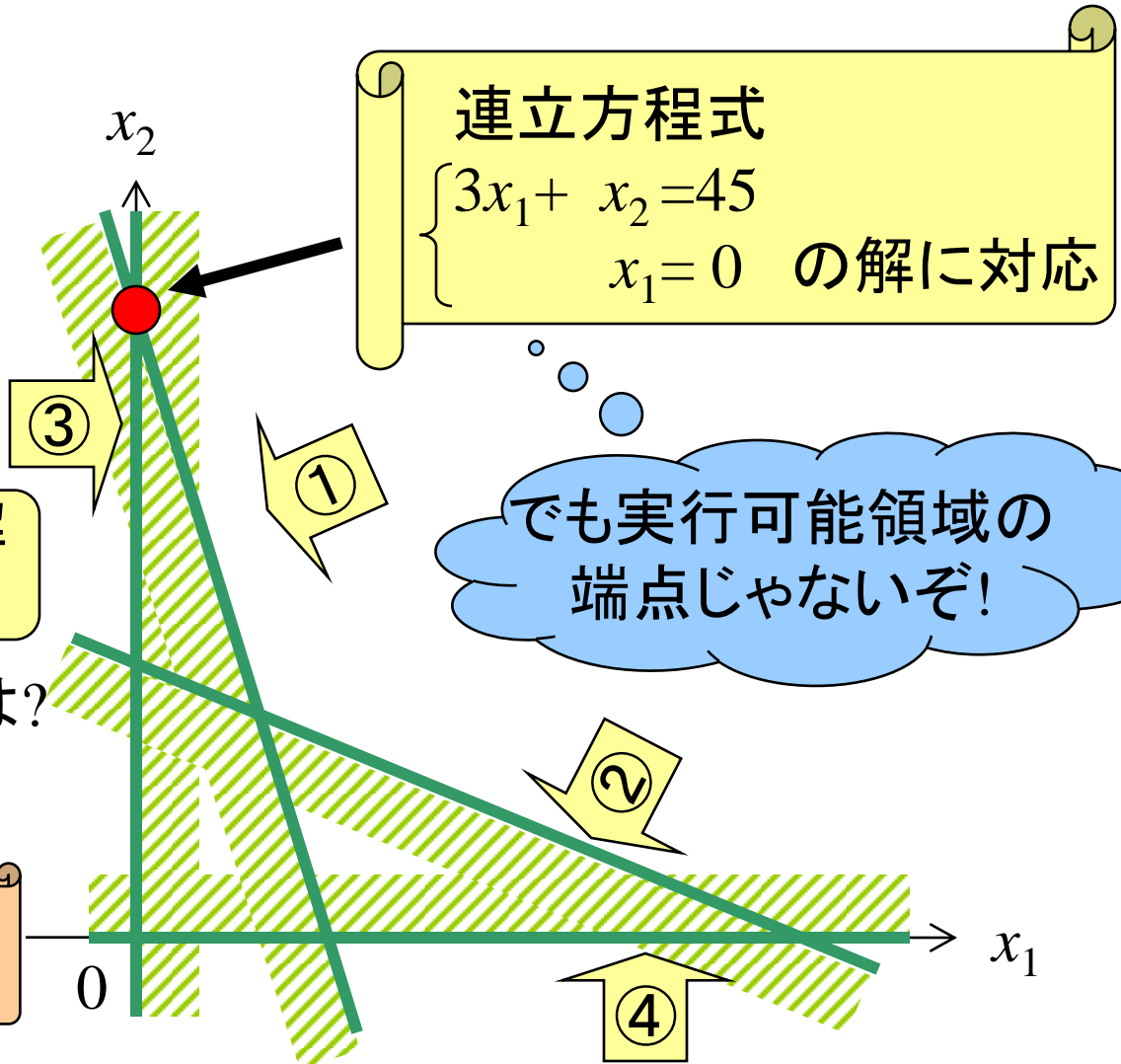
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 45 \\ x_1 = 0 \end{cases} \text{ の解に対応}$$

連立方程式の解
≠端点

簡単な判定方法は？

標準形の利用

でも実行可能領域の
端点じゃないぞ！



線形計画問題の標準形

$$\begin{aligned} &\text{maximize } z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ &\text{subject to } a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &\qquad\qquad\qquad \vdots \\ &\qquad\qquad\qquad a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ &\qquad\qquad\qquad x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

標準形 (standard form)

- 目的関数は最大化
- 条件式は (非負条件以外) 等式で表現
- 条件式の右辺(b_i)は 非負
- すべての変数が非負



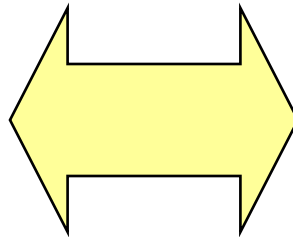
標準形の例

標準形で表現
された制約式

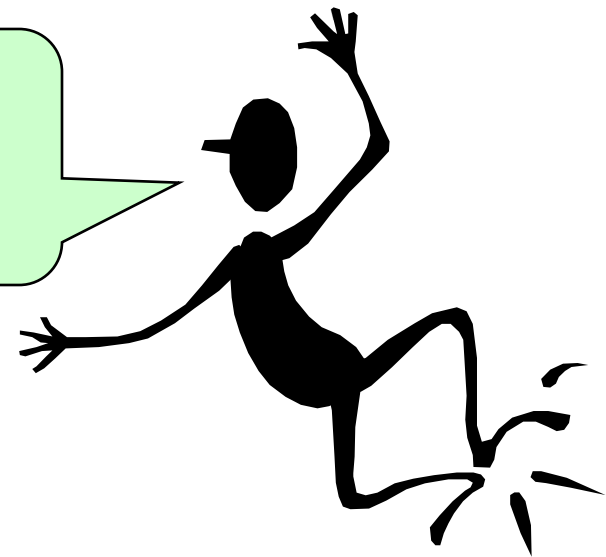
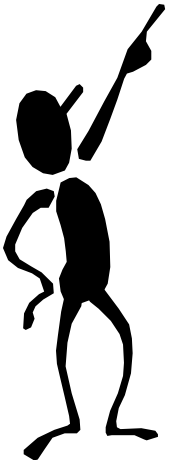
$$\begin{aligned}3x_1 + x_2 + s_1 &= 45 \\ x_1 + 2x_2 + s_2 &= 40 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0\end{aligned}$$

標準形ではない
表現の制約式

$$\begin{aligned}3x_1 + x_2 &\leq 45 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 40 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$



表現している内容は同じ!!
異なるのは、見た目だけ



すべてのLPは標準形で表現できる

対処法

① 目的関数が最小化の時

- 両辺に負を掛け, 最大化問題に変形

② 条件式に不等式が含まれている時

- \leq の時: スラック変数の導入 \Rightarrow 等式化
- \geq の時: サープラス変数を導入 \Rightarrow 等式化

③ 右辺の定数bが負の数の時

- 両辺に(-1)を掛ける

④ 非負条件の無い変数(自由変数)が含まれる時

- 正と負の部分に分けて2変数に置き換える

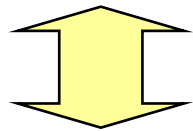
個別に詳しく

① 目的関数の標準形への変換

最小化問題の時

⇒ 式を(-1)倍し, 最大化問題に変形する

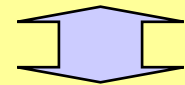
(例) minimize $z=4x_1-7x_2$



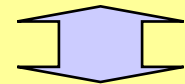
maximize $(-z)=-4x_1+7x_2$

参考

$$z=\min\{3,-2\}$$



$$(-z)=\max\{-3,2\}$$



$$z=-2$$

② 制約式の等号化

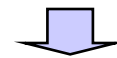
(左辺) $\leq b$ の時



$$\begin{aligned} \text{(左辺)} + s &= b \\ s &\geq 0 \end{aligned}$$

スラック変数
(slack: 緩い)

新たな非負変数を導入

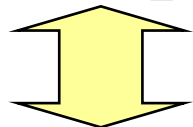


(左辺) $\geq b$ の時

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} - t &= b \\ t &\geq 0 \end{aligned}$$

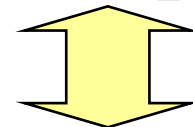
サープラス変数
(surplus: 過剰)

(例) $4x_1 - 7x_2 \leq 12$



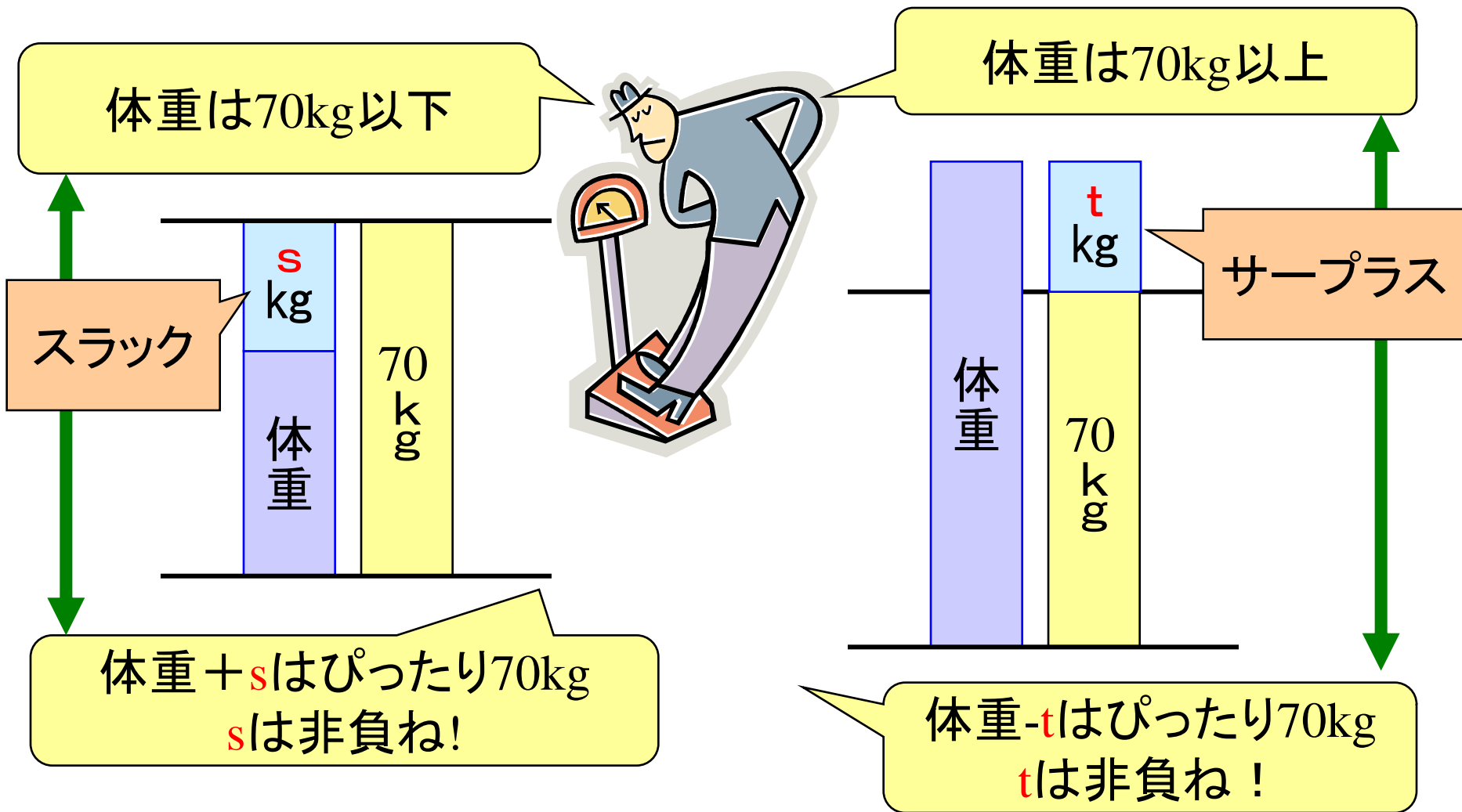
$$4x_1 - 7x_2 + s = 12$$

(例) $4x_1 - 7x_2 \geq 12$



$$4x_1 - 7x_2 - t = 12$$

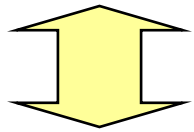
スラック変数・サープラス変数



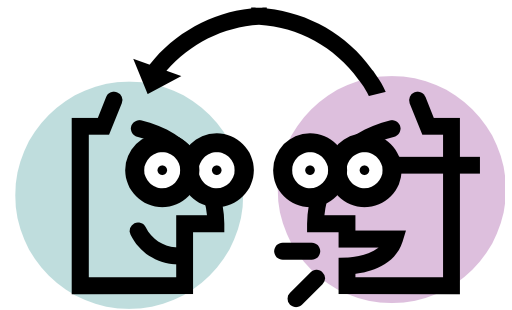
③ 右辺(定数)bを正の数にする

制約式右辺の定数部分(b)が負の数するとき
⇒両辺に(-1)を掛ける

(例) $4x_1 - 7x_2 \leq -9$



$-4x_1 + 7x_2 \geq 9$

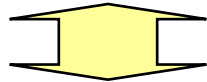


※ 両辺にマイナスの数を掛けると
不等号は逆転する

④ 自由変数の非負制約化

非負制約の無い変数(自由変数) x

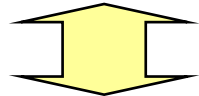
⇒ふたつの非負変数 x^+ , x^- の差に置き換える



自由変数 $x \Rightarrow x = x^+ - x^-$, $x^+ \geq 0$, $x^- \geq 0$

自由変数

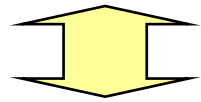
(例) $4x_1 - 7x_2 \leq 6$, $x_1 \geq 0$



$4x_1 - 7(x_2^+ - x_2^-) \leq 6$, $x_1 \geq 0$, $x_2^+ \geq 0$, $x_2^- \geq 0$

自由変数の変換での注意

(例) $4x_1 - 7x_2 \leq 6$, $x_1 \geq 0$



$4x_1 - 7(x_2^+ - x_2^-) \leq 6$, $x_1 \geq 0$, $x_2^+ \geq 0$, $x_2^- \geq 0$

$x_2 = -4$ \iff $x_2^+ - x_2^- = -4$ \iff $x_2^+ = 0, x_2^- = 4$

変換後の標準形には
同値の解が多数存在

$x_2^+ = 1, x_2^- = 5$

$x_2^+ = 2, x_2^- = 6$

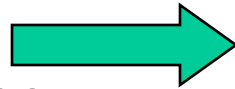
\vdots

元の問題の解として
は影響ない

標準形への変形例(1)

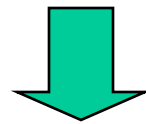
一般形

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 20x_1 + 30x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 800 \\ & -3x_1 - 4x_2 \geq -1800 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 1500 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



正準形

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 20x_1 + 30x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 800 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 1800 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 1500 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



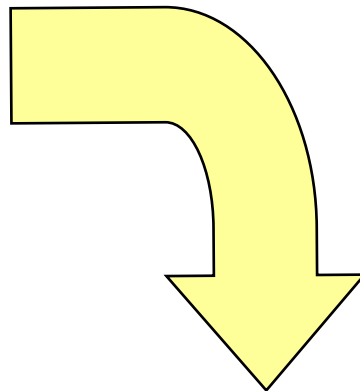
標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 20x_1 + 30x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + s_1 = 800 \\ & 3x_1 + 4x_2 + s_2 = 1800 \\ & 3x_1 + x_2 + s_3 = 1500 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

スラック変数の導入

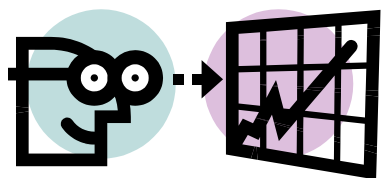
標準形への変形例(2)

$$\begin{aligned} \text{minimize } & z = 3x_1 - 5x_2 \\ \text{subject to } & 9x_1 - 4x_2 \geq -5 \\ & -7x_1 + 5x_2 = 8 \\ & 6x_1 - 2x_2 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$



標準形

$$\begin{aligned} \text{maximize } & (-z) = -3x_1 + 5(x_2^+ - x_2^-) \\ \text{subject to } & -9x_1 + 4(x_2^+ - x_2^-) + s_1 = 5 \\ & -7x_1 + 5(x_2^+ - x_2^-) = 8 \\ & 6x_1 - 2(x_2^+ - x_2^-) - s_3 = 1 \\ & x_1, x_2^+, x_2^-, s_1, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$



演習3 標準形に変形せよ

$$\begin{aligned} \text{minimize } & z = 2x_1 - x_2 \\ \text{subject to } & x_1 + x_2 \leq 120 \\ & x_1 + x_2 \geq 60 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

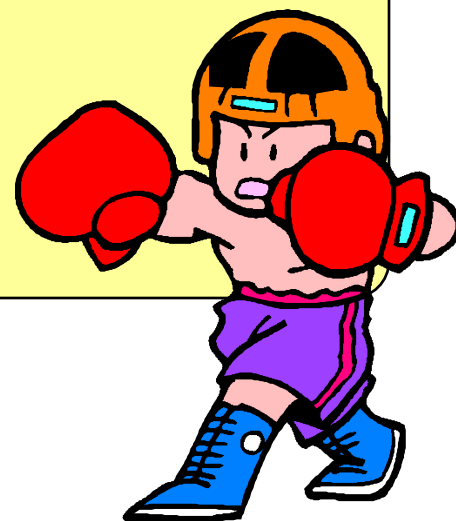
※ x_1 は自由変数

標準形の利用

実行可能領域の端点を見つける

その前にもう少し知識をためよう

- 連立方程式の 変数の数 と 式の数 と 解 の関係
- 独立変数
- 基本解
- 基底変数と非基底変数



準備体操

以下の連立方程式の解は？

$$\begin{cases} 15x_1 + 11x_2 + s_1 & = 1650 \\ 10x_1 + 14x_2 & + s_2 = 1400 \\ 9x_1 + 20x_2 & + s_3 = 1800 \end{cases}$$

変数の数: 5個
方程式の数: 3個

いくつの変数を見捨てるか
解が得られるか？



連立方程式と解の関係

連立方程式 (m 変数, n 本の方程式)

- $m=n$ の時:
 - 解が一意に定まる or 不定 or 不能(解なし)
- $m < n$ の時:
 - 基本的に $m=n$ の時と同じ.
- $m > n$ の時:
 - $m-n$ 個の変数の解は一意に定まらない(**独立変数**)
⇔ $m-n$ 個の独立変数の値を定めれば $m=n$ の時と同じ

例えば...

以下の連立方程式の解は？

$$\begin{cases} 15x_1 + 11x_2 + s_1 & = 1650 \\ 10x_1 + 14x_2 + s_2 & = 1400 \\ 9x_1 + 20x_2 + s_3 & = 1800 \end{cases}$$

変数の数: 5個
方程式の数: 3個



(5-3=)2個の独立変数に
値を与えれば解を持つ

例 x_1, x_2 を独立変数に選択, 値に0を与えてみる

→連立方程式の解は？

例題3

$$\begin{cases} 15x_1 + 11x_2 + s_1 & = 1650 \\ 10x_1 + 14x_2 & + s_2 = 1400 \\ 9x_1 + 20x_2 & + s_3 = 1800 \end{cases}$$

- (1) すべての独立変数を選ぶパターンを書き出せ。
- (2) (独立変数に0を与えた場合の)基本解を求めよ。

例題3 解答例

$$\begin{cases} 15x_1 + 11x_2 + s_1 & = 1650 \\ 10x_1 + 14x_2 & + s_2 = 1400 \\ 9x_1 + 20x_2 & + s_3 = 1800 \end{cases}$$

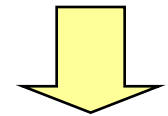
x1	x2	s1	s2	s3
0	0	1650	1400	1800
0	150	0	-700	-1200
0	100	550	0	-200
0	90	660	140	0
110	0	0	300	810
140	0	-450	0	540
200	0	-1350	-600	0
77	45	0	0	207
4400/67	4050/67	0	-6900/67	0
1400/37	2700/37	10350/37	0	0

非負制約があるとき

実行可能解

実行可能解でない

標準形では
全変数に非負制約

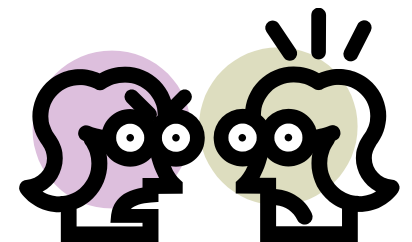


実行可能かどうかの
判定に利用可能

黄色のセル(値=0)が選ばれた独立変数.

実行可能解かどうかの判定方法

- ① 標準形に変形する
- ② 連立方程式の解が定まるように独立変数を適当に決めて、それらの値を0にする.
→連立方程式の解が得られる. (**基本解**)
※実際に解を求める変数 = **基底変数**
⇔値が0に定められた変数 = **非基底変数**
- ③ 基本解が非負なら、実行可能領域の端点



例題3(続) 総当り法

$$\begin{aligned} \max. \quad & z=5x_1+4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 15x_1+11x_2 \leq 1650 \\ & 10x_1+14x_2 \leq 1400 \\ & 9x_1+20x_2 \leq 1800 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

制約条件式は例題3と同じ

独立変数の選び方
全パターンの基本解を求め、
最適解を見つけよう。



例題3(続) 総当り法

端点の所だけ計算

x1	x2	s1	s2	s3	端点?	目的関数値
0	0	1650	1400	1800	○	0
0	150	0	-700	-1200	×	
0	100	550	0	-200	×	
0	90	660	140	0	○	360
110	0	0	300	810	○	550
140	0	-450	0	540	×	
200	0	-1350	-600	0	×	
77	45	0	0	207	○	565
4400/67	4050/67	0	-6900/67	0	×	
1400/37	2700/37	10350/37	0	0	○	17800/37

← 最大値

黄色のセル(値=0)が選ばれた独立変数.

図を用いない素朴な解法 総当たり法



手順1 標準形に変形する

手順2 すべての基本解を導く

手順3 端点かを判定

手順4 端点なら目的関数値を計算

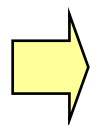
手順5 目的関数値最大の基本解が最適解

練習 生産計画



- 2つの液体製品P,Qは機械A,Bを用いて加工される
- 利益が最大になる1週間の製品P,Qの加工量は？

	液体P 1ml	液体Q 1ml	使用可能量
機械A	3(h)	1(h)	45(h/週)
機械B	1(h)	2(h)	40(h/週)
利益	6(万円)	5(万円)	



総当り法で最適解と最適値を求めてみよう。

定式化

x_1 : 液体Pの生産量

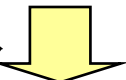
x_2 : 液体Qの生産量

$$\max. z=6x_1+5x_2$$

$$\text{s.t. } 3x_1 + x_2 \leq 45$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

標準形に変形 

$$\max. z=6x_1+5x_2$$

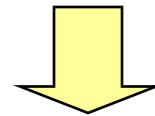
$$\text{s.t. } 3x_1 + x_2 + s_1 = 45$$

$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 40$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

練習 解答例

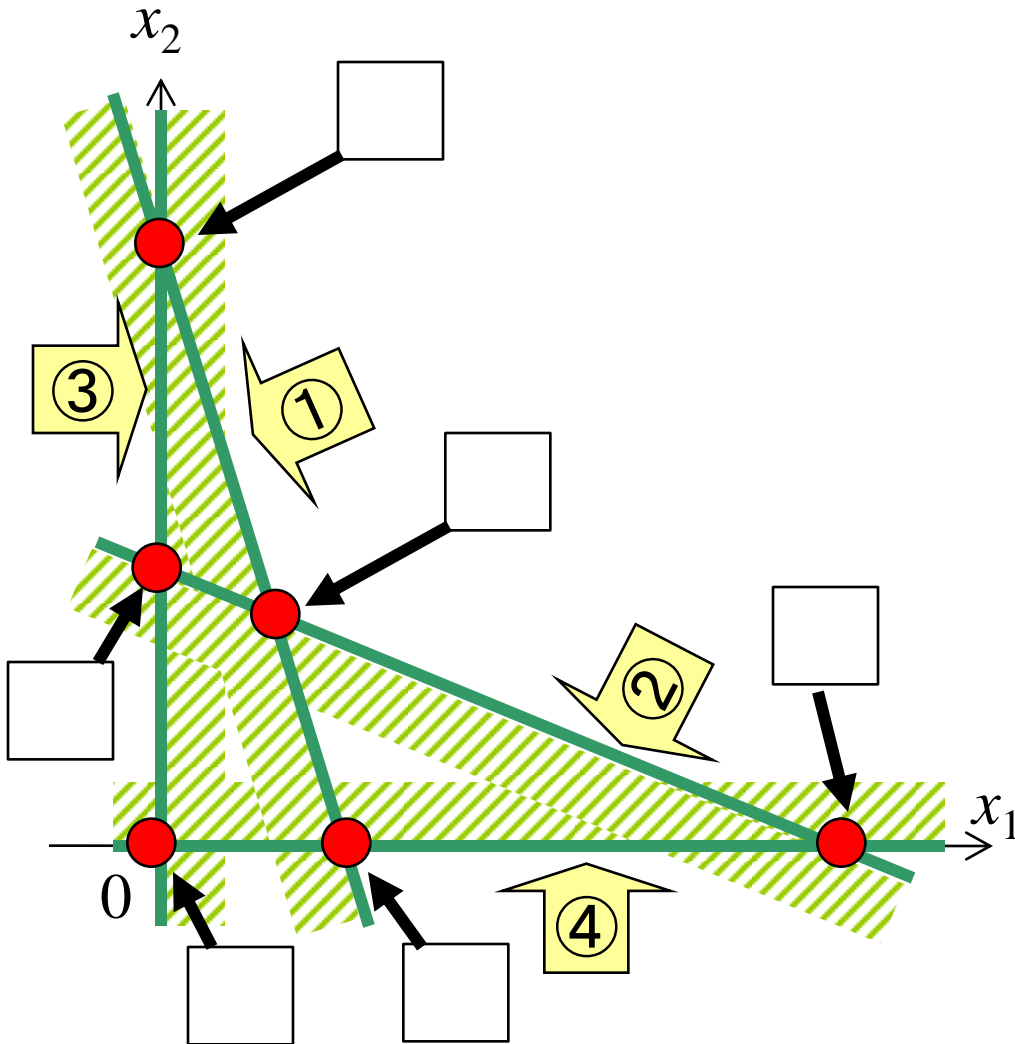
x_1	x_2	s_1	s_2	端点?	目的関数値
0	0	45	40	◎	0
0	45	0	-50	×	
0	20	25	0	◎	100
40	0	-75	0	×	
15	0	0	25	◎	90
10	15	0	0	◎	135



最適解 $(x_1, x_2) = (10, 15)$, 最適値 135

練習2 A~Fの基本解は どの点に対応している？

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 45 & \textcircled{1} \\ x_1 + 2x_2 \leq 40 & \textcircled{2} \\ x_1 \geq 0 & \textcircled{3} \\ x_2 \geq 0 & \textcircled{4} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \max. \quad & z = 6x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + x_2 + s_1 = 45 \\ & x_1 + 2x_2 + s_2 = 40 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

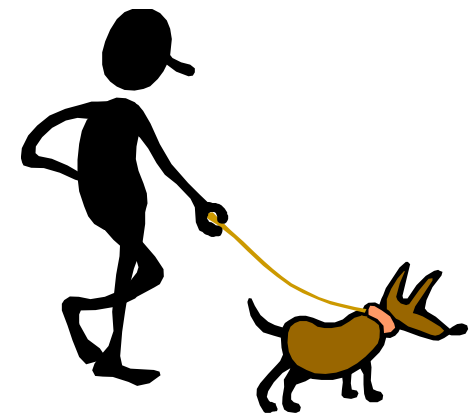
	x_1	x_2	s_1	s_2	端点?	目的関数値
A	0	0	45	40	◎	0
B	0	45	0	-50	×	
C	0	20	25	0	◎	100
D	40	0	-75	0	×	
E	15	0	0	25	◎	90
F	10	15	0	0	◎	135



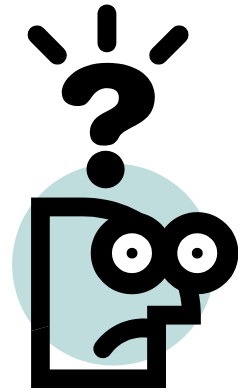
演習4 総当り法

総当り法で最適解と最適値を求めてみよう.

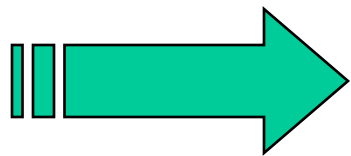
$$\begin{aligned} \max. \quad & z = 20x_1 + 30x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 800 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 1800 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 1500 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



総当たり法の欠点



- 標準形が n 個の変数と m 本の等式条件
⇒ 基本解はどのくらい存在する? ⇒ **組合せの数**
膨大な数の連立方程式を解くことになる
⇒ サイズによっては事実上**実行不可能**
- 端点で無い基本解も計算 (← 無駄)



より無駄の無い解法 **シンプレックス法**

演習5 総当たり法で解いてみよう

(1)

$$\min. z = -3x_1 - 4x_2$$

$$\text{s.t. } x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(2)

$$\max. z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\text{s.t. } x_1 + 4x_2 - 2x_3 \geq 120$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 60$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

