

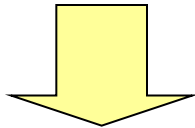
# Mathematical Programming (2)

最適化手法の王様  
数理計画法

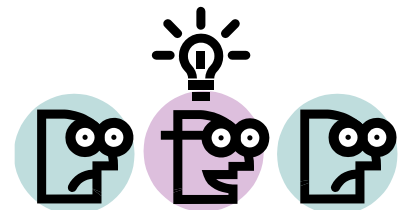
# ここで学ぶこと

前回

- 数理計画とは
- システム的アプローチによる問題解決



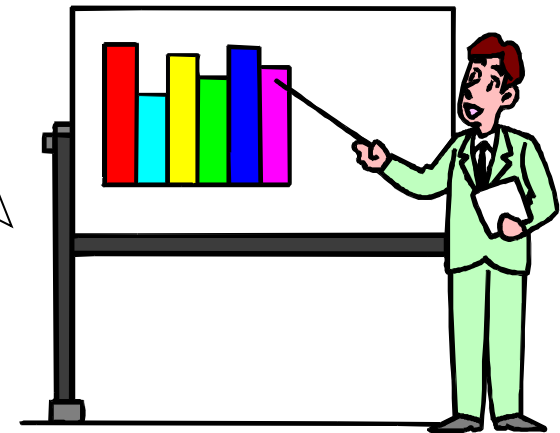
- 数理モデル化と表現方法(定式化)
- 数理計画問題の分類



# (復習) 数理計画とは Mathematical Programming

与えられた**制約式**のもとで、  
ある**関数を最大化**する応用数学の問題  
(最小化)

- 数理計画 = 数理計画問題  
(一 problem)
- 数理計画問題とそれを解く手法  
全般を「**数理計画法**」とよぶ。



# 例題1 数式での表現

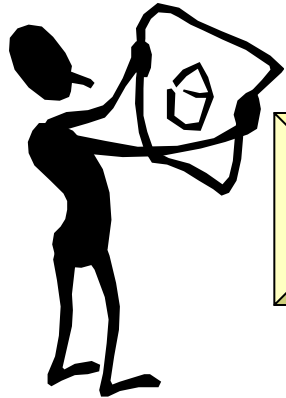
3種類の原液A,B,Cから、  
2つの粉末製品P,Qを製造



	製品P 1(kg)	製品Q 1(kg)	使用可能量
原液A	15(kl)	11(kl)	1650(kl/日)
原液B	10(kl)	14(kl)	1400(kl/日)
原液C	9(kl)	20(kl)	1800(kl/日)
利益	5(万円)	4(万円)	

利益が最大になる製品P,Qの1日の生産量は？  
問題を数理モデル化しなさい。

# 数理モデル作成 2つの段階

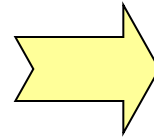


数理モデル化

定式化 formulation

問題理解

問題表現



観察力・言語理解力

システムとしての把握

- 構成要素は？
  - コントロール可能な要素
  - コントロールできない要素
- 相互関係は？
- コントロール結果の評価方法は？

変数として表現  
例： $x_1, x_2$

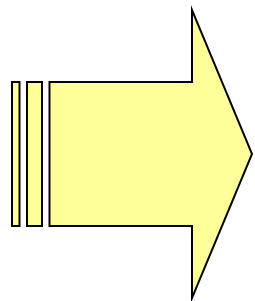
定数として表現

数式として表現  
例：等式，不等式

関数として表現

# 例題1(続) 定式化してみよう

- ・コントロールできる要素：製品P,Qの生産量  
→製品Pの生産量を $x_1$ ，製品Qの生産量を $x_2$ とおく。
- ・コントロールの制約：原液A,B,Cの使用可能量
- ・コントロール結果の評価：利益



- 制約を表す不等式は？
- 利益を表す関数は？



# 数理計画問題の書き方

目的関数

Objective function

最大化  
(最小化の時はminimize)

maximize  $z=5x_1+4x_2$   
subject to  $15x_1+11x_2 \leq 1650$   
 $10x_1+14x_2 \leq 1400$   
 $9x_1+20x_2 \leq 1800$   
 $x_1 \geq 0$   
 $x_2 \geq 0$

又は制約条件式

subject to: ~ の条件の下で

制約式

Constraints

省略表記

max.  $z=5x_1+4x_2$   
s.t.  $15x_1+11x_2 \leq 1650$   
 $10x_1+14x_2 \leq 1400$   
 $9x_1+20x_2 \leq 1800$   
 $x_1, x_2 \geq 0$

目的関数の  $z=$  も  
省略される時あり

# 練習 生産計画



- 2つの液体製品P,Qは機械A,Bを用いて加工される
- 利益が最大になる1週間の製品P,Qの加工量は？

	液体P 1ml	液体Q 1ml	使用可能時間
機械A	3(h)	1(h)	45(h/週)
機械B	1(h)	2(h)	40(h/週)
利益	6(万円)	5(万円)	

⇒ 定式化してみよう



# 練習 解答例

練習を定式化

$x_1$ : 液体Pの生産量

$x_2$ : 液体Qの生産量

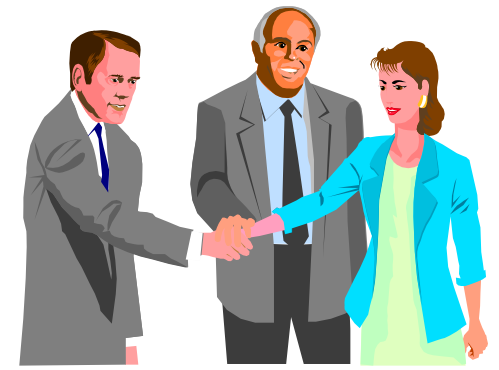
$$\max. z = 6x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.t. } 3x_1 + x_2 \leq 45$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

# 演習2 原料奪取作戦

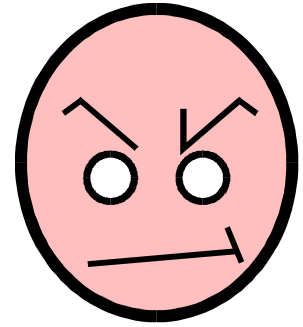


例題1で登場した会社から

- 原液A, B, Cの1日の使用可能量をすべて買い取りたい.
- 支払総額は少なくしたい.
- **問題:各原液1klにいくらで提示する?**

この問題を数理モデルで表現しなさい

## 演習2(続) ヒント



- **変数** (コントロールできるもの)
  - 原液Aの買取提示価格  $y_1$  (円/kl)
  - 原液Bの買取提示価格  $y_2$  (円/kl)
  - 原液Cの買取提示価格  $y_3$  (円/kl)
- **制約** (交渉成立の条件):
  - 売主は自製造で得る利益以下では売らない
  - 自製造で得る利益以上の金額を提示すべき

数理モデルで表現してみよう!



# 用語：実行可能解と最適解

optimal solution

**最適解**：最適値を達成する実行可能解

$$\begin{aligned} \max. \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \\ & 10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \\ & 9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

**最適値**：目的関数の最大値

optimal value

feasible solution

**実行可能解**：制約式を満たす $(x_1, x_2)$

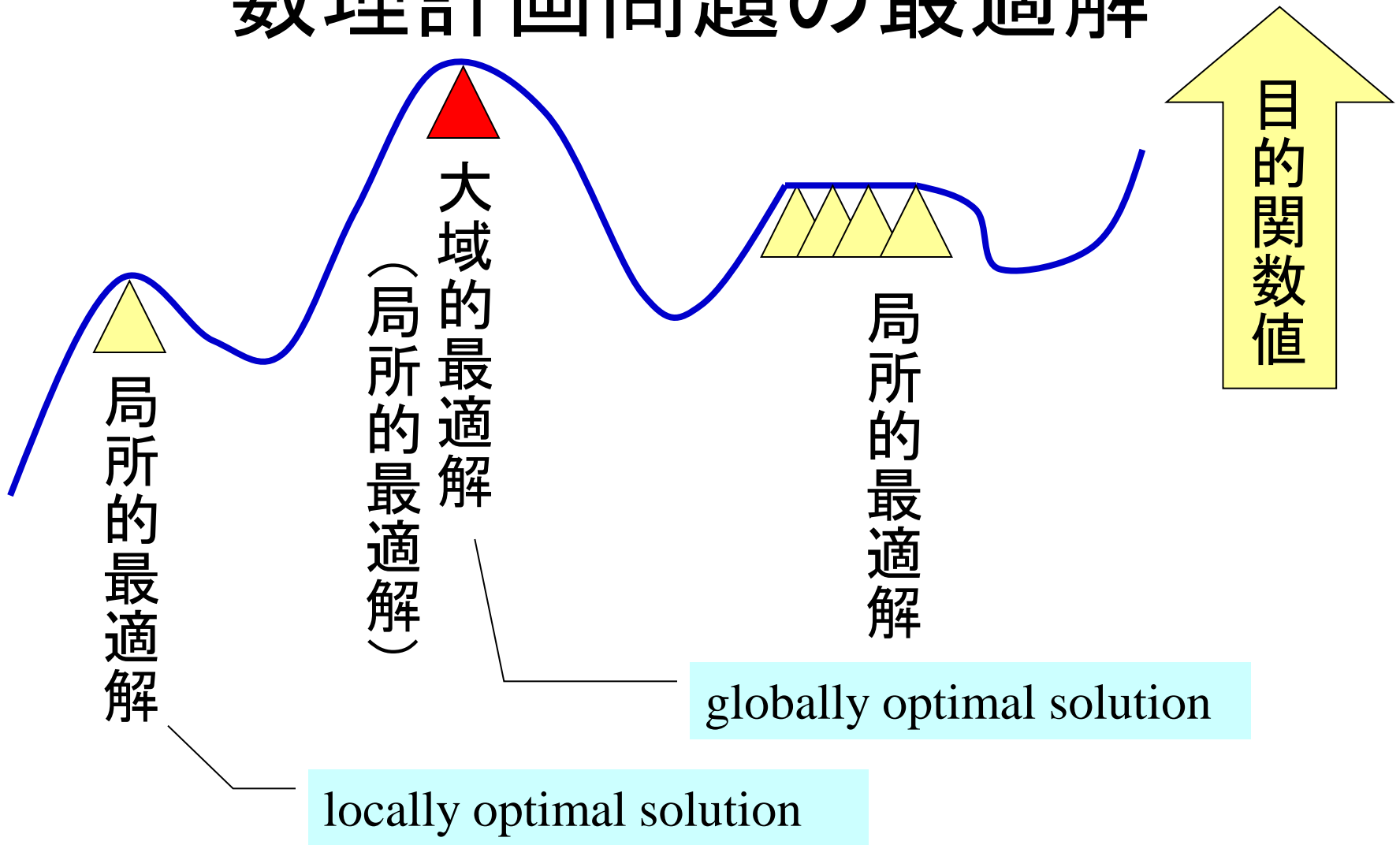
feasible region

**実行可能領域**：実行可能解の集合

※実行可能解が存在しない場合もある→実行不能な問題

※実行可能でも最適解が存在しない場合がある→例題2

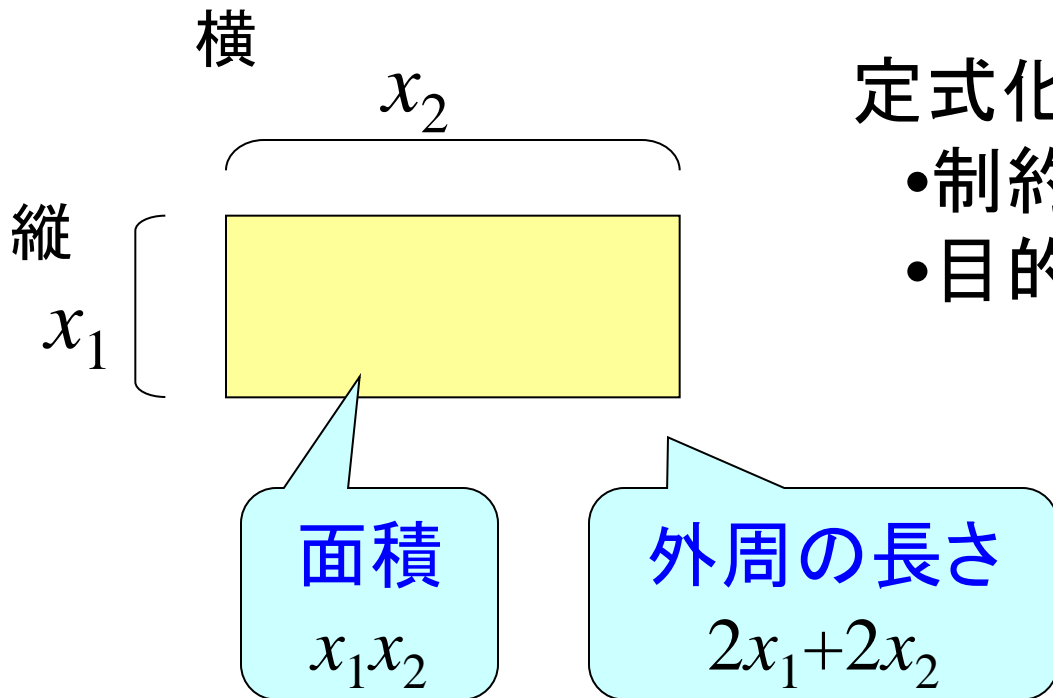
# 数理計画問題の最適解



※最適解が複数存在する場合もある→通常1つだけ求めればよい

# 例題2

面積が4以上で，外周の長さ最小の長方形は？



定式化してみよう

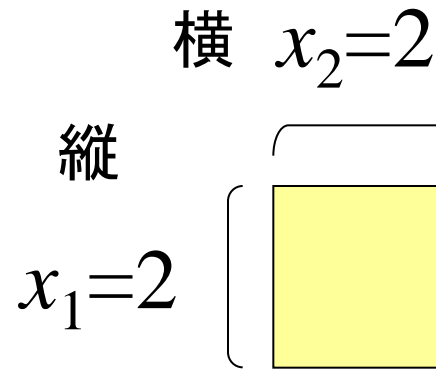
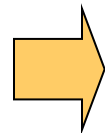
- 制約条件は？
- 目的関数は？



# 例題2 解答例

- 最適解は  $x_1=2, x_2=2$
- 最適値は 8

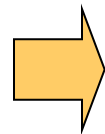
$$\begin{array}{ll} \min. & z=2x_1+2x_2 \\ \text{s.t.} & x_1x_2 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



正方形

Q. 面積が4以上で縦の長さ最小の長方形は?

$$\begin{array}{ll} \min. & z=x_1 \\ \text{s.t.} & x_1x_2 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

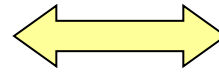


限りなく0に近い値?

⇒最適解はない

# 最適解が存在する・しない

実行可能領域が存在



実行可能領域が空

最適値は有限

最適値が発散

実行可能解がない



最適解無し

最適解存在

最適解無し

複数存在  
も有

例題2  
後半の場合

目的関数値を  
いくらでも  
大きくできる

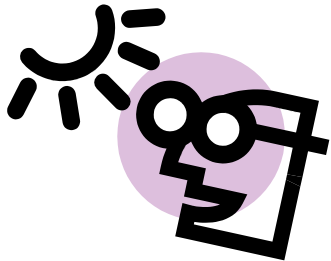
最適解無し

非有界

unbounded

実行不能

infeasible





# 実行可能解の存在判定

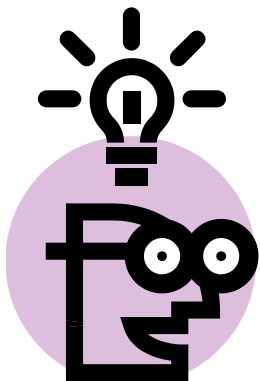
実行可能性問題 feasibility problem

実行可能解が存在するのかを判定する問題

解法: いつでも値が0になる関数を目的関数にする  
⇒ 実行可能解があれば, 最適値は0

例

$$\begin{aligned} \max. \quad & z = 0x_1 + 0x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \\ & 10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \\ & 9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

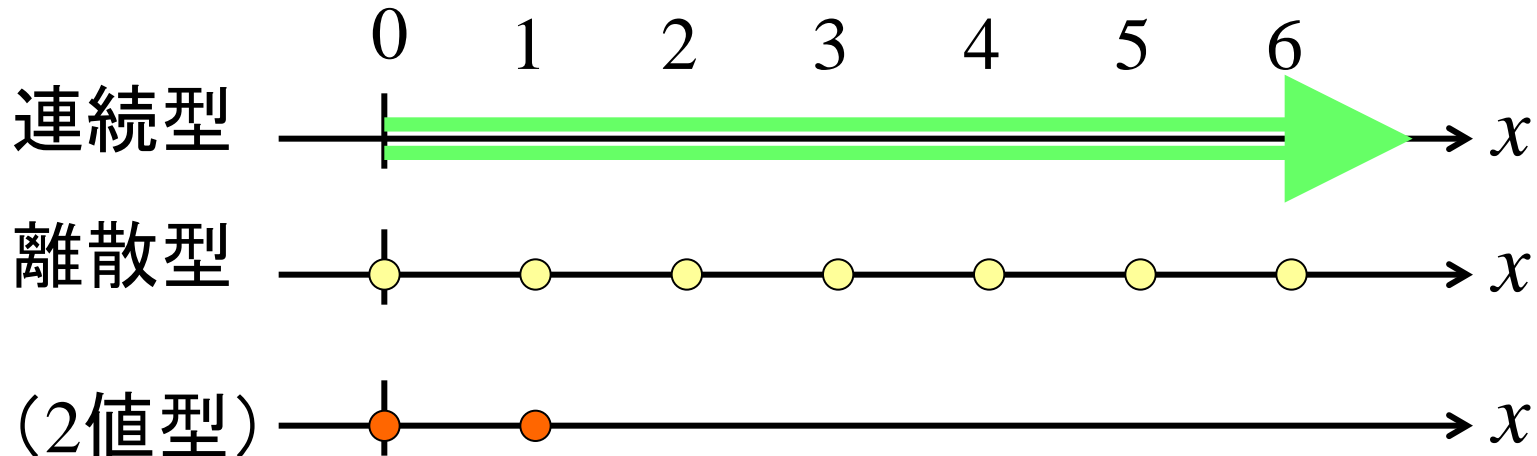


実行可能性の判定も  
最適化問題なんだ

# 定式化の分類法(1)

利用する変数が取れる値の型で分類

- 連続型 continuous  $\Rightarrow$  例: 実数 real
- 離散型 discrete  $\Rightarrow$  例: 整数 integer (整数計画)
  - 2値型 binary  $\Rightarrow$  例: 0または1 (0-1整数計画)



# 定式化の分類法(2)

## 使用関数の種類で分類

- 連続関数

- 線形関数 linear

- 非線形関数 nonlinear

- 微分可能 differentiable

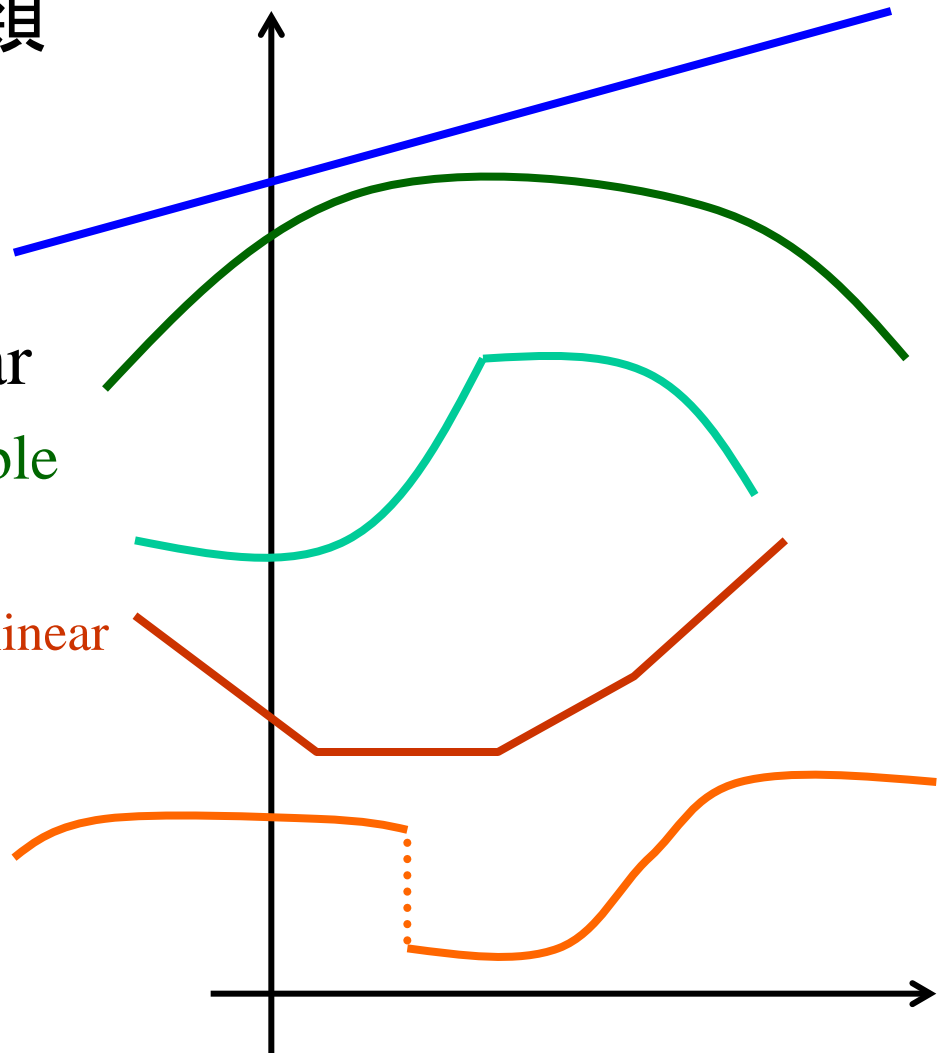
- 微分不能 non-

- 区分線形 piecewise linear

- 非連続

- 凸関数 convex

- 凹関数 concave





# 分類後の主な問題名

変数型	目的関数	条件式	問題名	+Programming	略称
連続型	線形	線形	線形計画	Linear	LP
	2次関数	線形	2次計画	Quadratic	QP
	凸関数	凸関数	凸計画	Convex	CP
	非線形	非線形	非線形計画	Nonlinear	NLP
離散型	—	—	整数計画	Integer	IP
	凸	凸	離散凸計画	Discrete Convex	
2値型	—	—	0-1整数計画	Binary Integer	BIP
混合	—	—	混合整数計画	Mixed Integer	MIP

※ 凸計画の等式制約は線形

# 例題3 ナップザック問題



自由にお持ち  
帰りください

16万円



19万円



23万円



28万円



重量制限: 7kg

なるべく総価値を高く持って帰りたい。  
どれを何kg持って帰る?

⇒定式化してみよう

8万円/kg

19/3万円/kg

5.75万円/kg

5.6万円/kg

単位価値額

6.3

16万円

19万円

23万円

28万円



$x_1$  kg

$x_2$  kg

$x_3$  kg

$x_4$  kg

例題3(続)  
分割可の時

変数: 積む量

線形計画

$$\max. z = 8x_1 + 19/3x_2 + 5.75x_3 + 5.6x_4$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 7$$

$$x_1 \leq 2, x_2 \leq 3, x_3 \leq 4, x_4 \leq 5,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

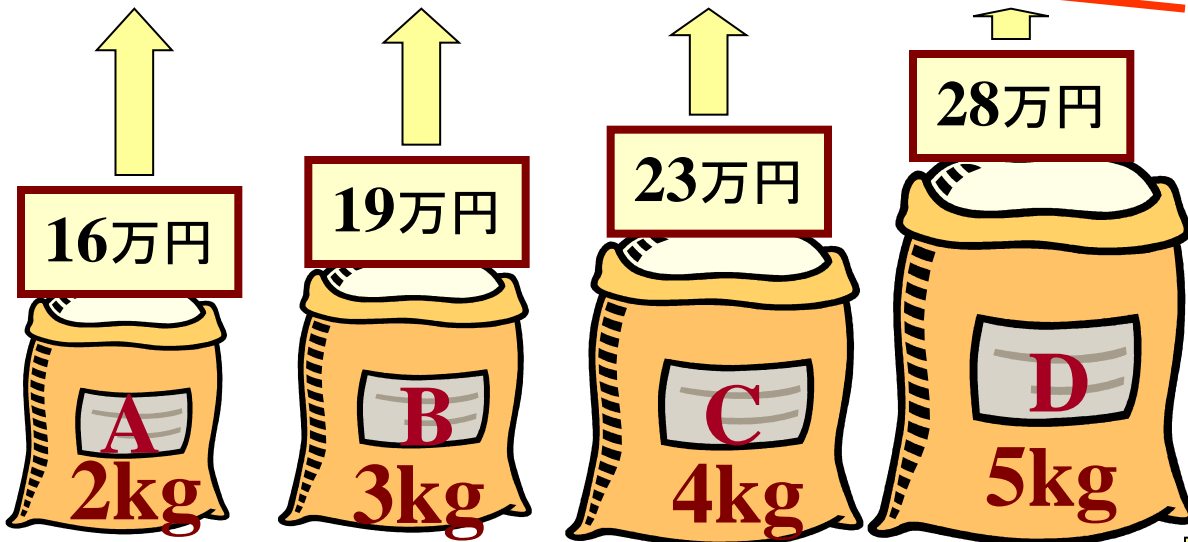
~~8万円/kg~~

~~6.3万円/kg~~

~~5.7万円/kg~~

~~5.6万円/kg~~

~~単位価値額~~



例題3(続)  
分割不可の時

$x_1$

$x_2$

$x_3$

$x_4$

2値(0-1)変数

0-1整数計画

$$\max. z = 16x_1 + 19x_2 + 23x_3 + 28x_4$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 7$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$$

積む時:  $x=1$

積まない時:  $x=0$

記号  $\in$

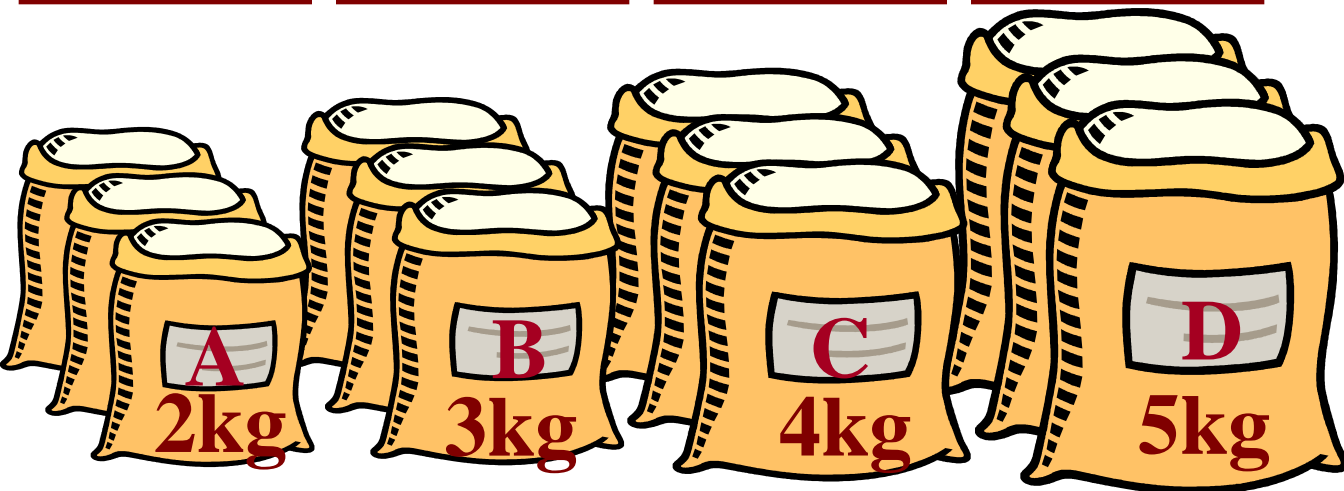
元として含まれる

16万円/袋

19万円/袋

23万円/袋

28万円/袋



$x_1$  袋

$x_2$  袋

$x_3$  袋

$x_4$  袋

整数計画

$$\max. z = 16x_1 + 19x_2 + 23x_3 + 28x_4$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 7$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}_+$$

例題3(続)  
分割不可  
複数可の時

変数: いくつ積む?

記号  $\mathbb{Z}_+$

非負整数の集合

(参考)  $\mathbb{R}$ : 実数

$\mathbb{Z}_{++}$ : 正の整数



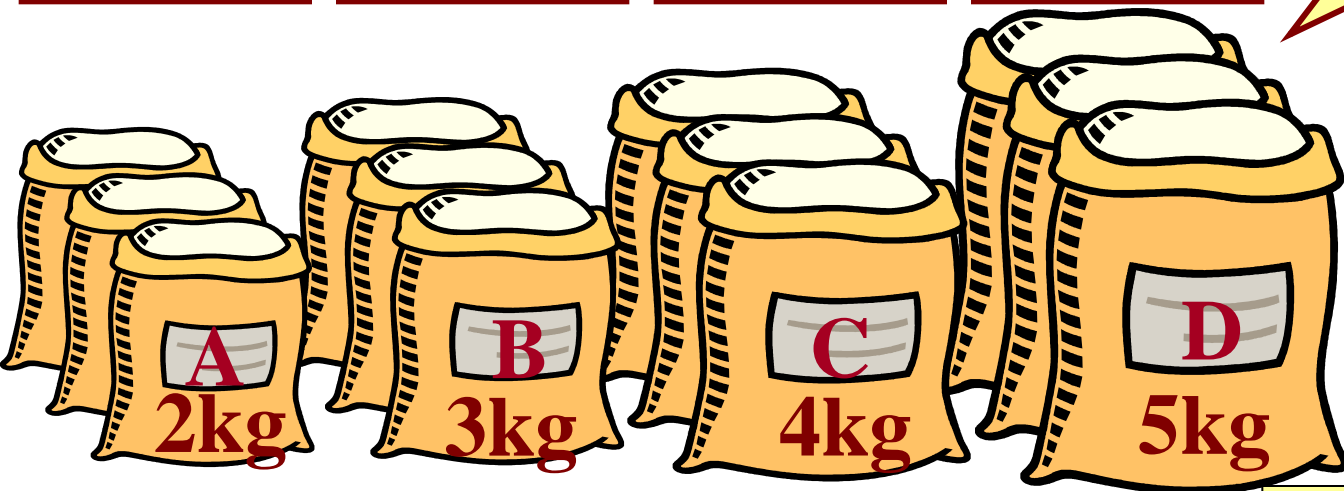
16万円/袋

19万円/袋

23万円/袋

28万円/袋

Dのみ分割可



例題3(続)  
分割一部可  
複数可の時

$x_1$  袋

$x_2$  袋

$x_3$  袋

$x_4$  袋

変数: 何袋分積む?

混合整数計画

変数: 何袋積む?

$$\max. z = 16x_1 + 19x_2 + 23x_3 + 28x_4$$






$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 7$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+, \quad x_4 \geq 0$$

# 例題3(続) 分割不可の時(別表現1)

2kg, 3kg, 4kg, 5kg

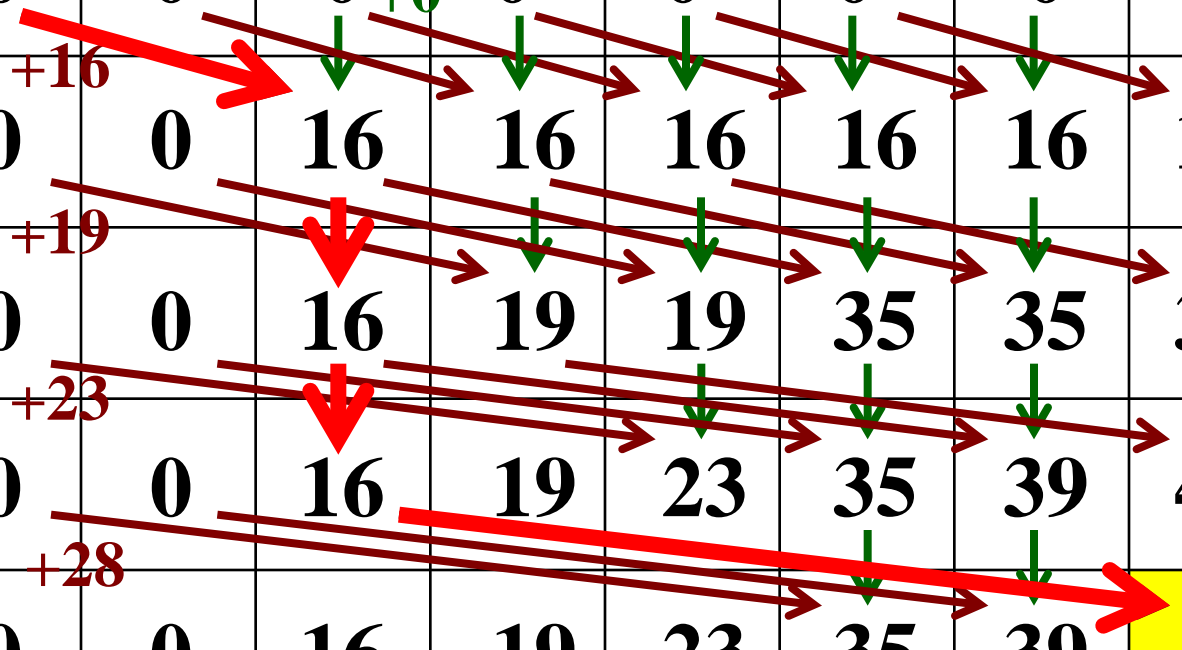
カートの重量制限(kg)

	0	1	2	3	4	5	6	7
なし	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	16	16	16	16	16	16
	0	0	16	19	19	35	35	35
	0	0	16	19	23	35	39	42
	0	0	16	19	23	35	39	44

対象の粉を順に増やす

積む

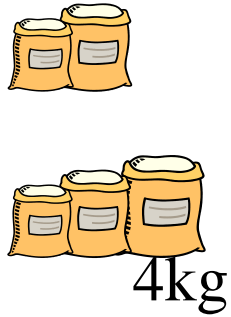
積まない



16万, 19万, 23万, 28万

# 例題3 (続) 動的計画法

カートの重量制限



	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	16	19	19	35	35	35
+	0	0	16	19	23	35	39	42

Annotations: A red arrow points from the top row's '19' at weight 3 to the bottom row's '23' at weight 4, labeled '+23'. Green arrows point from the top row's '19' at weight 4 to the bottom row's '35' at weight 5, '35' at weight 6, and '35' at weight 7. Red arrows point from the top row's '16' at weight 2 to the bottom row's '19' at weight 3, '23' at weight 4, '35' at weight 5, '39' at weight 6, and '42' at weight 7.

粉がk種類, カートの制限重量が $\alpha$ kgの時の最適値

制限重量 $\alpha$ が粉kの重み以下のとき

$$f(k, \alpha) = \begin{cases} f(k-1, \alpha) & \text{粉kを積まない} \\ \max\{f(k-1, \alpha), (k\text{の価値}) + f(k-1, \alpha - (k\text{の重み}))\} & \text{粉kを積む} \end{cases}$$

比較して, 価値の高い方を採用

再帰方程式

動的計画法 Dynamic Programming (DP)

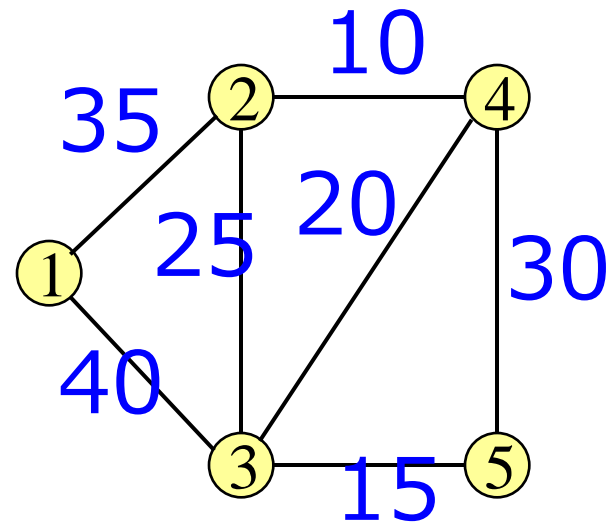
# 例題4 ガス管配置

5軒の家にガスを供給したい  
設置費用が最小になるガス  
管の設置方法は?

定式化してみよう

目的 設置費用合計→最小  
制約 5軒にガスを供給

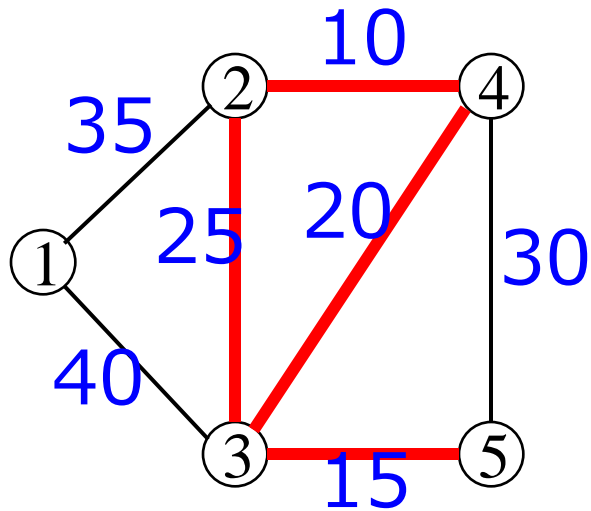
ガス管が繋がっている+5軒を張っている



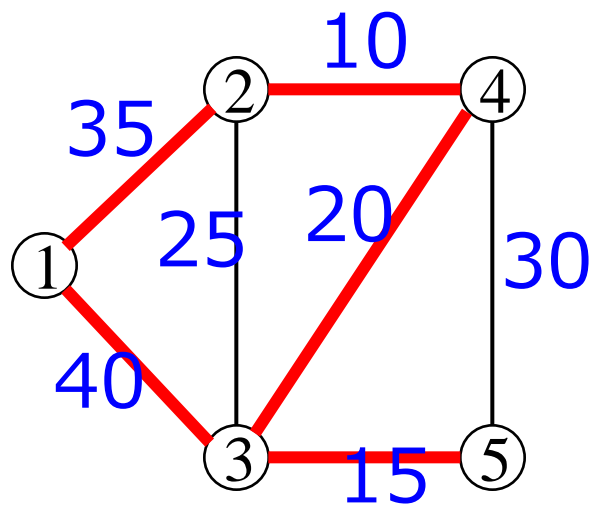
枝: 設置可能路線  
数字: 設置費用

# 例題4(続) 最適解でない例

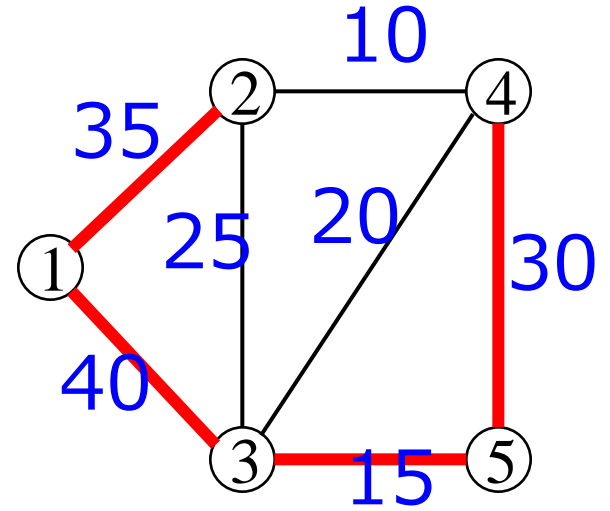
なぜ最適でないのか？



条件を満たしていない



自明な無駄がある



他に良いプランがある

改善策

実行不能

閉路は無駄

× 閉路上の最大重み枝

非連結部分を繋げる

○ 最小重み枝

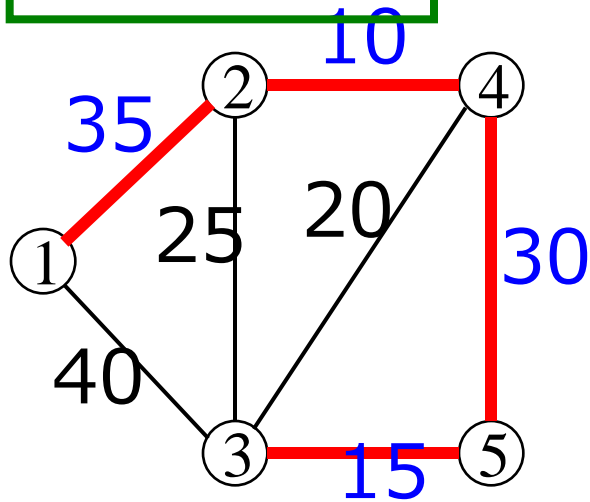
# 例題4(続) 実行可能解が持つ性質

閉路は無駄  $\Rightarrow$  閉路の無いグラフ = **木**  
全点を結ぶ  $\Rightarrow$  **全張** (spanning; スパンする)

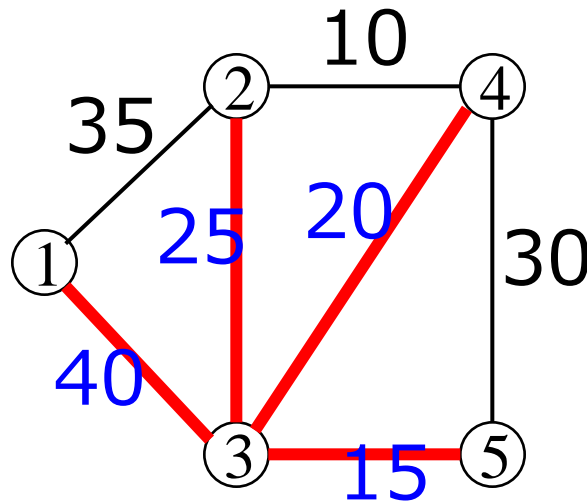
**全張木**

spanning tree

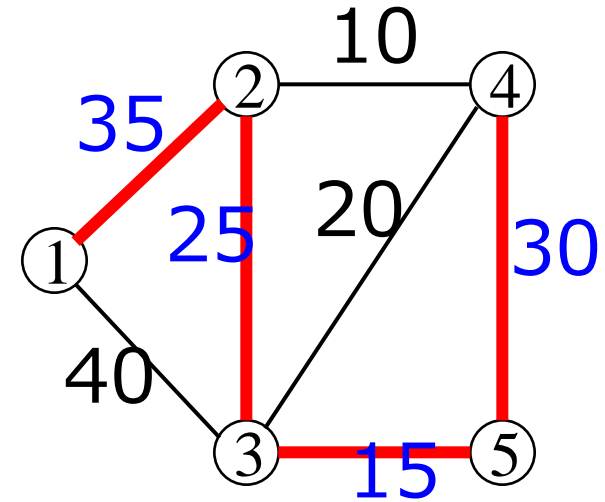
様々な全張木



$$35+10+30+15=90$$



$$40+25+20+15=100$$



$$35+25+30+15=105$$

**問題の本質** 重み和最小の全張木 (**最小木**) を見つけよ

$\Leftrightarrow$  **最小木問題**

Minimum spanning tree problem

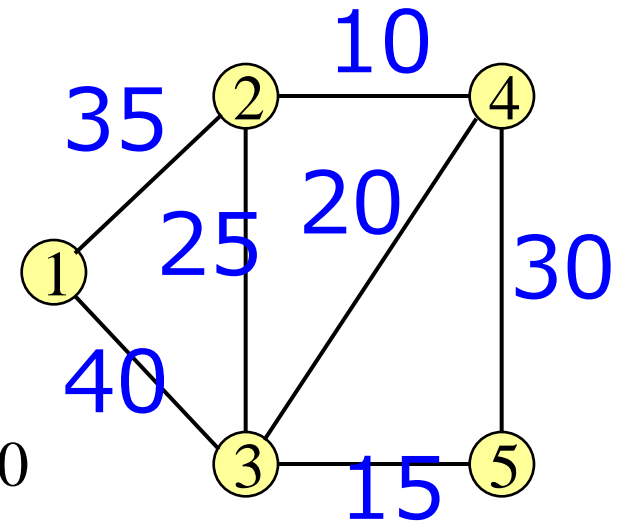
# 例題4(続) 最小木問題の定式化

解きたい問題

**目的** 利用枝の重みの和→最小  
**制約** 利用枝は全点を結ぶ  
利用枝に閉路がない

使用変数

$x_{ij}$ : 枝  $(i,j)$  を利用する時1, 利用しない時0



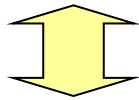
目的関数

$$\min. z = 35x_{12} + 40x_{13} + 25x_{23} + 10x_{24} + 20x_{34} + 15x_{35} + 30x_{45}$$

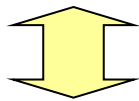
⇒ 制約条件式は?

# 例題4(続)「閉路がない」の表現

閉路がない



(部分点集合内での使用枝数)  
 $<$  (部分点集合の大きさ)

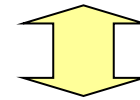


(部分点集合内での使用枝数)  
 $\leq$  (部分点集合の大きさ)  $- 1$

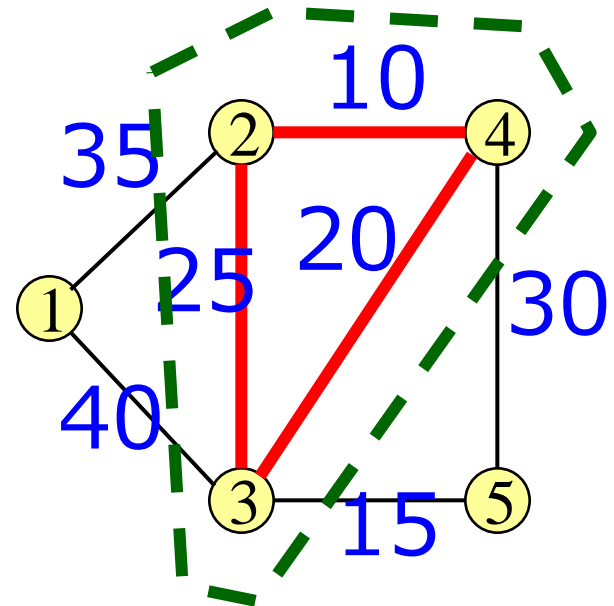
例 点部分集合  $\{②,③,④\}$  に対して

$$x_{23} + x_{24} + x_{34} \leq 2$$

閉路がある



(部分点集合内での使用枝数)  
 $=$  (部分点集合の大きさ)





# 例題4(続) 定式化

$$\min. z=35x_{12}+40x_{13}+25x_{23}+10x_{24}+20x_{34}+15x_{35}+30x_{45}$$

$$\text{s.t.} \quad x_{12}+x_{13}+x_{23}+x_{24}+x_{34}+x_{35}+x_{45}=4$$

全部分集合に対して

$$(\text{使用枝本数}) \leq (\text{部分集合の大きさ}) - 1$$

$$x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, x_{35}, x_{45} \in \{0,1\}$$



定式化は可能だが  
サイズ大で実際には扱えない

部分集合は $2^{(\text{点数})}$ 個存在

⇒ 使用枝の組合せを決める問題

⇒ **組合せ最適化問題** combinatorial optimization problem

**離散最適化問題** discrete optimization problem

# 例題4(続) 定式化

$$\min. z=35x_{12}+40x_{13}+25x_{23}+10x_{24}+20x_{34}+15x_{35}+30x_{45}$$

$$\text{s.t.} \quad x_{12}+x_{13}+x_{23}+x_{24}+x_{34}+x_{35}+x_{45}=4$$

$$x_{12}+x_{13}+x_{23} \leq 2$$

$$x_{23}+x_{24}+x_{34} \leq 2$$

$$x_{34}+x_{35}+x_{45} \leq 2$$

$$x_{12}+x_{13}+x_{23}+x_{24}+x_{34} \leq 3$$

$$x_{12}+x_{13}+x_{23}+x_{35} \leq 3$$

$$x_{13}+x_{34}+x_{35}+x_{45} \leq 3$$

$$x_{23}+x_{24}+x_{34}+x_{35}+x_{45} \leq 3$$

$$x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, x_{35}, x_{45} \in \{0,1\}$$

定式化を利用しない

# 最小木の見つけ方: アイディア(1)

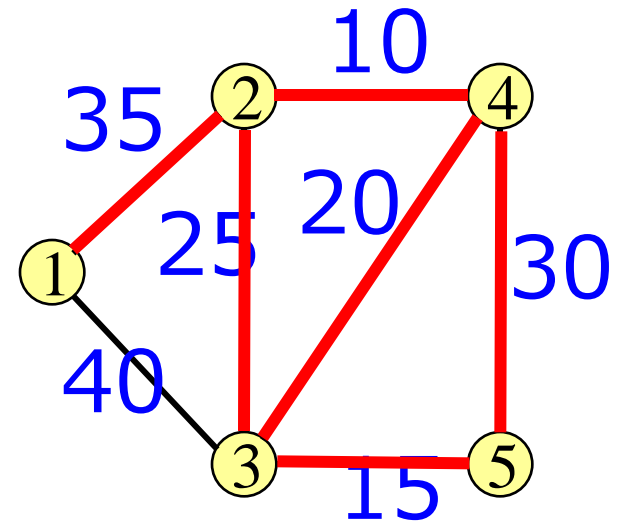
閉路⇒最大重みの枝を消去

↓ 実現方法例

重みの小さい順に枝を選択し  
閉路になる時は選ばない  
全点がつながったら終了

クラスカル法

(Kruskal)



定式化を利用しない

# 最小木の見つけ方: アイディア(2)

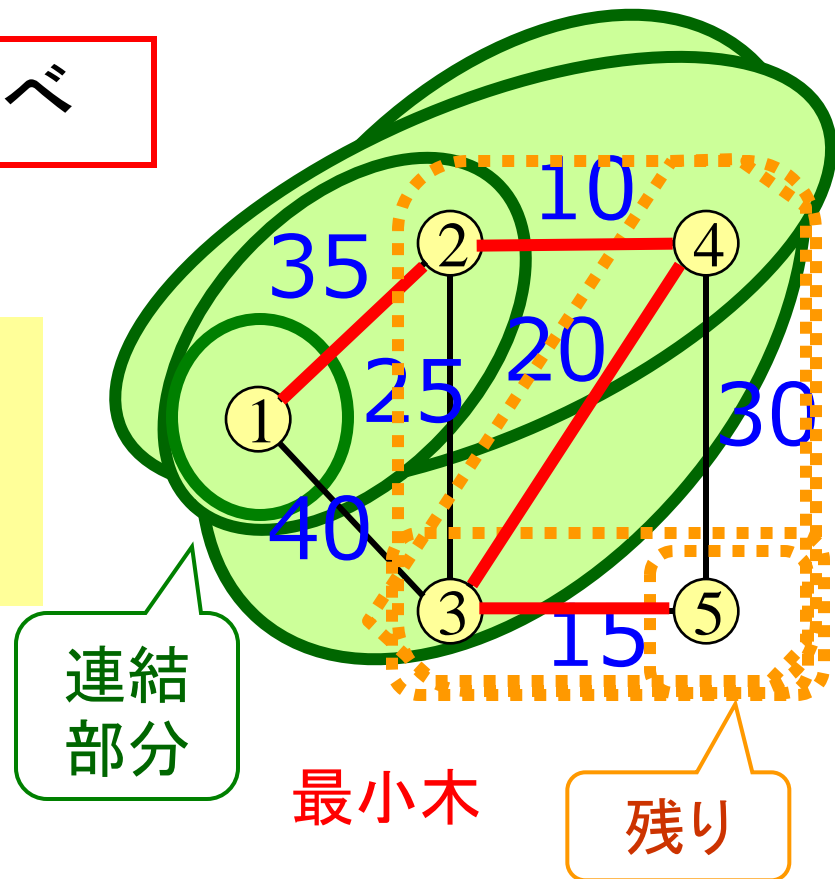
非連結⇒最小重みの枝で結べ

↓ 実現方法例

1点から連結部分を1点ずつ  
最小重みの枝で増やす  
全点が連結になったら終了

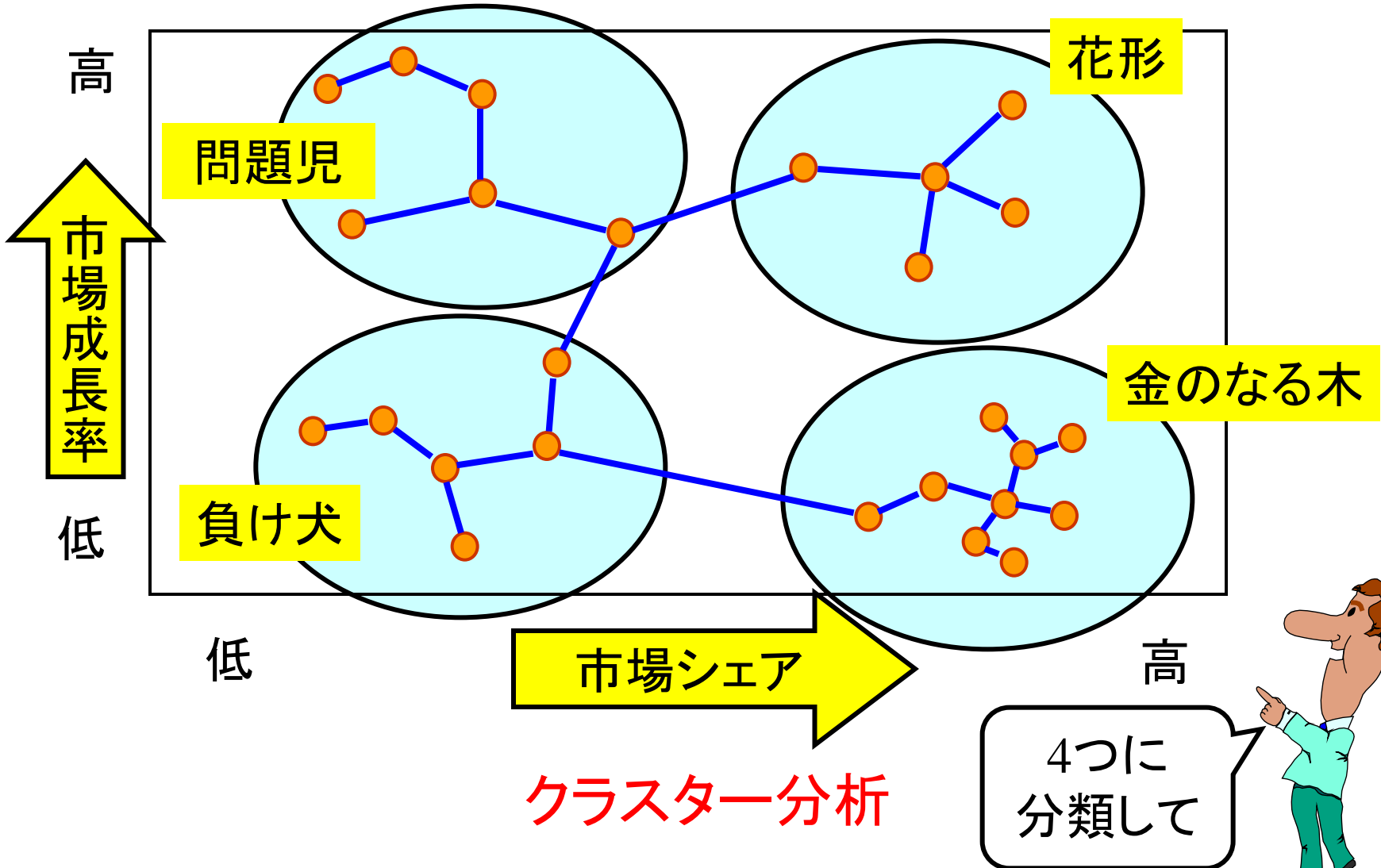
プリム法

(Prim)





# 最小木問題の利用例





# 演習3 定式化せよ

## 施設配置問題

(建設費) + (配送費)を最小にしたい。  
 どこに倉庫を建設し、  
 どのように配送すればよいか。  
 この問題を定式化せよ。

倉庫候補地

③

店

1

①

2

②

ヒント ↓

コントロールできるもの

$$0 \leq x_{ij} \leq 1$$

倉庫iから店jへの配送量  $\Rightarrow$  0~1の値

倉庫iを建設する・しない  $\Rightarrow$  2値

$$y_i \in \{0, 1\}$$

- 倉庫iの建設費用  $f_i$  ( $i=1, 2$ )
- 倉庫iと店j間の配送費用  $c_{ij}$  ( $i=1, 2; j=1, 2, 3$ )
- 各店の需要は1. 分割配送可能.

# さて今後の展開は



最もシンプルな数理計画問題

＝線形計画問題の最適解の導出法を考える





# 寄り道 組合せ最適化

◎ 組み合わせる (動詞)

意味が違う

- × 組み合わせ最適化
- × 組合わせ最適化
- × 組合最適化

