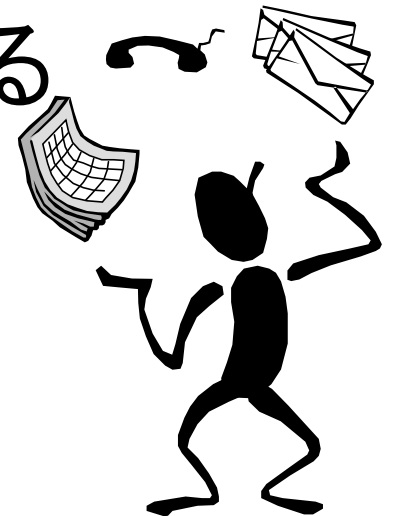


最適化問題の緩和と双対

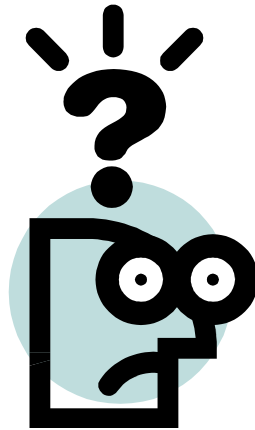
Relaxation and Duality

別な観点から最適化問題を眺める



ここで学ぶこと

- 最適化問題の最適値の上限・下限
- 最適化問題が持つ「裏の顔」との関係



例題1 生産計画



- 2つの製品Q,Rを製造
- 製品Q,R共, 原液A,Bから生産
- 利益最大の生産計画は？

	製品Q 1kg当たり	製品R 1kg当たり	使用可能量
原液A	2(kl)	1(kl)	70(kl/日)
原液B	3(kl)	4(kl)	180(kl/日)
利益	6(千円)	4(千円)	

定式化してみよう！

定式化

製品Qの製造量を x_1 ，製品Rの製造量を x_2 とおく.

$$\max \quad 6x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 \leq 70$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 180$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

...①

...②

最適値はどの程度？見
積もってみよう

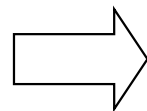


見積もり例

$$\text{制約式①} \times 2 + \text{制約式②} \times 1: 7x_1 + 6x_2 \leq 70 \times 2 + 180 = 320$$

$$\begin{aligned} &\leq \\ \text{目的関数: } &6x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \geq 0$ より



最適値の**上界**は320

演習1: もっと良い見積もりをしてみよう

定式化

製品Qの製造量: x_1

製品Rの製造量: x_2

最適値の見積もり例

$x_1, x_2 \geq 0$ より

最適値の**上界**は320

$$\begin{array}{ll}\max & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 180 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

$$\begin{array}{l} \leq 7x_1 + 6x_2 \leq 320 \\ \begin{array}{l} \times 2 \\ \times 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 \leq 140 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 180 \end{array} \right. + \end{array}$$

最適値の**上界**は315

$$\begin{array}{ll}\max & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 180 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

$$\begin{array}{l} \leq 6x_1 + 6.5x_2 \leq 315 \\ \begin{array}{l} \times 0.9 \\ \times 1.4 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1.8x_1 + 0.9x_2 \leq 63 \\ 4.2x_1 + 5.6x_2 \leq 252 \end{array} \right. + \end{array}$$

Quiz: もっと良い見積もりをしてみよう

最適値の上界・下界

上界の更新

前ページの見積もり1 320

前ページの見積もり2 315



最適値の
上界

方法は?

値の小さい上界
を求めたい

?

最適値

値の大きい下界
を求めたい

シンプレクス法

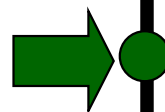
最適値の
下界

$$\begin{array}{ll}\max & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 180 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

実行可能解

$$x_1=10, x_2=30$$

$$\Rightarrow (\text{目的関数値}) = 180$$



より良い上界の見積もり方法

小さくしたい

$$\begin{aligned} 6 &\leq 2y_1 + 3y_2 \\ 4 &\leq y_1 + 4y_2 \end{aligned}$$

で成立

最適値の**上界**は $70y_1 + 180y_2$

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 180 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$(2y_1 + 3y_2)x_1 + (y_1 + 4y_2)x_2 \leq 70y_1 + 180y_2$$

$$\times y_1 \quad 2y_1x_1 + y_1x_2 \leq 70y_1$$

$$\times y_2 \quad 3y_2x_1 + 4y_2x_2 \leq 180y_2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$y_1, y_2 \geq 0 \text{ で成立}$$

最良の上界を見つける問題

$$\begin{aligned} \min. \quad & 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 4y_2 \geq 4 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

より良い上界の見積もり方法

各制約式を何倍するのが適切かを考える

小さくしたい

制約式① $\times y_1$ + 制約式② $\times y_2$:

$$(2x_1 + x_2) \times y_1 + (3x_1 + 4x_2) \times y_2 \leq 70y_1 + 180y_2$$

||

$$(2y_1 + 3y_2) \times x_1 + (y_1 + 4y_2) \times x_2 \leq$$

目的関数: $6x_1 + 4x_2$

$$\begin{aligned} 2y_1 + 3y_2 &\geq 6 \\ y_1 + 4y_2 &\geq 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min. \quad & 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 4y_2 \geq 4 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

この問題の最適解が最良の上界を与える

例題1-2

次の問題の最適値の**より良い下界**を求める
線形計画問題を作ってみよう

$$\begin{array}{ll}\min & 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} & 2y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 4y_2 \geq 4 \\ & y_1, y_2 \geq 0\end{array}$$

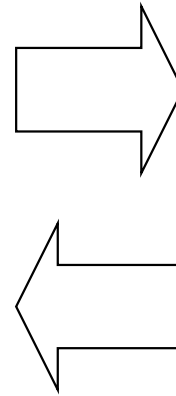
双対な関係

問題(P)

$$\begin{array}{ll}\max & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 180 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

問題(D)

$$\begin{array}{ll}\min & 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} & 2y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 4y_2 \geq 4 \\ & y_1, y_2 \geq 0\end{array}$$



主問題

双対問題

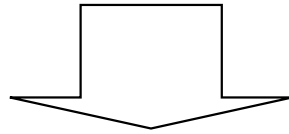
双対問題

主問題



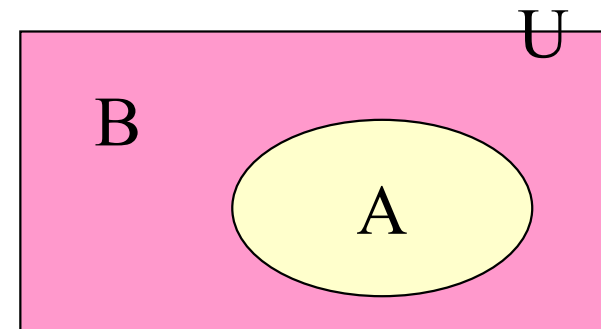
「双対(そうつい)」とは

- ある A に, ある操作 α を行ったら, B を得た.
- B に, 操作 α を行ったら, A を得た.



A と B は(操作 α に関し)双対の関係

(例) 集合 U の部分集合 A :
集合 A の補集合を集合 B とする.
集合 B の補集合は集合 A .



$\Rightarrow$ 集合 A と集合 B は(補集合という操作に関し)双対.

面白そうな双対の関係

- (射影) 幾何学の分野：点と線は双対.
 - 定理「2点を通る直線は1つ」
 - 定理「2直線を通る点は1つ」 } 双対性
(duality)
- いろいろな数理的な場面で双対の関係が本質的に重要役割を演じることが多い.
- 線形計画 (数理計画) の分野にも...

ワーク1 双対問題を作ろう

$$\begin{array}{ll}\max. & z=6x_1+5x_2 \\ \text{s.t.} & 3x_1+x_2 \leq 45 \\ & x_1+2x_2 \leq 40 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

ワーク2 双対問題を作ろう

$$\min. z=500x_1+600x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 \geq 4$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

演習3 双対問題を作ろう

$$\text{maximize } z = -x_1 + 2x_2$$

$$\text{subject to } 2x_1 + x_2 \geq 8 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

双対問題を作る別な方法

(P)

$$\begin{array}{ll}\max & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 180 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

$$70 - (2x_1 + x_2) \geq 0$$

$$180 - (3x_1 + 4x_2) \geq 0$$

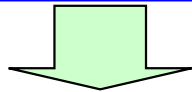
$y_1 \geq 0$ に対して

$$y_1(70 - (2x_1 + x_2)) \geq 0$$

$y_2 \geq 0$ に対して

$$y_2(180 - (3x_1 + 4x_2)) \geq 0$$

(P1)



$\leq$

$$\begin{array}{ll}\max & 6x_1 + 4x_2 + y_1(70 - (2x_1 + x_2)) + y_2(180 - (3x_1 + 4x_2)) \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 180 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

非負

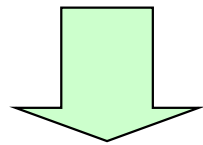
非負

ラグランジュ緩和

(P1)

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 4x_2 + y_1(70 - (2x_1 + x_2)) + y_2(180 - (3x_1 + 4x_2)) \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 180 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

最適化では
様々な場面で現れる
重要な緩和手法



(P2)

ラグランジュ緩和(Lagrange Relaxation)

$\leq$

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 4x_2 + y_1(70 - (2x_1 + x_2)) + y_2(180 - (3x_1 + 4x_2)) \\ \text{s.t.} \quad & x_1, x_2 \geq 0, \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ラグランジュ緩和問題

ラグランジュ緩和問題の構造

(P2)

ラグランジュ緩和問題

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 4x_2 + y_1(70 - (2x_1 + x_2)) + y_2(180 - (3x_1 + 4x_2)) \\ \text{s.t.} \quad & x_1, x_2 \geq 0, \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ラグランジュ緩和問題

整理

非有界にならない
ための条件

$$6 - 2y_1 - 3y_2 \leq 0$$

$$4 - y_1 - 4y_2 \leq 0$$

(P2)

$$\begin{aligned} \max \quad & (6 - 2y_1 - 3y_2)x_1 + (4 - y_1 - 4y_2)x_2 + 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1, x_2 \geq 0, \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

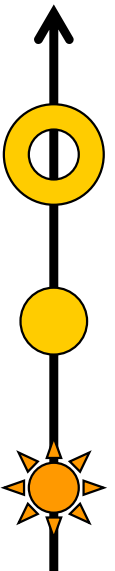
条件緩和

目的関数に追加

(P2)の最適値

(P1)の最適値

(P)の最適値



ラグランジュ緩和問題を利用した より良い上界の導出

(P2)

$$6 - 2y_1 - 3y_2 \leq 0$$

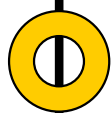
$$4 - y_1 - 4y_2 \leq 0$$

小さくしたい

$$\begin{aligned} \max \quad & (6 - 2y_1 - 3y_2)x_1 + (4 - y_1 - 4y_2)x_2 + 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1, x_2 \geq 0, \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ラグランジュ緩和問題

(P2)の最適値



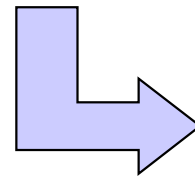
(P1)の最適値



(P)の最適値



より良い上界



より良い上界を
求める問題(D)

$$\begin{aligned} \min. \quad & 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} \quad & 6 - 2y_1 - 3y_2 \leq 0 \\ & 4 - y_1 - 4y_2 \leq 0 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

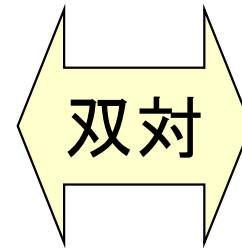
ラグランジュ緩和問題を利用した 双対問題の導出

(P)

$$\begin{array}{ll}\max & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 180 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

(D)

$$\begin{array}{ll}\min. & 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} & 2y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 4y_2 \geq 4 \\ & y_1, y_2 \geq 0\end{array}$$



ラグランジュ緩和問題

(P2)の最適値

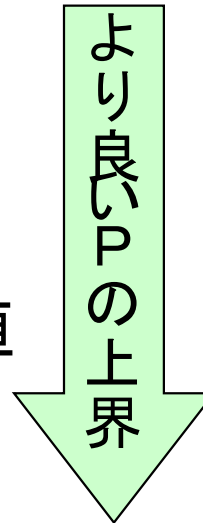


(D)の最適値

(P)の最適値



より良いPの上界

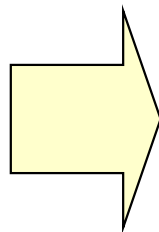


練習1

ラグランジュ緩和問題を経由し、
(D)の双対問題が(P)になることを確認せよ

(D)

$$\begin{array}{ll}\min. & 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} & 2y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 4y_2 \geq 4 \\ & y_1, y_2 \geq 0\end{array}$$



(P)

$$\begin{array}{ll}\max & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 180 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

練習2

ラグランジュ緩和問題を経由し
双対問題を作ろう

(P)

$$\max. \quad -x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 \geq 8$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

練習2 解答例(1)

(P)

$$\begin{array}{ll}\text{max.} & -x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

$$8 - (2x_1 + x_2) \leq 0$$

$$9 - (x_1 + 3x_2 + x_3) = 0$$

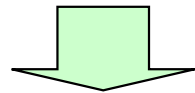
$y_1 \leq 0$ に対して

$$y_1(8 - (2x_1 + x_2)) \geq 0$$

y_2 (自由変数) に対して

$$y_2(9 - (x_1 + 3x_2 + x_3)) = 0$$

(P1)



$\leq$

$$\text{max.} \quad -x_1 + 2x_2 + y_1(8 - (2x_1 + x_2)) + y_2(9 - (x_1 + 3x_2 + x_3))$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 \geq 8$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$y_1 \leq 0$$

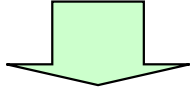
非負

0

練習2 解答例(2)

(P1)

$$\begin{aligned} \max. \quad & -x_1 + 2x_2 + y_1(8 - (2x_1 + x_2)) + y_2(9 - (x_1 + 3x_2 + x_3)) \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ & y_1 \leq 0 \end{aligned}$$

(P2)  ラグランジュ緩和(Lagrange Relaxation)

$\leq$

$$\begin{aligned} \max. \quad & -x_1 + 2x_2 + y_1(8 - (2x_1 + x_2)) + y_2(9 - (x_1 + 3x_2 + x_3)) \\ \text{s.t.} \quad & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ & y_1 \leq 0 \end{aligned}$$

ラグランジュ緩和問題

練習2 解答例(3)

ラグランジュ緩和問題

$$\begin{aligned} \max. \quad & -x_1 + 2x_2 + y_1(8 - (2x_1 + x_2)) + y_2(9 - (x_1 + 3x_2 + x_3)) \\ \text{s.t.} \quad & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ & y_1 \leq 0 \end{aligned}$$

整理

非有界にならないための条件

$$-1 - 2y_1 - y_2 \leq 0$$

$$2 - y_1 - 3y_2 \leq 0$$

$$-y_2 \leq 0$$

$$\begin{aligned} \max. \quad & (-1 - 2y_1 - y_2)x_1 + (2 - y_1 - 3y_2)x_2 + (-y_2)x_3 + 8y_1 + 9y_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ & y_1 \leq 0 \end{aligned}$$

練習2 解答例(4)

$$-1 - 2y_1 - y_2 \leq 0$$

$$2 - y_1 - 3y_2 \leq 0$$

$$-y_2 \leq 0$$

小さくしたい

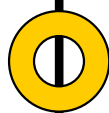
$$\text{max. } (-1 - 2y_1 - y_2)x_1 + (2 - y_1 - 3y_2)x_2 + (-y_2)x_3 + 8y_1 + 9y_2$$

$$\text{s.t. } x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$y_1 \leq 0$$

ラグランジュ緩和問題

(P2)の最適値



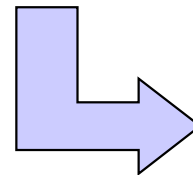
(P1)の最適値



(P)の最適値



より良い上界



より良い上界を
求める問題(D)

$$\text{min. } 8y_1 + 9y_2$$

$$\text{s.t. } -1 - 2y_1 - y_2 \leq 0$$

$$2 - y_1 - 3y_2 \leq 0$$

$$-y_2 \leq 0$$

$$y_1 \leq 0$$

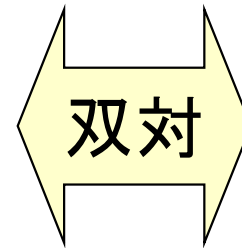
練習2 解答例(5)

(P)

$$\begin{array}{ll}\max. & -x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

(D)

$$\begin{array}{ll}\min. & 8y_1 + 9y_2 \\ \text{s.t.} & 2y_1 + y_2 \geq -1 \\ & y_1 + 3y_2 \geq 2 \\ & y_1 \leq 0 \\ & y_2 \geq 0\end{array}$$



ラグランジュ緩和問題

(P2)の最適値

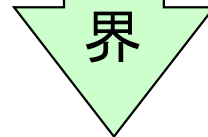


(D)の最適値

(P)の最適値



より良いPの上界

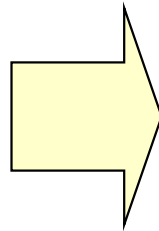


演習4

ラグランジュ緩和問題を経由し,
(D)の双対問題が(P)になることを確認せよ

(D)

$$\begin{array}{ll}\min. & 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} & 2y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 4y_2 \geq 4 \\ & y_1, y_2 \geq 0\end{array}$$



(P)

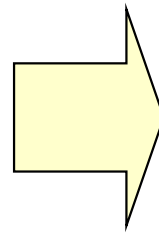
$$\begin{array}{ll}\max & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 180 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

演習5

ラグランジュ緩和問題を経由し,
(D)の双対問題が(P)になることを確認せよ

(D)

$$\begin{array}{ll}\min. & 8y_1 + 9y_2 \\ \text{s.t.} & 2y_1 + y_2 \geq -1 \\ & y_1 + 3y_2 \geq 2 \\ & y_1 \leq 0 \\ & y_2 \geq 0\end{array}$$



(P)

$$\begin{array}{ll}\max. & -x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

ワーク3 ラグランジュ緩和問題を経由し双対問題を作ろう

$$\begin{array}{ll}\max. & z=6x_1+5x_2 \\ \text{s.t.} & 3x_1+x_2 \leq 45 \\ & x_1+2x_2 \leq 40 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

ワーク4 ラグランジュ緩和問題を経由し双対問題を作ろう

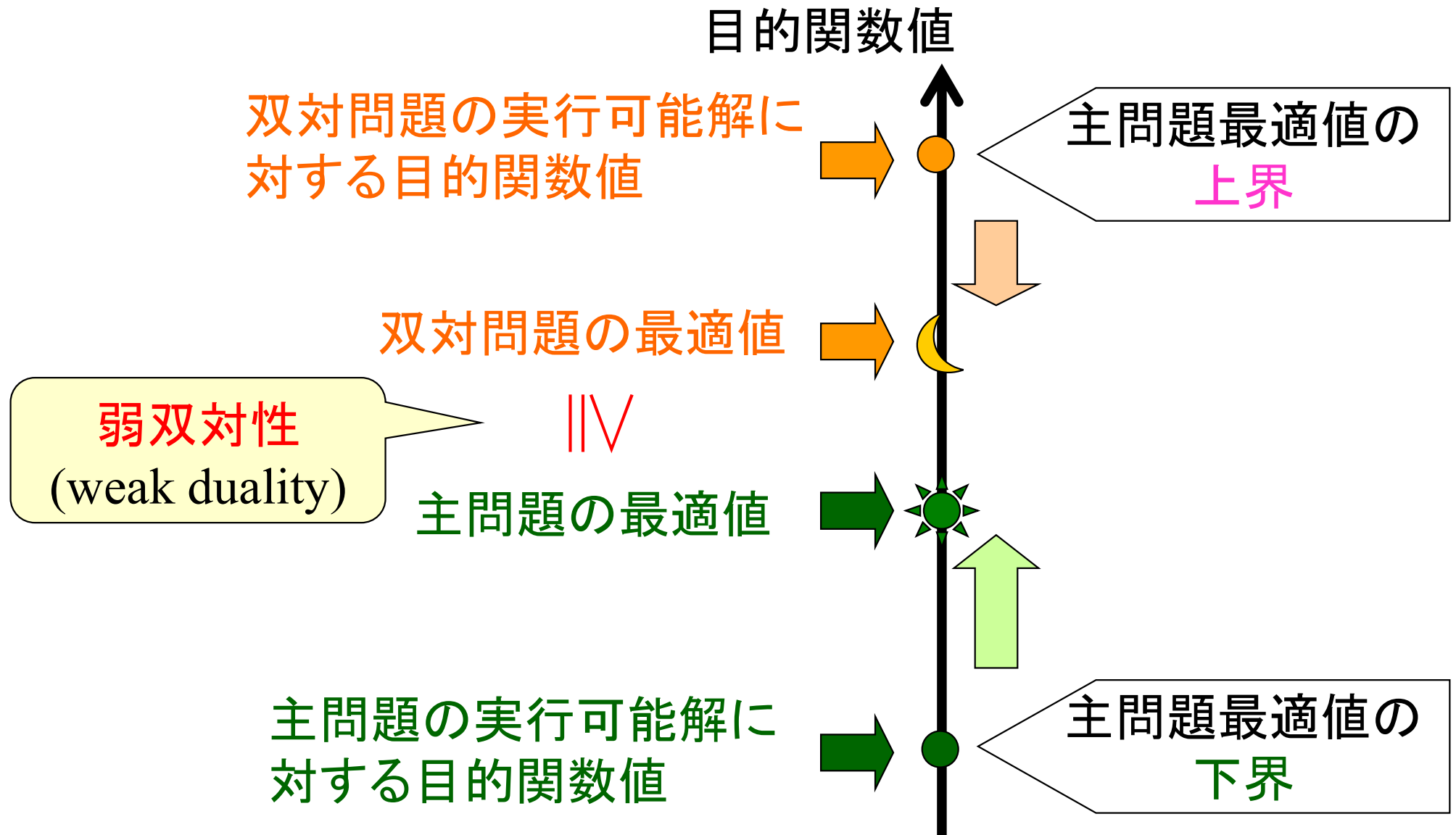
$$\min. z=500x_1+600x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 \geq 4$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

主問題と双対問題の関係(1)



主問題と双対問題の解

シンプレクス法で最適解と最適値を求めてみる

主問題(P)

$$\begin{array}{ll}\max & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 180 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

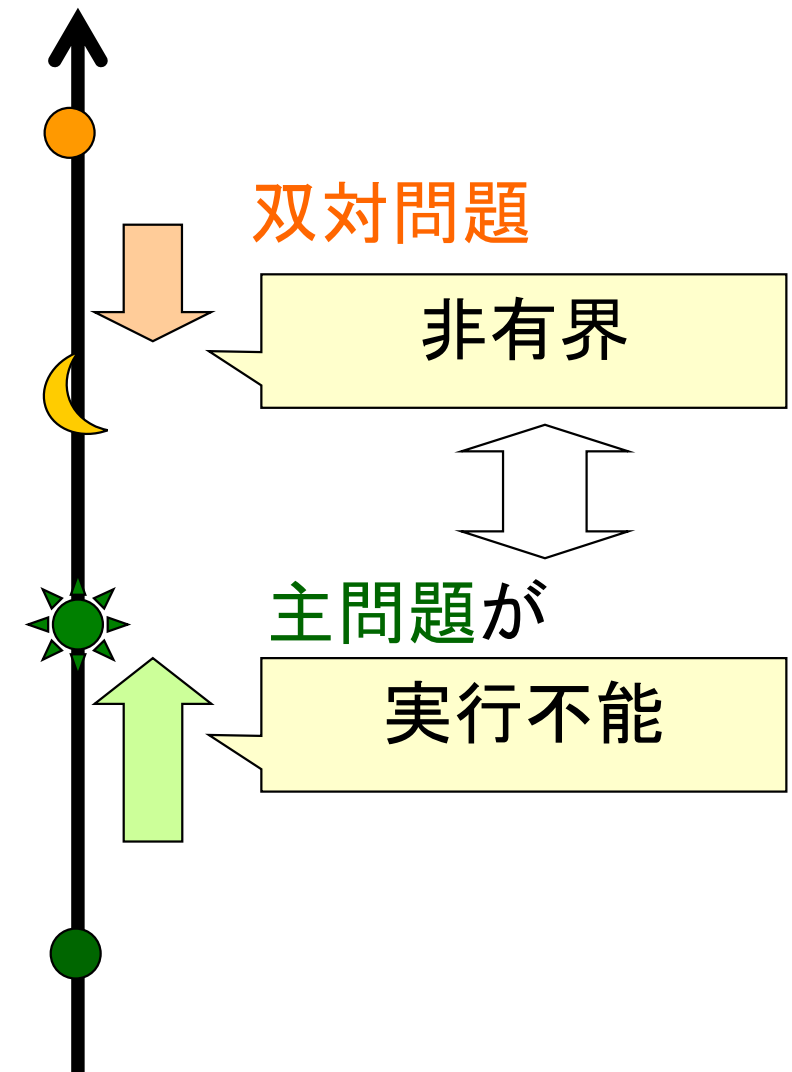
双対問題(D)

$$\begin{array}{ll}\min & 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} & 2y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 4y_2 \geq 4 \\ & y_1, y_2 \geq 0\end{array}$$

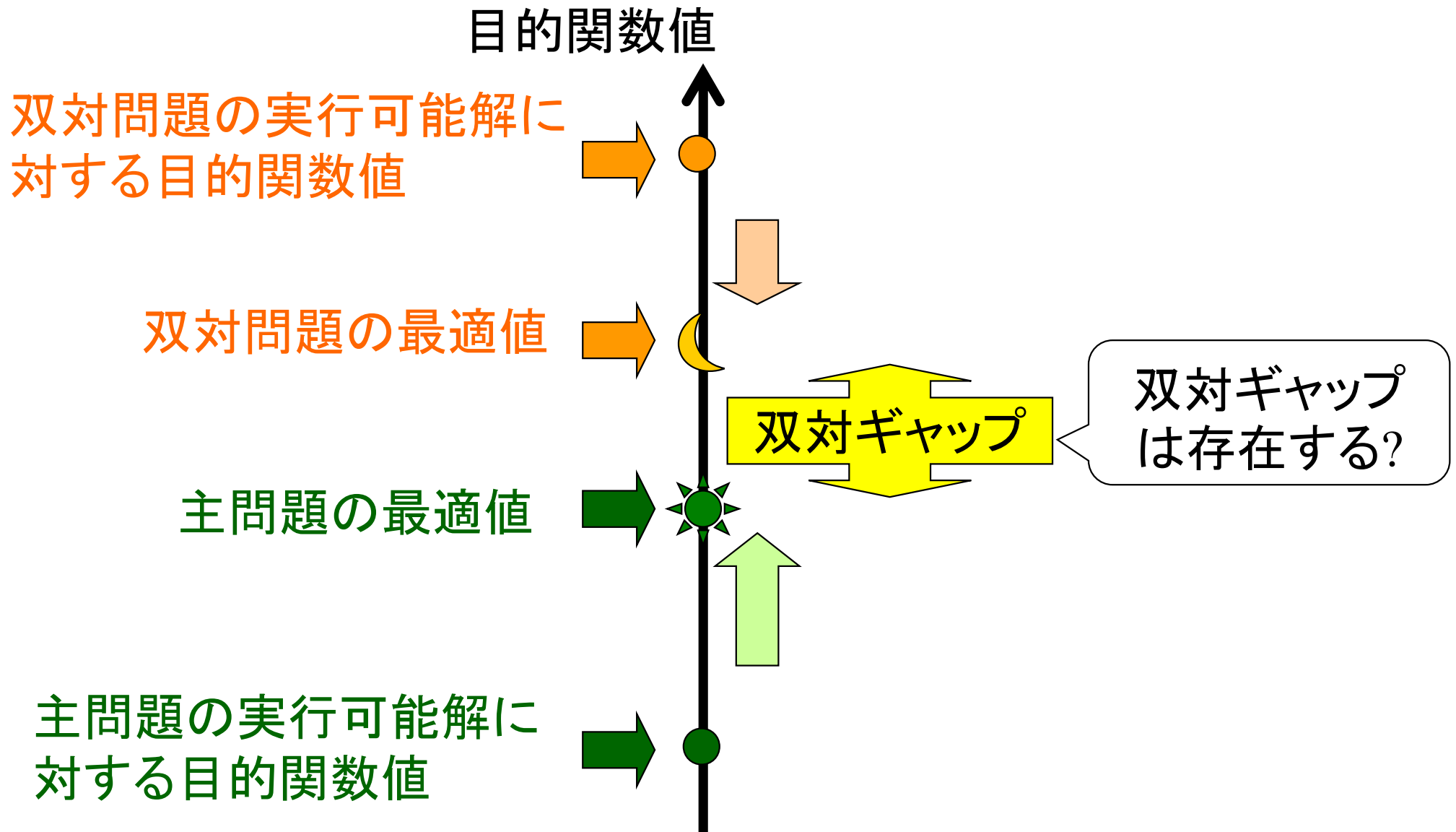
各々の最終的なシンプレックス表を比較⇒

主問題と双対問題の関係(2)

どの組合せ があり得る?			双対問題		
			実行可能		実行 不能
			最適 解	非 有界	
主 問題	実行 可能	最適 解		×	×
		非 有界	×	×	
	実行 不能		×		



主問題と双対問題の関係(3)

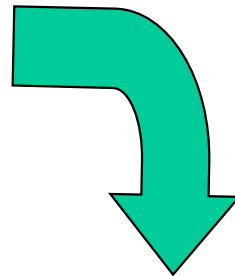


主問題

製品Qの製造量: x_1

製品Rの製造量: x_2

$$\begin{array}{ll}\max & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 180 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$



シンプレックス法で解く

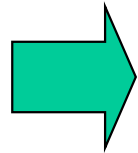
シンプレックス表
(最終)

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
x1	0	1	0	4/5	-2/5	20
x2	0	0	1	-3/5	2/5	30
z	1	0	0	12/5	2/5	240

最適解 $x_1 = 20, x_2 = 30$

双対問題

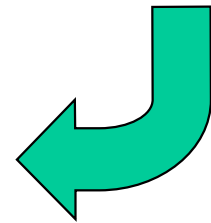
$$\begin{array}{ll}\min & 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} & 2y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 4y_2 \geq 4 \\ & y_1, y_2 \geq 0\end{array}$$



$$\begin{array}{ll}\max & (-z) = -70y_1 - 180y_2 \\ \text{s.t.} & 2y_1 + 3y_2 - s_1 = 6 \\ & y_1 + 4y_2 - s_2 = 5 \\ & y_1, y_2, s_1, s_2 \geq 0\end{array}$$

2段階シンプレックス表(最終)

基底変数	$(-z)$	y_1	y_2	s_1	s_2	定数項
y_1	0	1	0	$-4/5$	$3/5$	$12/5$
y_2	0	0	1	$1/5$	$-2/5$	$2/5$
$(-z)$	1	0	0	20	30	-240



主問題と双対問題の関係(4)

シンプレクス法で最適解と最適値を導出

主問題

$$\begin{array}{ll}\max & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 180 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

基底変数	z	x1	x2	s1	s2	定数項
x1	0	1	0	4/5	-2/5	20
x2	0	0	1	-3/5	2/5	30
z	1	0	0	12/5	2/5	240

双対問題

$$\begin{array}{ll}\min & 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} & 2y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 4y_2 \geq 4 \\ & y_1, y_2 \geq 0\end{array}$$

基底変数	(-z)	y1	y2	s1	s2	定数項
y1	0	1	0	-4/5	3/5	12/5
y2	0	0	1	1/5	-2/5	2/5
(-z)	1	0	0	20	30	-240

主問題の最適値 $\Leftrightarrow$ 双対問題の最適値

主(双対)問題の最適解 $\Leftrightarrow$ 双対(主)問題の限界価値

偶然？

主問題

$$\begin{array}{ll}\max. & \mathbf{c}^t \mathbf{x} \\ \text{s.t.} & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$



双対問題

$$\begin{array}{ll}\min. & \mathbf{b}^t \mathbf{y} \\ \text{s.t.} & \mathbf{A}^t \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

LPでの主問題と双対問題の重要な関係

◆ (主問題の最適値) = (双対問題の最適値)

(双対ギャップ) = 0

強双対性
(strong duality)

ワーク5

双対問題を解き最適解を求めよう

$$\min. z = 500x_1 + 600x_2$$

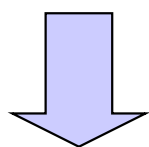
$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 \geq 4$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 6$$

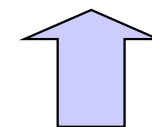
$$x_1, x_2 \geq 0$$

強双対性から得られる性質

$$\begin{aligned} \min. & (70 - 2x_1 - x_2)y_1 + (180 - 3x_1 - 4x_2)y_2 + 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} & x_1, x_2 \geq 0, y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

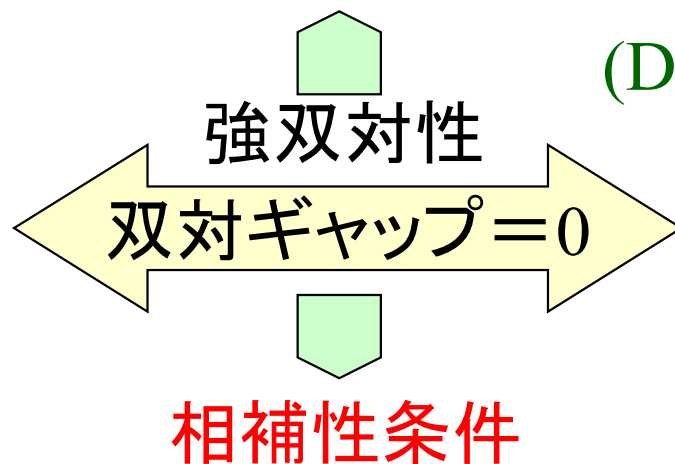


$$(70 - 2x_1 - x_2)y_1 + (180 - 3x_1 - 4x_2)y_2 = 0$$



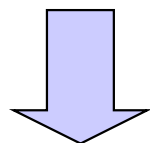
(P)

$$\begin{aligned} \max & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 180 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

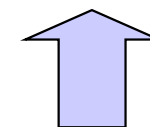


(D)

$$\begin{aligned} \min. & 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} & 2y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 4y_2 \geq 4 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$



$$(6 - 2y_1 - 3y_2)x_1 + (4 - y_1 - 4y_2)x_2 = 0$$



$$\begin{aligned} \max & (6 - 2y_1 - 3y_2)x_1 + (4 - y_1 - 4y_2)x_2 + 70y_1 + 180y_2 \\ \text{s.t.} & x_1, x_2 \geq 0, y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ラグランジュ緩和問題

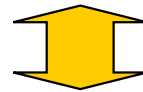
相補性条件

(Complementary slackness condition)

x_1, x_2 が(P)の実行可能解, y_1, y_2 が(D)の実行可能解

$$(70 - 2x_1 - x_2)y_1 + (180 - 3x_1 - 4x_2)y_2 = 0$$

$$(6 - 2y_1 - 3y_2)x_1 + (4 - y_1 - 4y_2)x_2 = 0$$



$$\begin{aligned}(70 - 2x_1 - x_2)y_1 &= 0 \\ (180 - 3x_1 - 4x_2)y_2 &= 0 \\ (6 - 2y_1 - 3y_2)x_1 &= 0 \\ (4 - y_1 - 4y_2)x_2 &= 0\end{aligned}$$

条件に余裕



対応双対変数=0

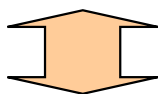
x_1, x_2 が(P)の最適解



y_1, y_2 が(D)の最適解

双対定理

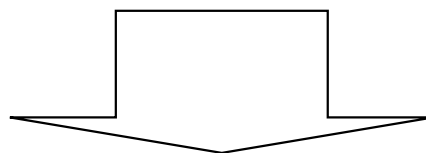
- 主問題に有界な最適解が存在



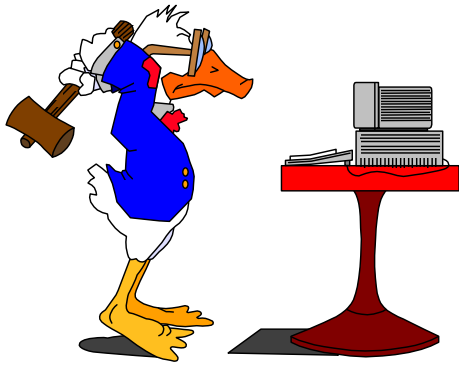
- 双対問題にも有界な最適解が存在
- それぞれの目的関数値は一致



相補性条件



- 双対問題が主問題の最適解の証拠を提供
- 双対問題から間接的に主問題の情報把握
- 最適化アルゴリズムの開発に応用



演習6

以下の線形計画問題を解きなさい.

$$(1) \min 10x_1 + 20x_2 + 30x_3$$

$$\text{s.t. } 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 4$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$(2) \min 30x_1 + 10x_2$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 \geq 4$$

$$5x_1 + x_2 \geq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

双対問題を作り, 双対定理を利用することにより

上記の問題を解きなさい

演習

粉製品P,Q,Rは職人A,Bの手作業で完成する.

(例: 製品P1kgは, 職人Aが3h, 職人Bが2h加工し完成)

- (1) 利益を最大にする生産計画を求める問題を定式化せよ.
- (2) 双対問題を作成せよ.
- (3) 双対変数の単位を明示せよ.
- (4) 双対変数の意味を自由に発想し, 双対問題を解釈せよ.

	製品P 1kg	製品Q 1kg	製品R 1kg	労働制限
職人A	3時間	2時間	4時間	40時間/週
職人B	2時間	4時間	3時間	42時間/週
利益	8千円	7千円	10千円	

さて、この後は

- **双対定理**を利用したアルゴリズム開発
 - ネットワーク計画
- **緩和**を用いたアルゴリズムの開発
 - 整数計画問題

