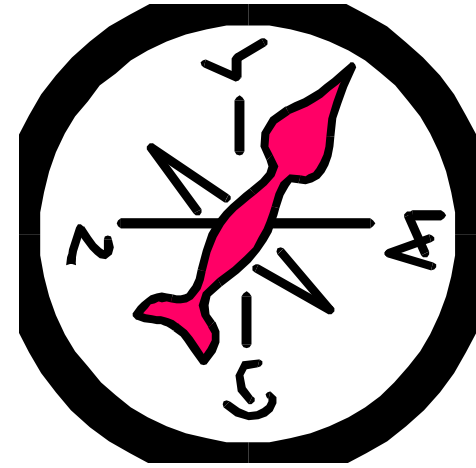




双対性の利活用

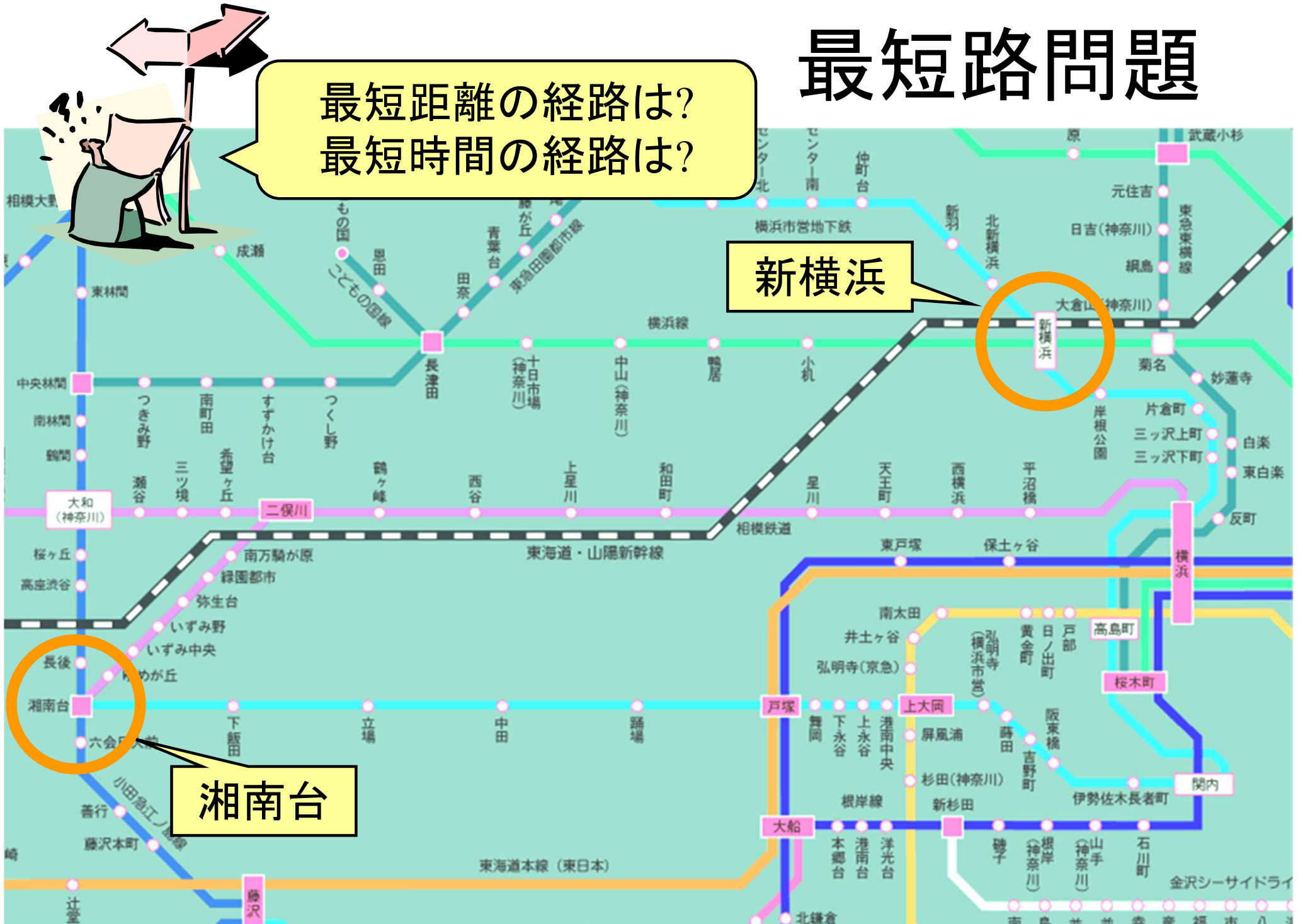
最短路問題を例として

最短路問題

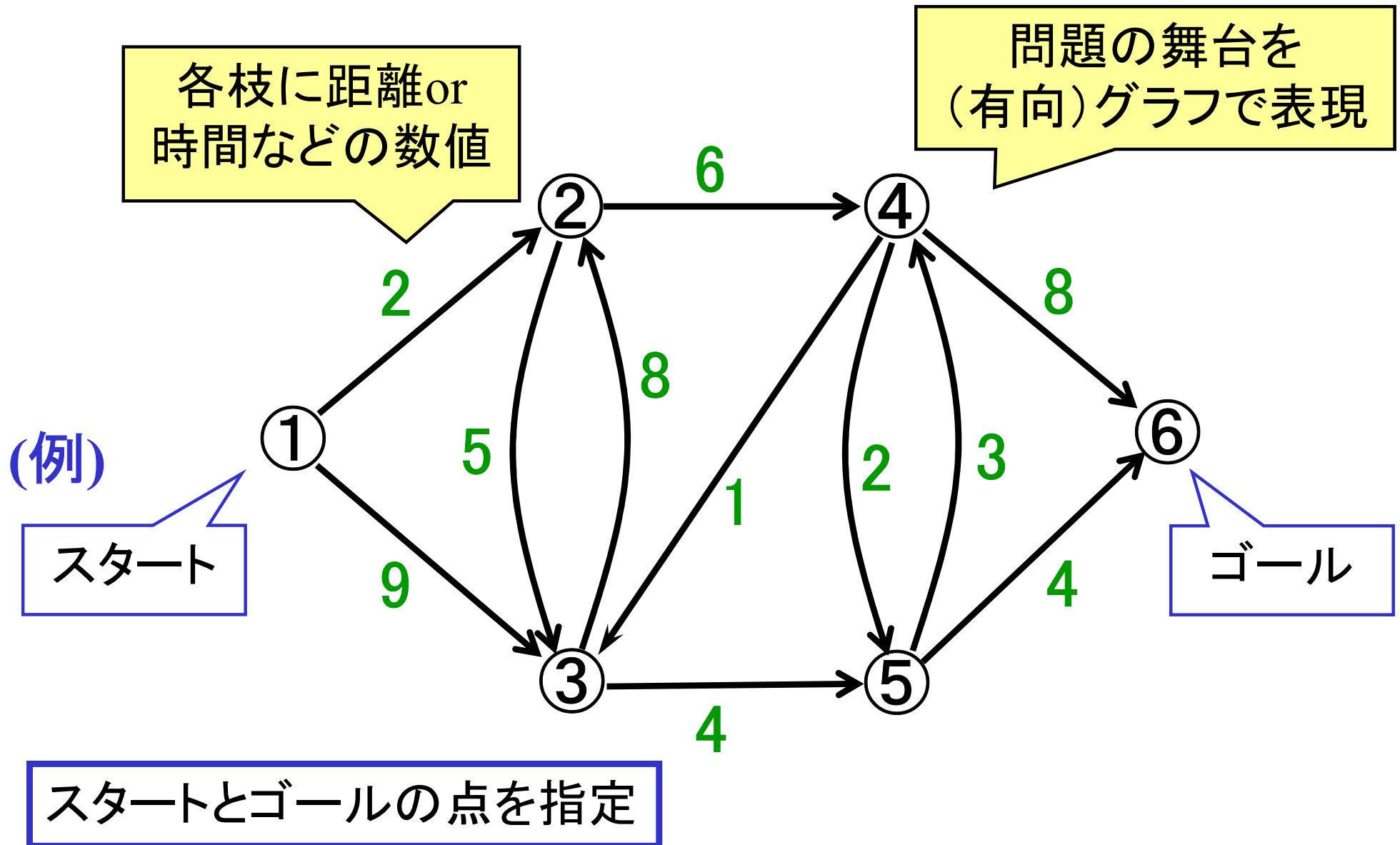
最短距離の経路は?
最短時間の経路は?

新横浜

湘南台



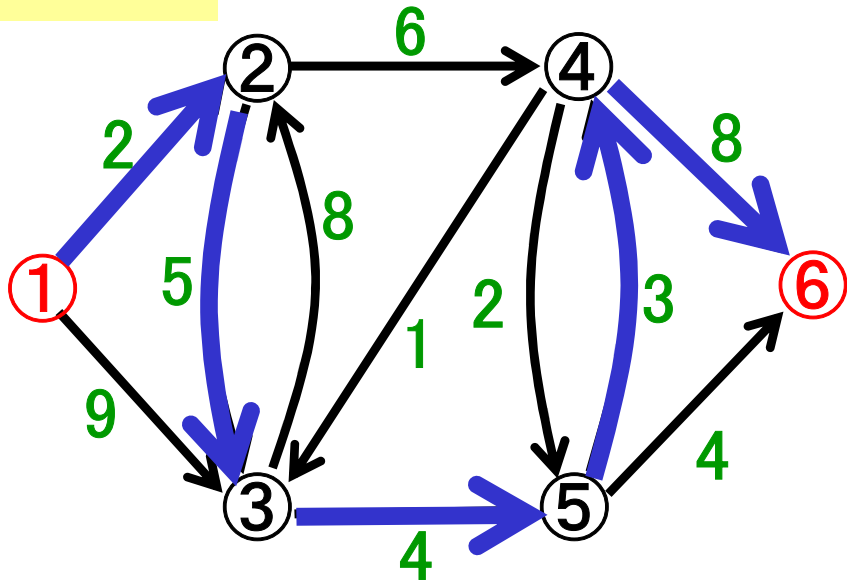
最短路問題のネットワーク表現



パス(経路)とその長さ

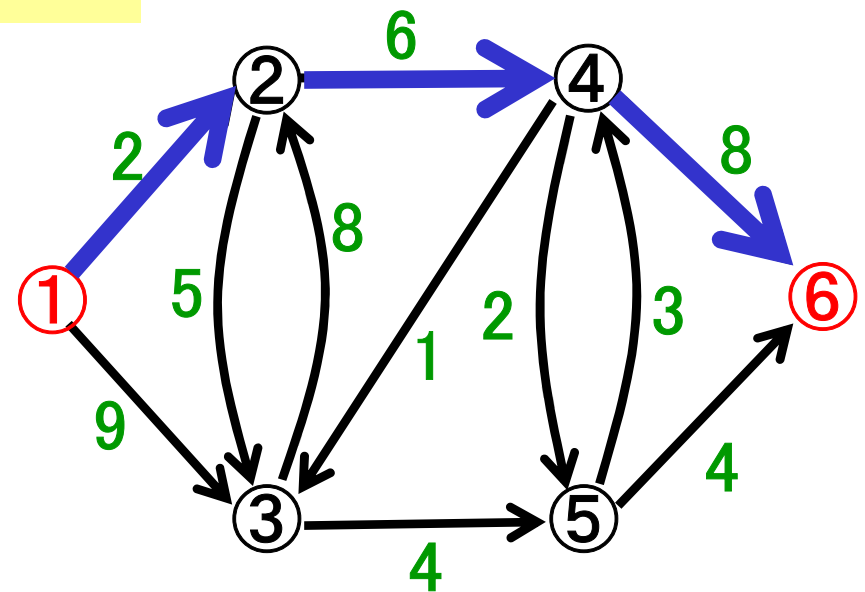
パス(経路): ある点とある点を結ぶ枝の列(向きに注意!)

パスA



パスの長さ: $2+5+4+3+8=22$

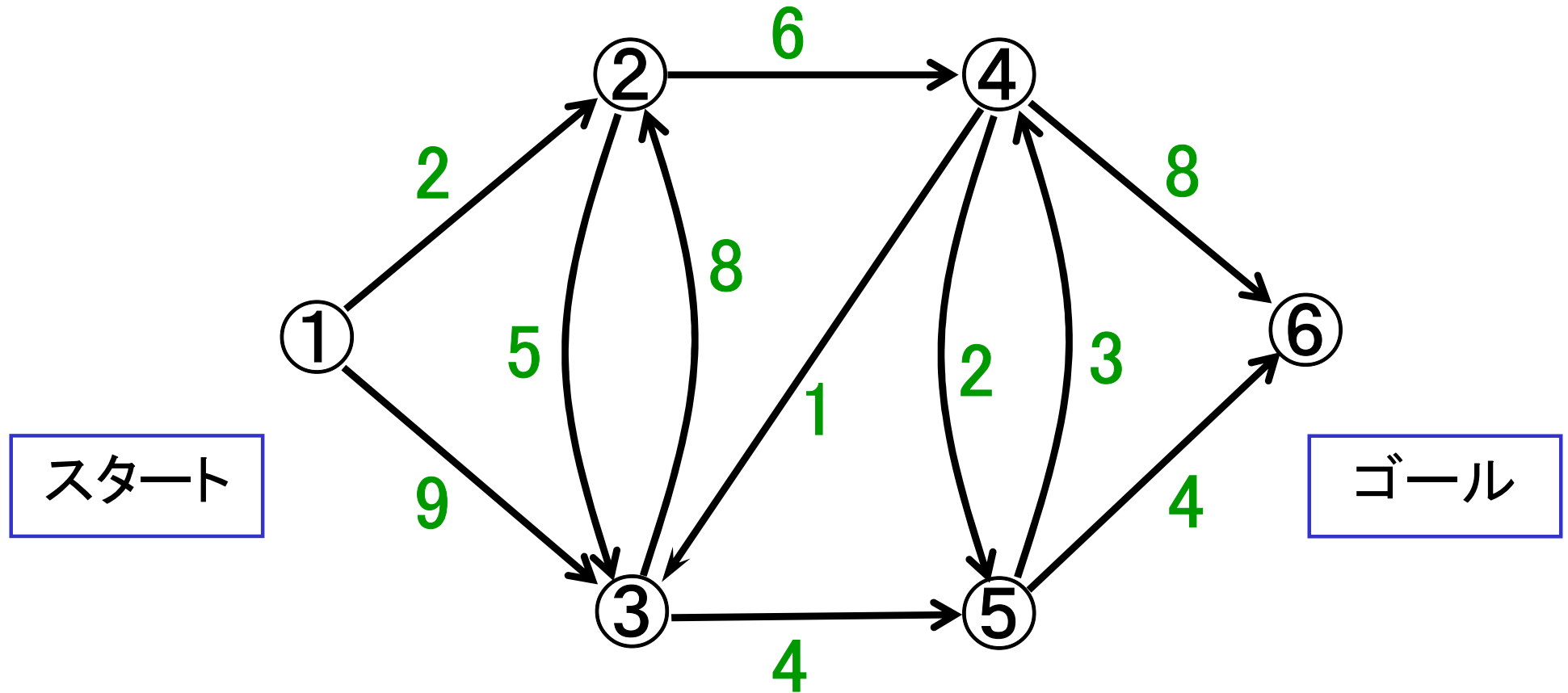
パスB



$2+6+8=16$

- スタートとゴールを結ぶパスは多数
- その中で長さが最短のパス = 最短路
- 最短路を見つける問題: 最短路問題

例題1 最短路を求めよ



最短路問題を定式化してみよう

例題1(続) 定式化の準備

決めたいこと

どの枝を通るか

変数

$x_{ij} \in \{0,1\}$: 枝(i,j)を通る $x_{ij}=1$; 通らない $x_{ij}=0$

経路の特徴

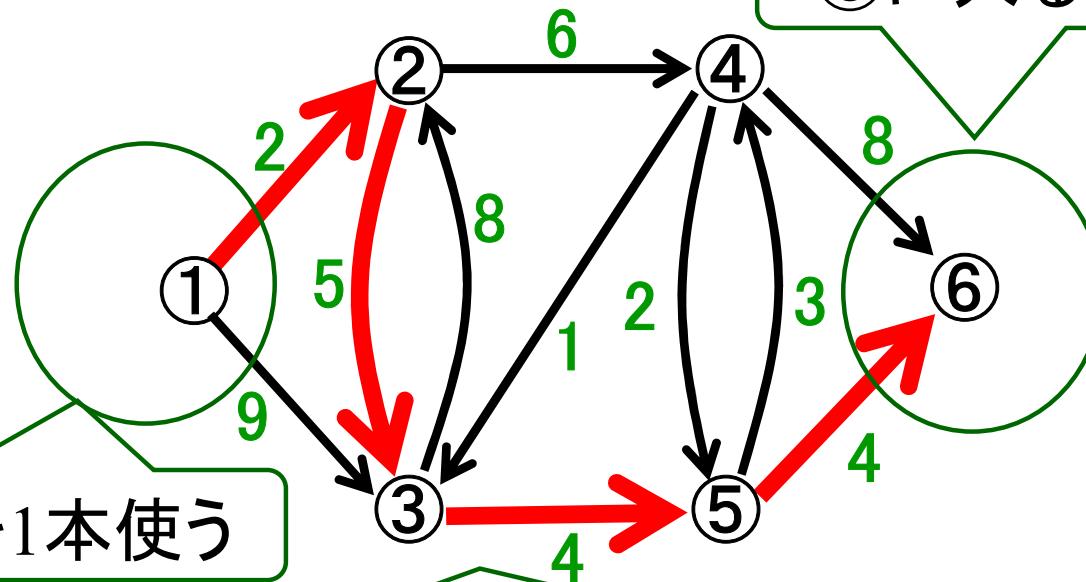
①→⑥を結ぶ枝の列

制約

⑥に入る枝を1本使う

①から出る枝を1本使う

中間点: 入枝が1本使用 $\Rightarrow$ 出枝を1本使用



例題1(続) 最短路問題の定式化

$$\min. 2x_{12} + 9x_{13} + 5x_{23} + 6x_{24} + 8x_{32} + 4x_{35} + x_{43} + 2x_{45} + 8x_{46} + 3x_{54} + 4x_{56}$$

$$\text{s.t.} \quad x_{12} + x_{13} = 1$$

$$x_{12} + x_{32} = x_{23} + x_{24}$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{43} = x_{32} + x_{35}$$

$$x_{24} + x_{54} = x_{43} + x_{45} + x_{46}$$

$$x_{35} + x_{45} = x_{54} + x_{56}$$

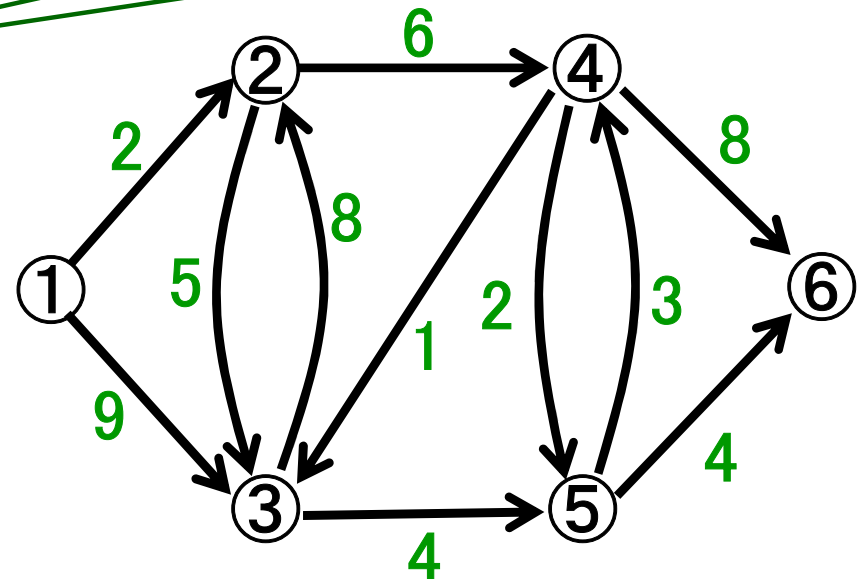
$$x_{46} + x_{56} = 1$$

全枝(i,j)に対して $x_{ij} \in \{0,1\}$

①から出る枝を1本使う

中間点: 入枝が1本使用
⇒ 出枝を1本使用

⑥に入る枝を1本使う

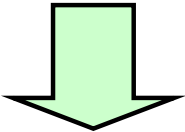


例題1(続) 数式表現の整理

最短路問題(IP)

$$\begin{aligned} \min. & 2x_{12} + 9x_{13} + 5x_{23} + 6x_{24} + 8x_{32} + 4x_{35} + x_{43} + 2x_{45} + 8x_{46} + 3x_{54} + 4x_{56} \\ \text{s.t.} & -x_{12} - x_{13} = -1 \\ & +x_{12} - x_{23} - x_{24} + x_{32} = 0 \\ & +x_{13} + x_{23} - x_{32} - x_{35} + x_{43} = 0 \\ & +x_{24} - x_{43} - x_{45} - x_{46} + x_{54} = 0 \\ & +x_{35} + x_{45} - x_{54} - x_{56} = 0 \\ & +x_{46} + x_{56} = 1 \end{aligned}$$

全枝(i,j)に対して ~~$x_{ij} \in \{0, 1\}$~~ $x_{ij} \geq 0$

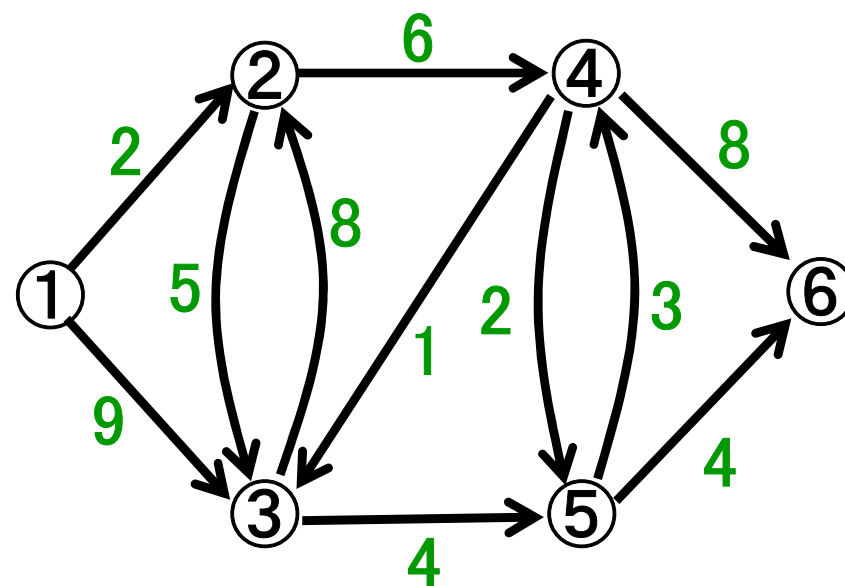
 LP緩和
線形計画問題(P)

演習: (P)の双対問題を作ってみよう
相補性条件を導いてみよう

寄り道 ネットワークのデータ表現

	a_{12}	a_{13}	a_{23}	a_{24}	a_{32}	a_{35}	a_{43}	a_{45}	a_{46}	a_{54}	a_{56}
①	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
②	-1	0	1	1	-1	0	0	0	0	0	0
③	0	-1	-1	0	1	1	-1	0	0	0	0
④	0	0	0	-1	0	0	1	1	1	-1	0
⑤	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	1	1
⑥	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1

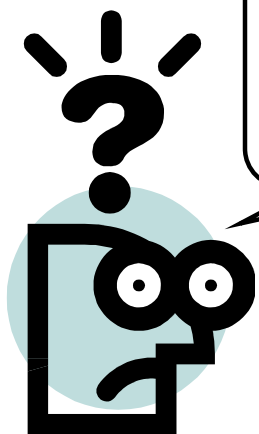
接続行列
(incidence matrix)



双対問題(D)

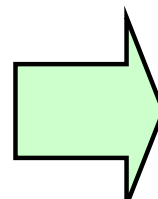
双対変数:

$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$



どうやって
解く?

$$\begin{array}{ll}\max. & -p_1 + p_6 \\ \text{s.t.} & p_2 - p_1 \leq 2 \\ & p_3 - p_1 \leq 9 \\ & p_3 - p_2 \leq 5 \\ & p_4 - p_2 \leq 6 \\ & p_2 - p_3 \leq 8 \\ & p_5 - p_3 \leq 4 \\ & p_3 - p_4 \leq 1 \\ & p_5 - p_4 \leq 2 \\ & p_6 - p_4 \leq 8 \\ & p_4 - p_5 \leq 3 \\ & p_6 - p_5 \leq 4\end{array}$$



仮定
 $p_1 = 0$

$$\begin{array}{ll}\max. & p_6 \\ \text{s.t.} & p_2 \leq p_1 + 2 \\ & p_3 \leq p_1 + 9 \\ & p_3 \leq p_2 + 5 \\ & p_4 \leq p_2 + 6 \\ & p_2 \leq p_3 + 8 \\ & p_5 \leq p_3 + 4 \\ & p_3 \leq p_4 + 1 \\ & p_5 \leq p_4 + 2 \\ & p_6 \leq p_4 + 8 \\ & p_4 \leq p_5 + 3 \\ & p_6 \leq p_5 + 4 \\ & p_1 = 0\end{array}$$

$$\max. p_6$$

$$\text{s.t. } p_2 \leq p_1 + 2$$

$$p_3 \leq p_1 + 9$$

$$p_3 \leq p_2 + 5$$

$$p_4 \leq p_2 + 6$$

$$p_2 \leq p_3 + 8$$

$$p_5 \leq p_3 + 4$$

$$p_3 \leq p_4 + 1$$

$$p_5 \leq p_4 + 2$$

$$p_6 \leq p_4 + 8$$

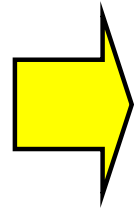
$$p_4 \leq p_5 + 3$$

$$p_6 \leq p_5 + 4$$

$$p_1 = 0$$

(D)の解き方: アイディア

ベルマン方程式(Bellman's equation)



$$p_1 = 0$$

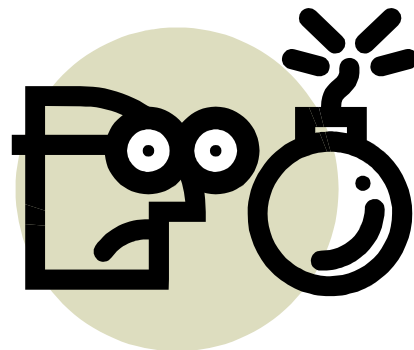
$$p_2 = \min\{p_1 + 2, p_3 + 8\}$$

$$p_3 = \min\{p_1 + 9, p_2 + 5, p_4 + 1\}$$

$$p_4 = \min\{p_2 + 6, p_5 + 3\}$$

$$p_5 = \min\{p_3 + 4, p_4 + 2\}$$

$$p_6 = \min\{p_4 + 8, p_5 + 4\}$$



この方程式って解けるの?

ベルマン方程式の解き方

無変化で終了

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = \min\{p_1 + 2, p_3 + 8\}$$

$$p_3 = \min\{p_1 + 9, p_2 + 5, p_4 + 1\}$$

$$p_4 = \min\{p_2 + 6, p_5 + 3\}$$

$$p_5 = \min\{p_3 + 4, p_4 + 2\}$$

$$p_6 = \min\{p_4 + 8, p_5 + 4\}$$

動的計画法の利用

ベルマン-フォード法

計算量: $O(mn)$

n: 点数
m: 枝数

	初期解	改定1	改定2	改定3	改定4	改定5	改定6
p_1	0	0	0	0	0	0	0
p_2	∞	2	2	2	2	2	2
p_3	∞	9	7	7	7	7	7
p_4	∞	∞	8	8	8	8	8
p_5	∞	∞	13	11	10	10	10
p_6	∞	∞	∞	16	15	14	14

(D)の最適解

(D)の解 $\Rightarrow$ (P)の解

相補性条件

$$(2 - p_2 + p_1)x_{12} = 0$$

$$(9 - p_3 + p_1)x_{13} = 0$$

$$(5 - p_3 + p_2)x_{23} = 0$$

$$(6 - p_4 + p_2)x_{24} = 0$$

$$(8 - p_2 + p_3)x_{32} = 0$$

$$(4 - p_5 + p_3)x_{35} = 0$$

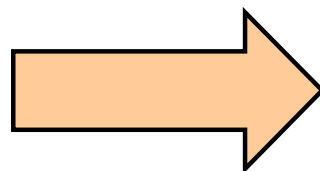
$$(1 - p_3 + p_4)x_{43} = 0$$

$$(2 - p_5 + p_4)x_{45} = 0$$

$$(8 - p_6 + p_4)x_{46} = 0$$

$$(3 - p_4 + p_5)x_{54} = 0$$

$$(4 - p_6 + p_5)x_{56} = 0$$



	解
p_1	0
p_2	2
p_3	7
p_4	8
p_5	10
p_6	14

$$(0)x_{12} = 0$$

$$(2)x_{13} = 0$$

$$(0)x_{23} = 0$$

$$(0)x_{24} = 0$$

$$(13)x_{32} = 0$$

$$(1)x_{35} = 0$$

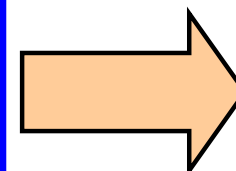
$$(2)x_{43} = 0$$

$$(0)x_{45} = 0$$

$$(2)x_{46} = 0$$

$$(5)x_{54} = 0$$

$$(0)x_{56} = 0$$



$$x_{12} = 1$$

$$x_{23} = 1$$

$$x_{24} = 1$$

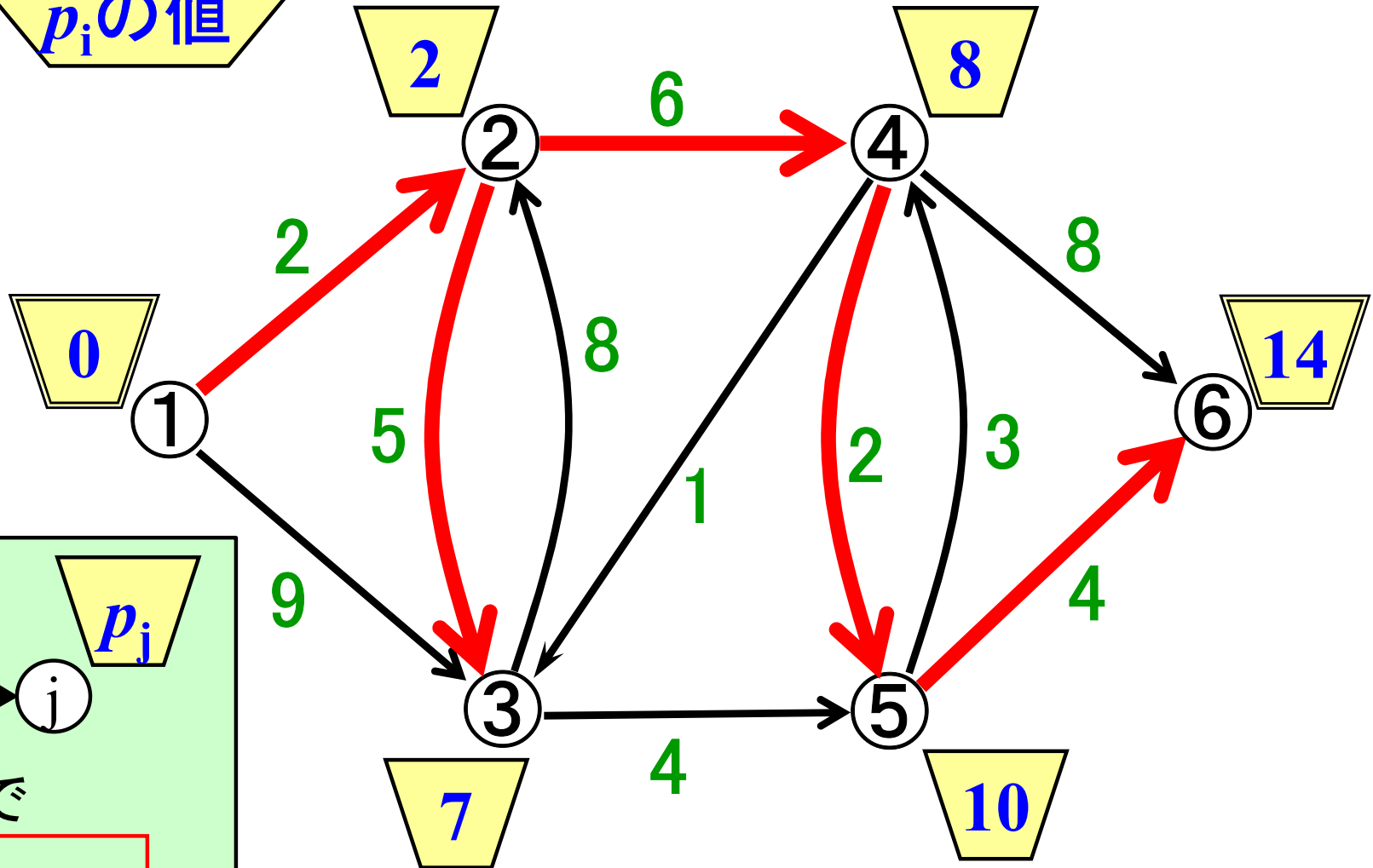
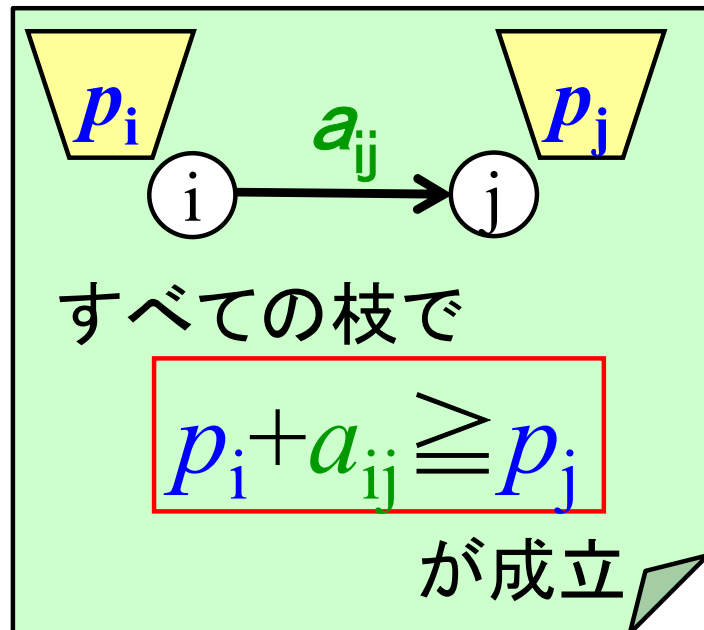
$$x_{45} = 1$$

$$x_{56} = 1$$

例題1(続) (P)の最適解

$$\begin{aligned}x_{12} &= 1 \\x_{23} &= 1 \\x_{24} &= 1 \\x_{45} &= 1 \\x_{56} &= 1\end{aligned}$$

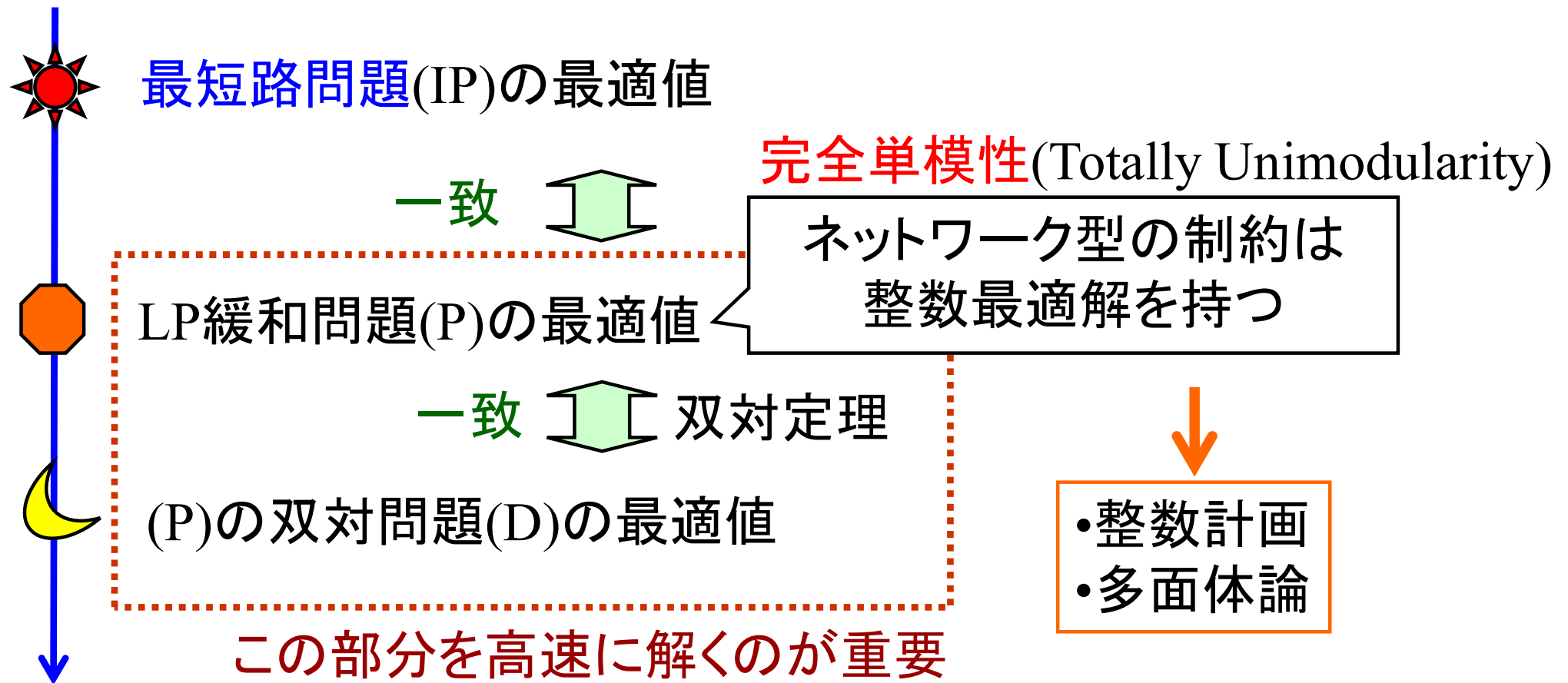
p_i の値



確認してみよう

最短路木

(IP)と(P)とその双対問題(D)

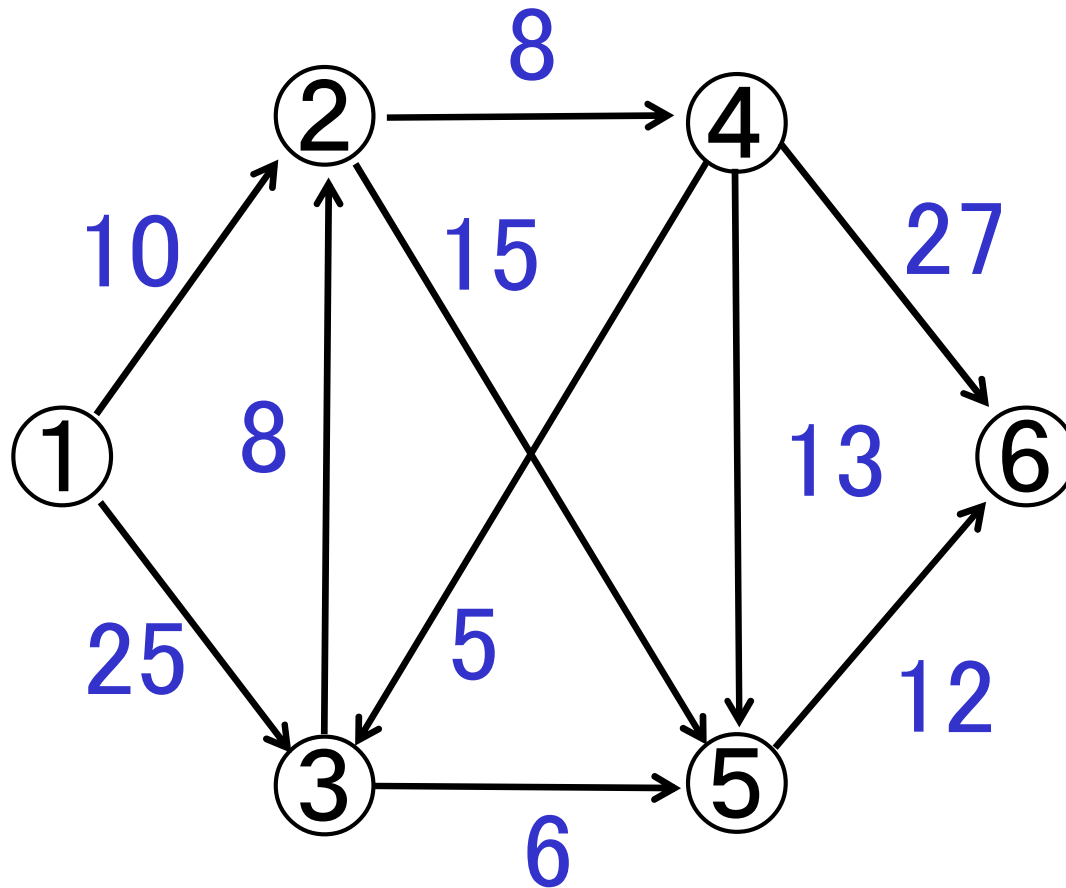


ワーク

ベルマン-フォード法で解く

①⇒⑥の最短路は?

(1) ベルマン方程式を書く



(2) ベルマン方程式を解く

(3) 双対性を利用し最短路木を描く
→最短路発見

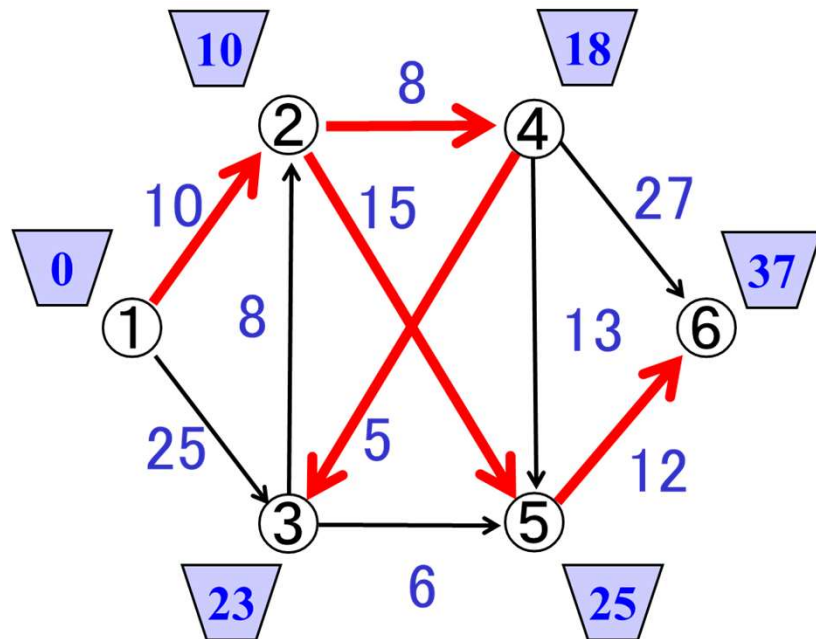


ワーク 解答例

ベルマン方程式

$$\begin{aligned}
 p_1 &= 0 \\
 p_2 &= \min\{p_1 + 10, p_3 + 8\} \\
 p_3 &= \min\{p_1 + 25, p_4 + 5\} \\
 p_4 &= \min\{p_2 + 8\} \\
 p_5 &= \min\{p_2 + 15, p_3 + 6, p_4 + 13\} \\
 p_6 &= \min\{p_4 + 27, p_5 + 12\}
 \end{aligned}$$

①を根とした最短路木



無変化で終了

	初期解	改定1	改定2	改定3	改定4	改定5
p_1	0	0	0	0	0	0
p_2	∞	10	10	10	10	10
p_3	∞	25	25	23	23	23
p_4	∞	∞	18	18	18	18
p_5	∞	∞	25	25	25	25
p_6	∞	∞	∞	45	37	37

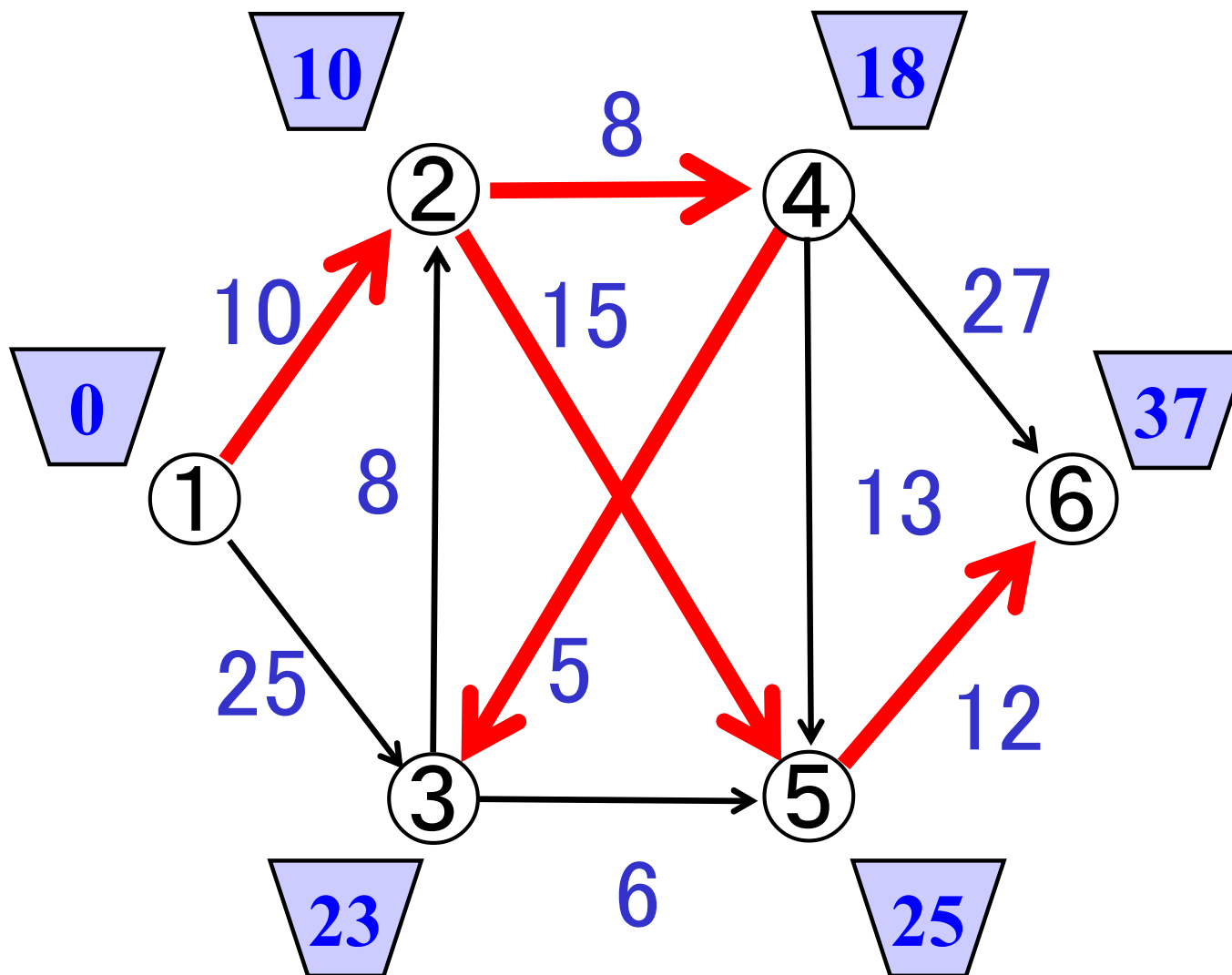
(D)の最適解

練習

解答例

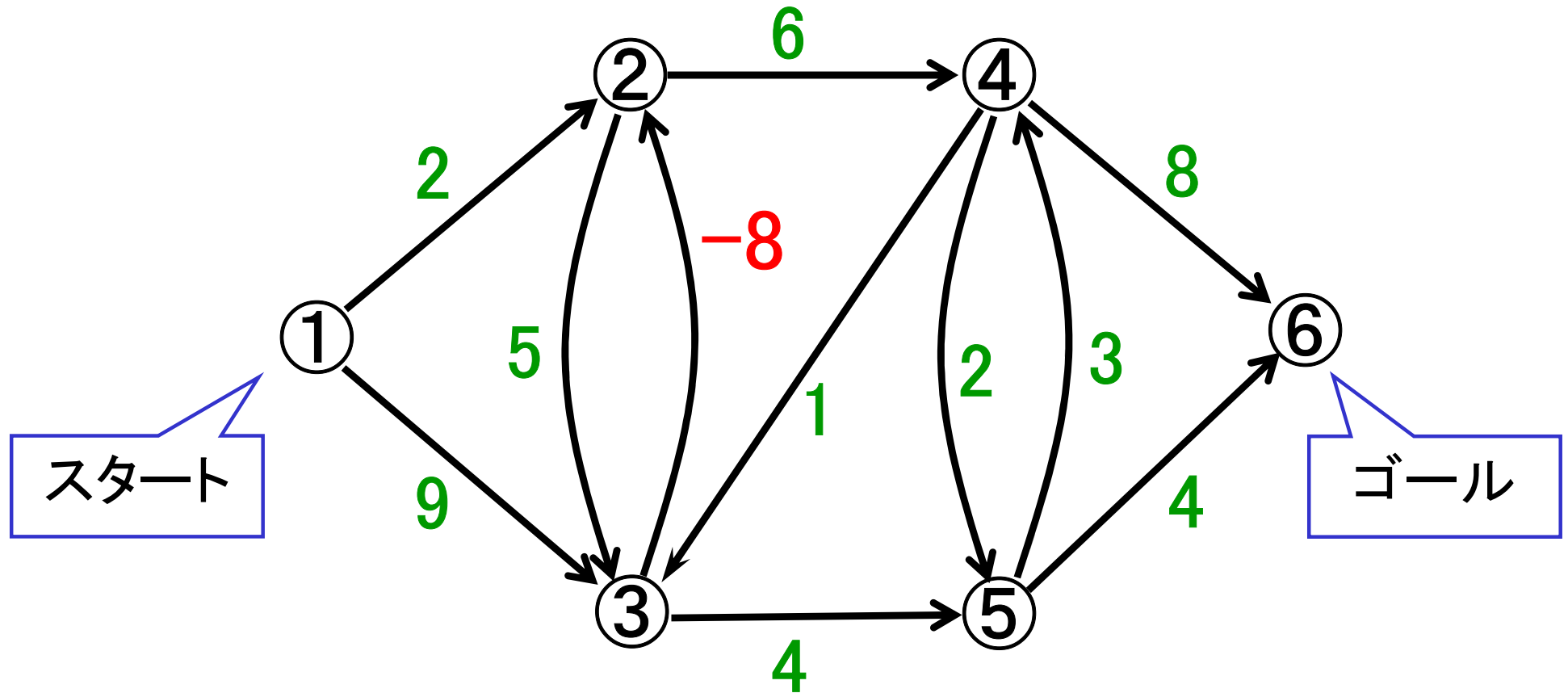
(D)の
最適解

①を根とした最短路木



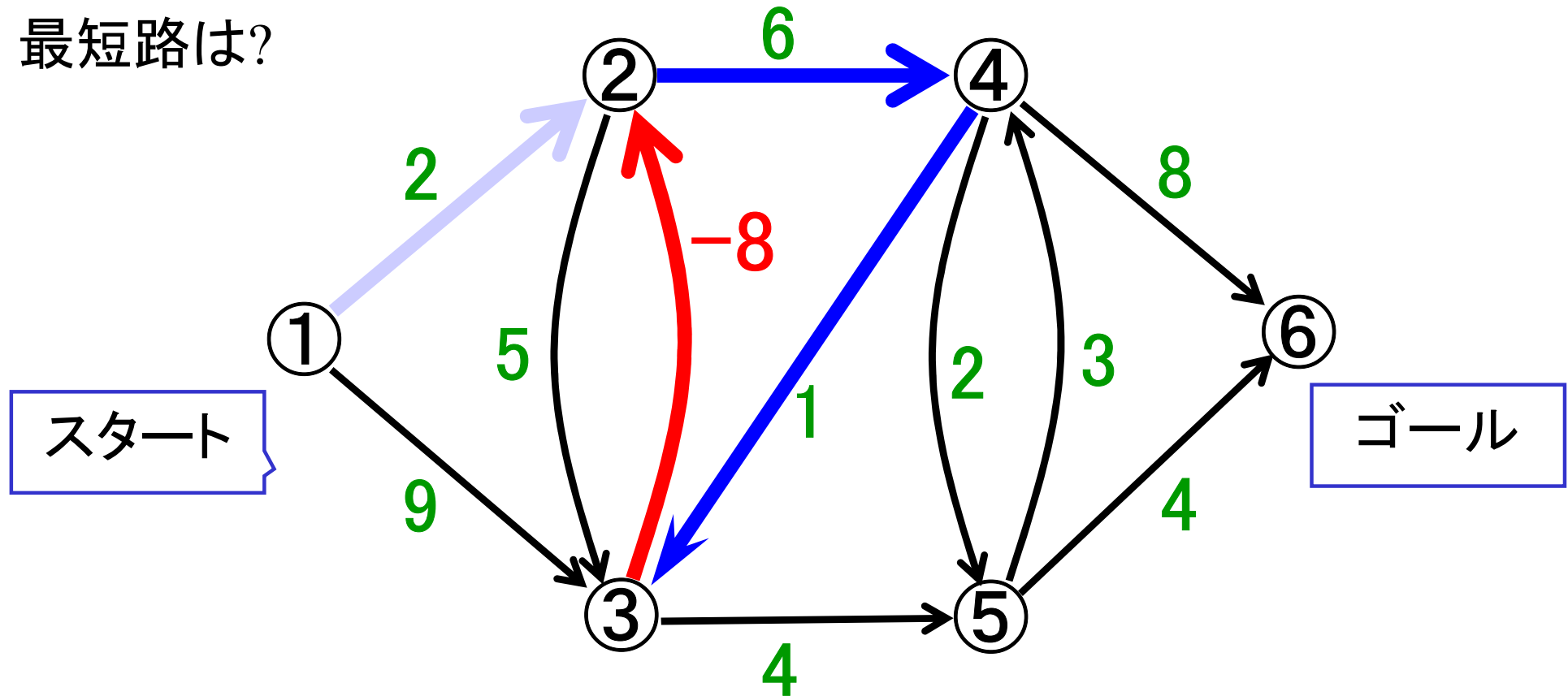
例題2 負の長さがある場合

最短路を求めよ



例題2(続) 負閉路の存在

最短路は?

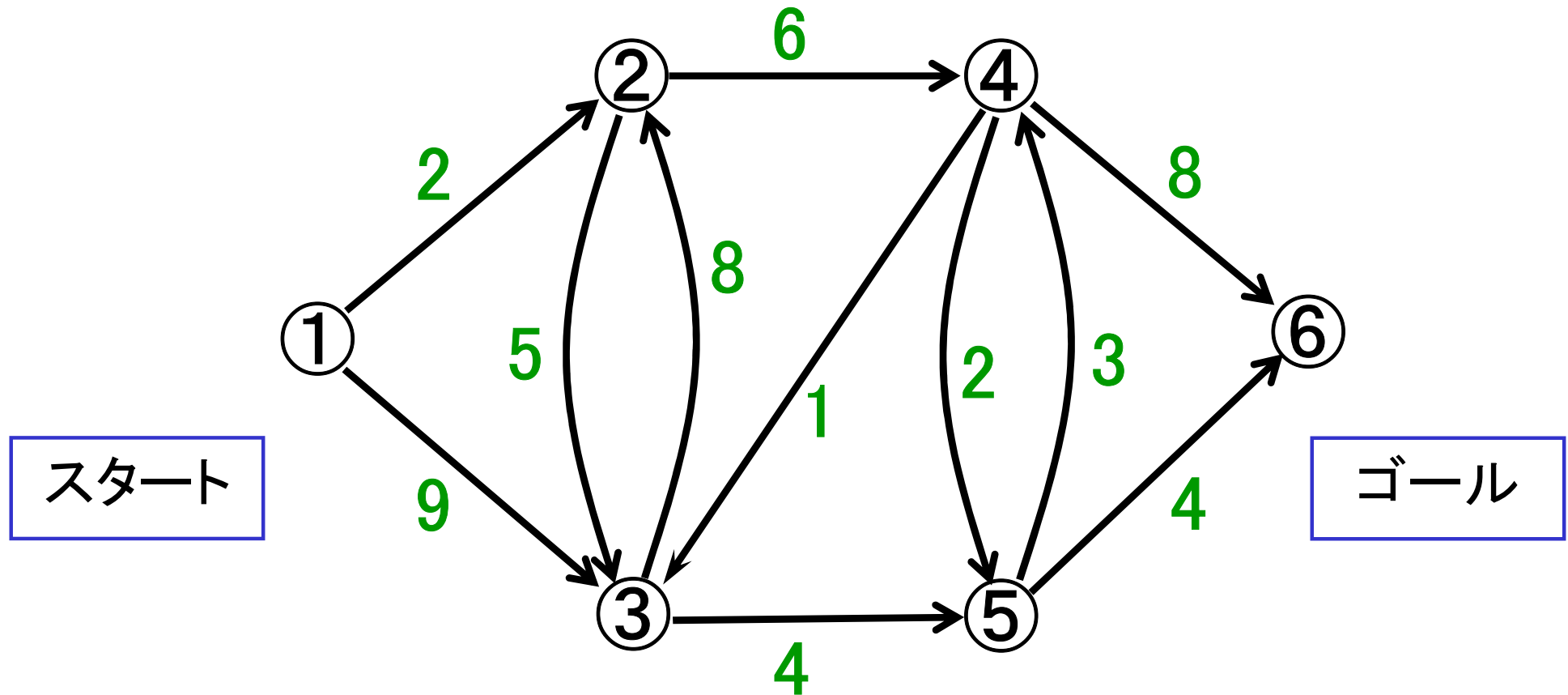


ベルマン-フォード法を適用⇒停止しない
(最短路が存在しない)



枝数回の繰り返しで停止させる(負閉路or最短路の発見)

例題3 負の長さの枝が無いとき



枝の数値は
非負と仮定!

⇒ ダイクストラ法が適用可能

例題3(続) 性質を満たす ポテンシャルの見つけ方(1)

準備:

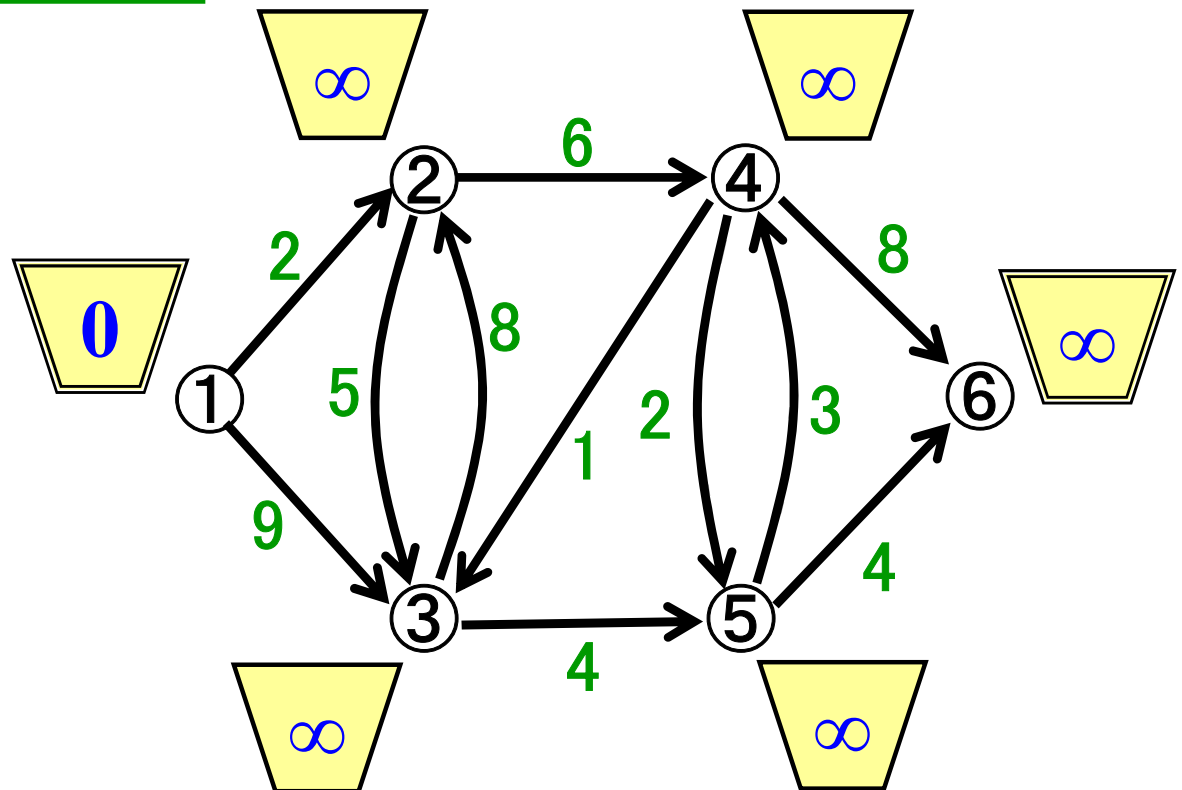
- スタートのポテンシャルを0
- 残りの点のポテンシャルは ∞
- 全点が未確定.

性質を満たすよう
ポテンシャルを順に更新



ダイクストラ法

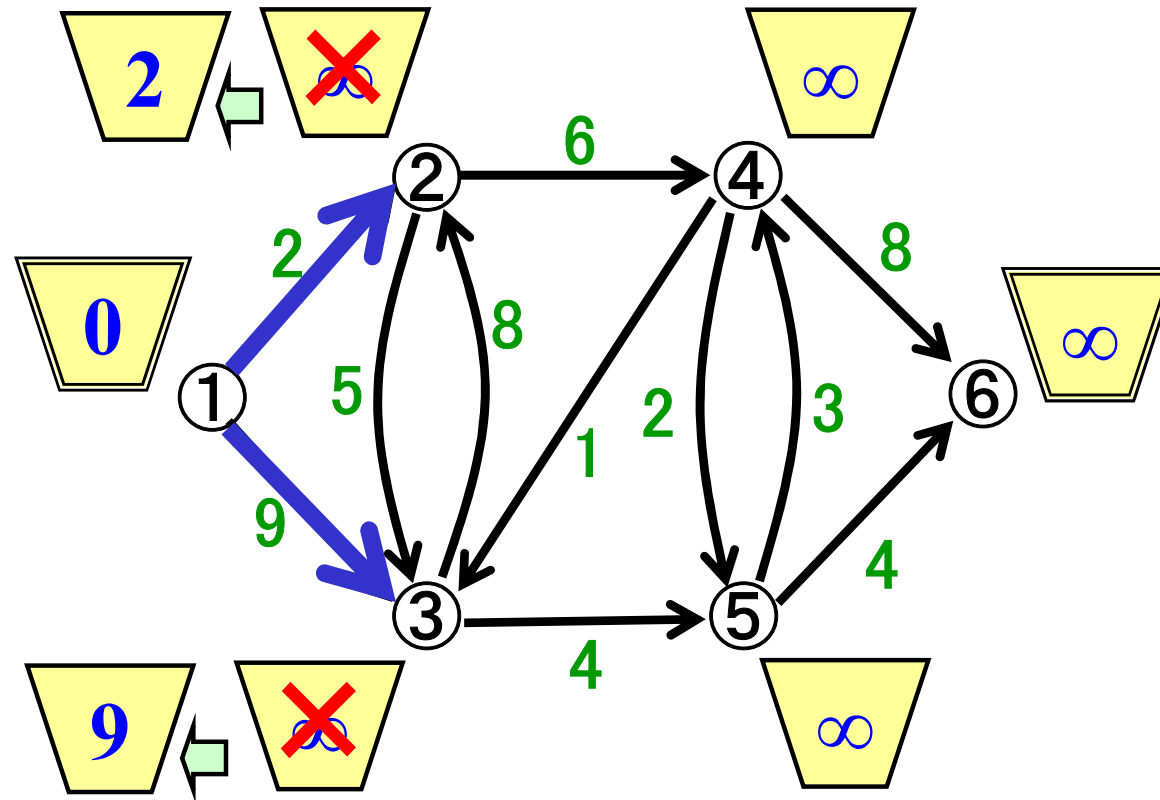
Dijkstra



例題3(続) 性質を満たすポテンシャルの見つけ方(1)

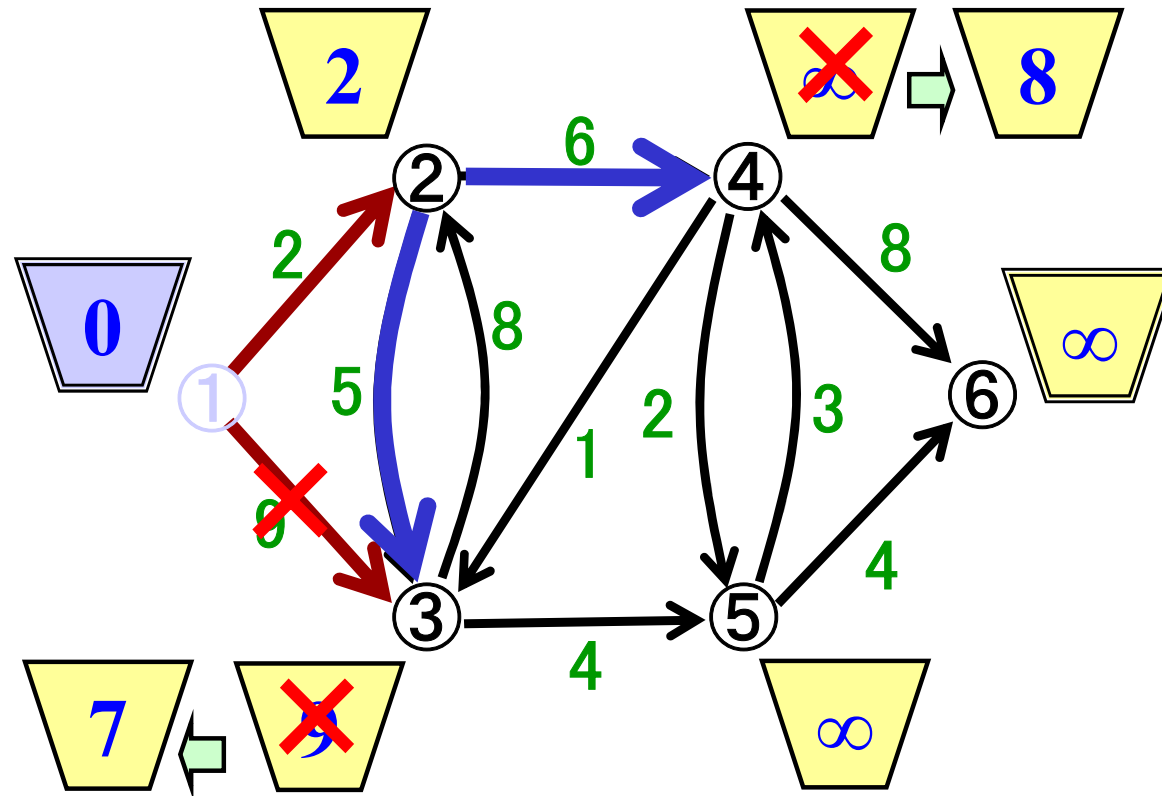
手順: 全点が確定するまで以下を繰り返す

- ① ポテンシャル最小未確定点の選択
- ② ポテンシャル更新
- ③ 点を確定



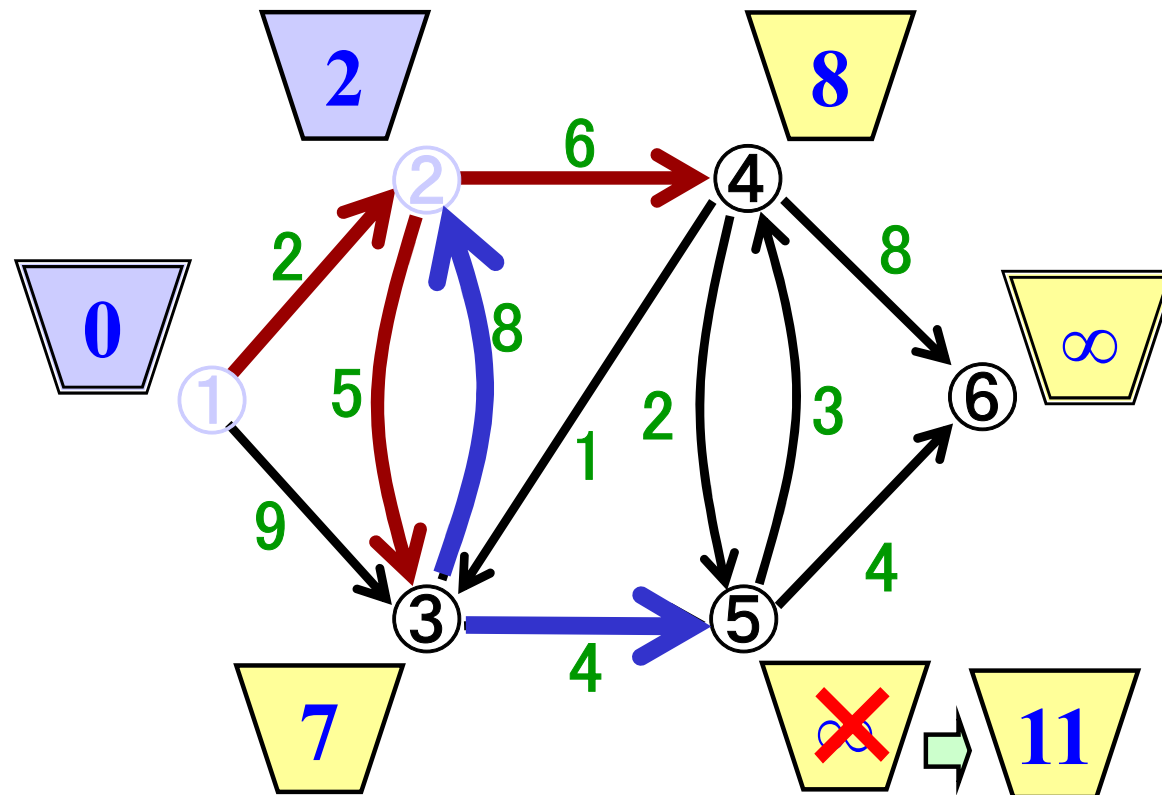
例題3(続) 性質を満たすポテンシャルのを見つけ方(2)

- ① ポテンシャル最小未確定点の選択
- ② ポテンシャル更新
- ③ 点を確定



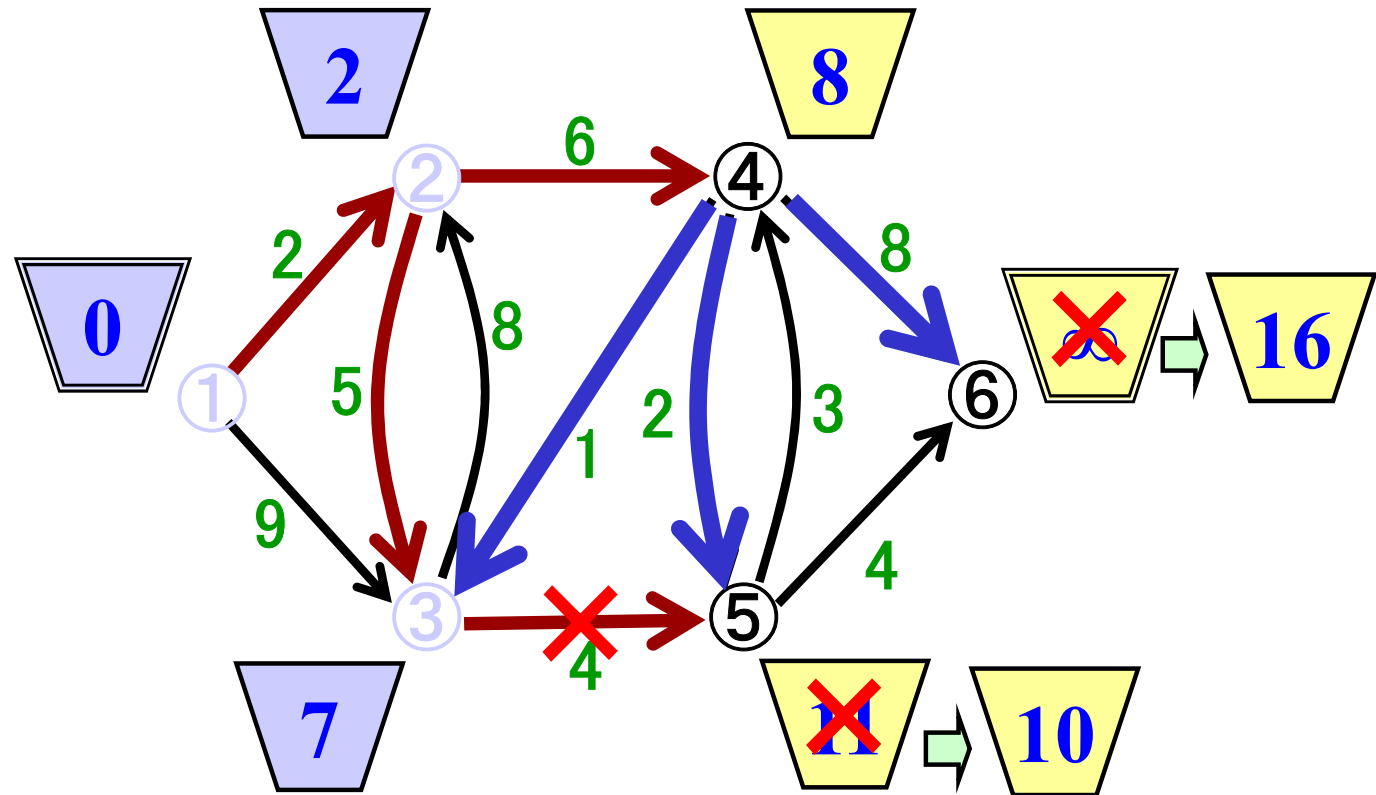
例題3(続) 性質を満たすポテンシャルのを見つけ方(3)

- ① ポテンシャル最小未確定点の選択
- ② ポテンシャル更新
- ③ 点を確定



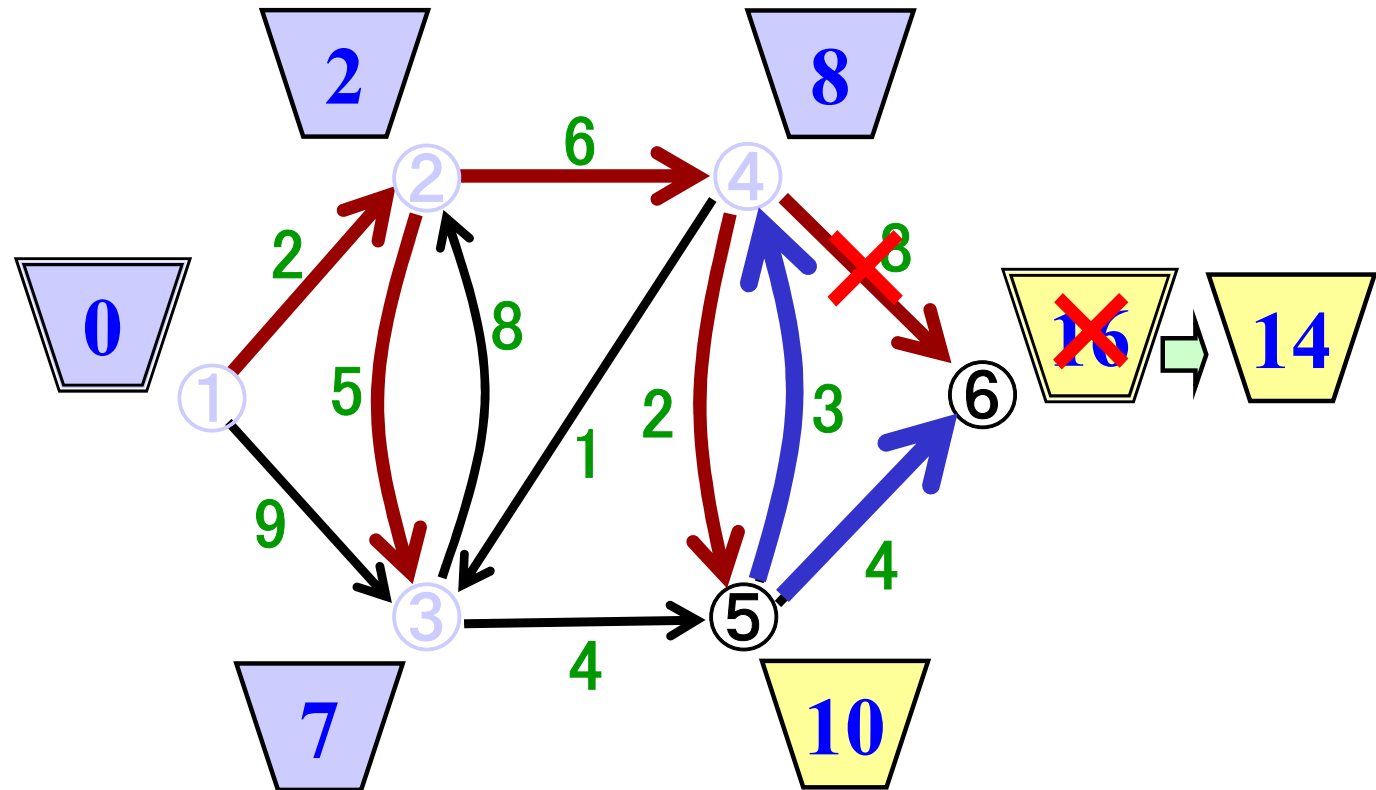
例題3(続) 性質を満たすポテンシャルのを見つけ方(4)

- ① ポテンシャル最小未確定点の選択
- ② ポテンシャル更新
- ③ 点を確定



例題3(続) 性質を満たすポテンシャルのを見つけ方(5)

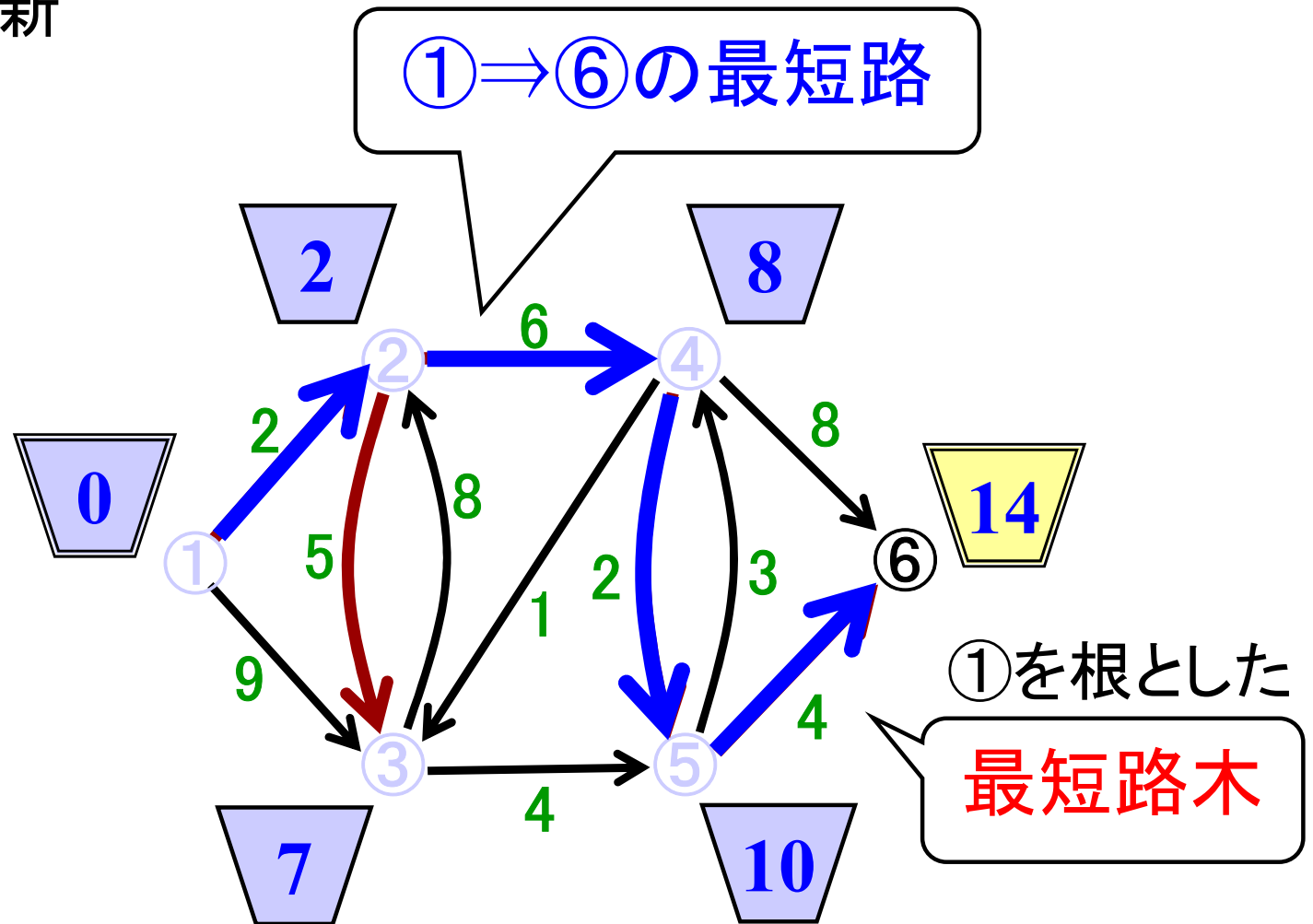
- ① ポテンシャル最小未確定点の選択
- ② ポテンシャル更新
- ③ 点を確定



例題3(続) 性質を満たすポテンシャルのを見つけ方(6)

- ① ポテンシャル最小未確定点の選択
- ② ポテンシャル更新
- ③ 点を確定

↓
全点が確定し終了



最適なポテンシャルが見つかった ⇒ 最短路も見つかった

ダイクストラ法的高速実現法

ポテンシャル最小の点を高速に発見

- 未確定点を配列でなくリスト構造で保持
(走査する点数を減らす)
- 未確定点をポテンシャルの値順に整列
→ 整列アルゴリズムの知識が必要

フィボナッチ
ヒープ

効率的実装

$O(m+n\log n)$

基本的なアルゴリズム+
データ構造の知識は
不可欠



まとめ：問題を解く戦略を練る

