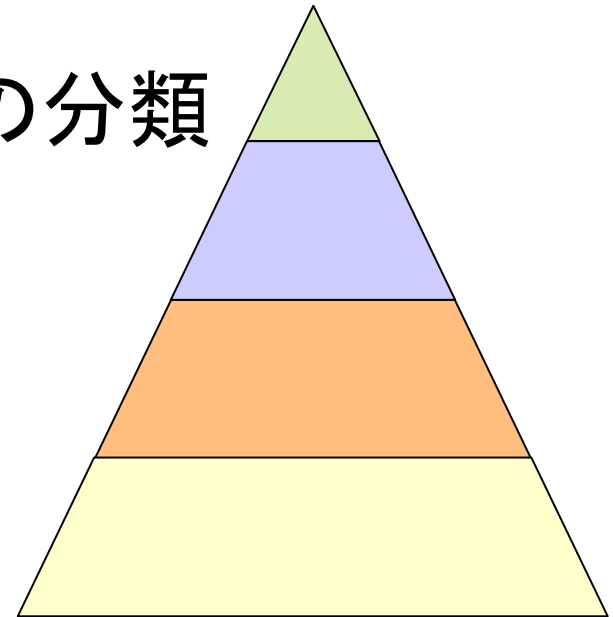


易しい問題・解きにくい問題

直面する問題の難しさの分類



ここで学ぶこと

問題の難しさ

解けない問題

!?

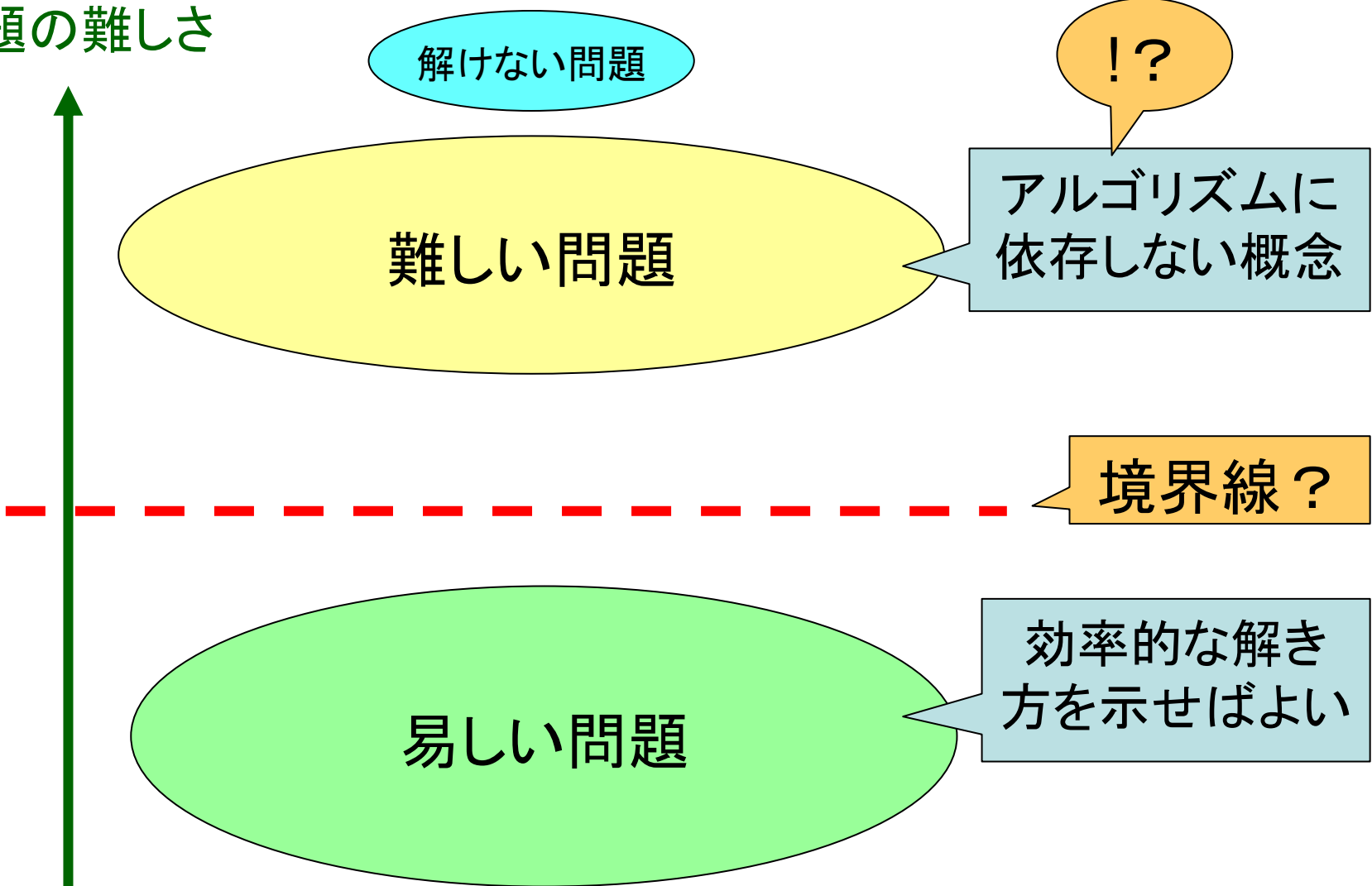
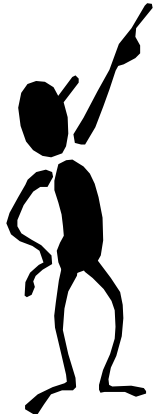
難しい問題

アルゴリズムに
依存しない概念

境界線？

易しい問題

効率的な解き
方を示せばよい

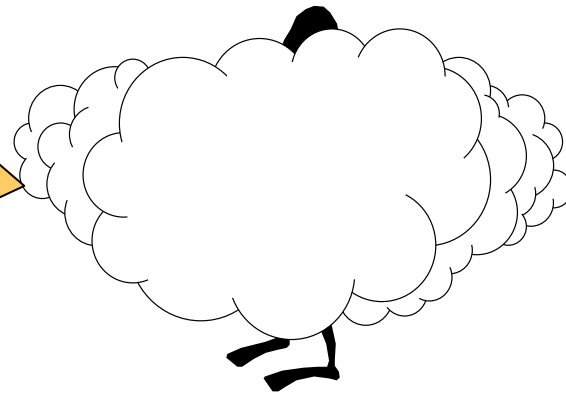


効率よく解けた \Leftrightarrow (まだ) 解けない

n 製品の最適加工順序問題の場合

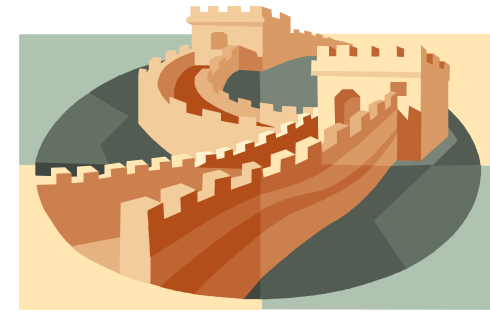
機械数	2機械	多機械
主な解法	ジョンソン法	分枝限定法など
最悪計算量	$O(n \log_2 n)$	$O(n!)$
$n=1$ 万, 1億演算/秒の時	0.002秒	6×10^{35634} 宇宙年

他の問題の
場合はどう？



- 効率の良い方法は
見つかっていない
- いつかは見つかる？

効率の良さの分岐線



計算時間の比較

計算機の速さ	1 億演算/秒				
nの大きさ	$n \log_2 n$	n^2	n^5	2^n	$n!$
10	3.3E-07	1.0E-06	1.0E-03	1.0E-05	3.6E-02
20	8.6E-07	4.0E-06	3.2E-02	1.0E-02	2.4E+10
30	1.5E-06	9.0E-06	2.4E-01	1.1E+01	2.7E+24
40	2.1E-06	1.6E-05	1.0E+00	1.1E+04	8.2E+39
50	2.8E-06	2.5E-05	3.1E+00	1.1E+07	3.0E+56
100	6.6E-06	1.0E-04	1.0E+02	1.3E+22	9.3E+149
1000	1.0E-04	1.0E-02	1.0E+07	1.1E+293	#NUM!
10000	1.3E-03	1.0E+00	1.0E+12	#NUM!	#NUM!
	1秒以内	1日以内	1年以内	宇宙暦以内 (約150億年)	宇宙暦以上

(秒)

多項式時間アルゴリズム

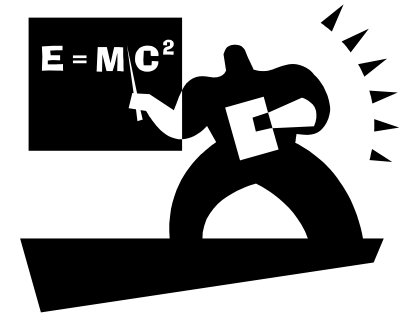
効率の良い解法の代名詞

この辺でどう？

指数時間アルゴリズム

効率の悪い解法の代名詞

豆知識講座 3.3E-07って？



- 電卓・EXCELで出てくる表示。
(指数表示: exponential form)

指数部 ← 桁数を示す

- $3.3E-07 = 3.3 \times 10^{-7}$
 $= 3.3 \times 0.0000001$
 $= 0.00000033$

桁数の多い数字の桁数をイメージしやすくする表示方法

$$10^{-7} = \frac{1}{10^7}$$
$$= \frac{1}{10000000}$$

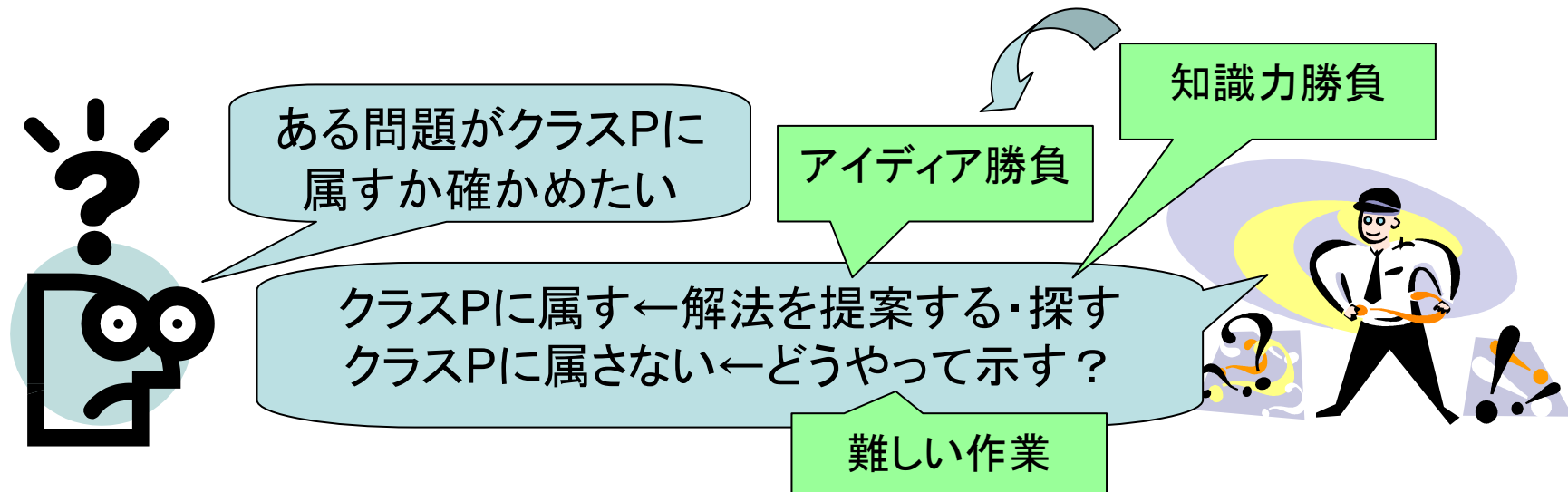
(他の例)

- $3.1E+00 = 3.1 \times 10^0 = 3.1$
- $1.1E+04 = 1.1 \times 10^4$
 $= 1.1 \times 10000$
 $= 11000$

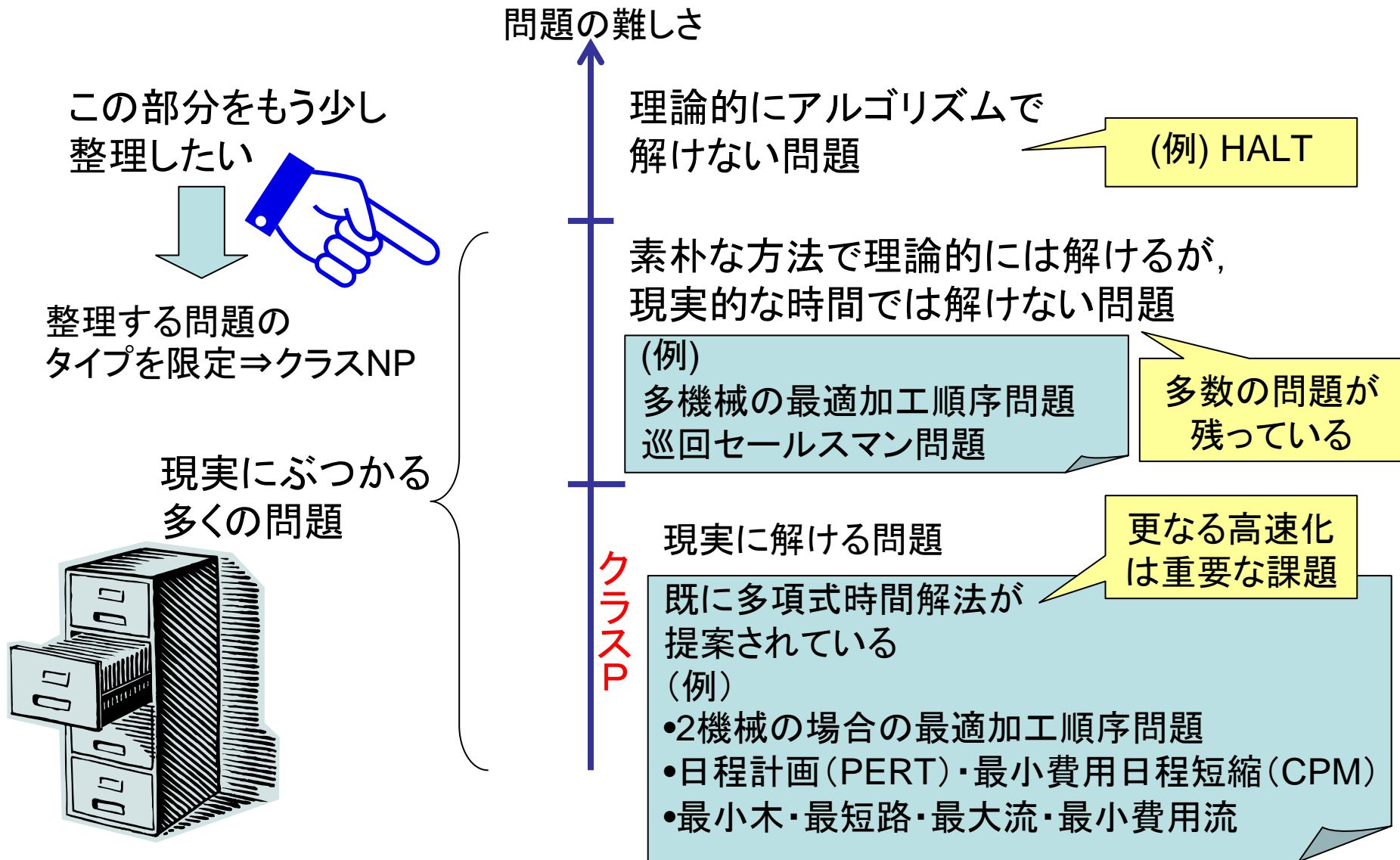
多項式時間アルゴリズム (polynomial-time algorithm)

- 入力サイズ: n
- 多項式: $f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0$
- 最悪計算量が $O(f(n))$

多項式時間アルゴリズムが存在する問題の集まり \Rightarrow クラスP



クラスPに(まだ)属さない問題達



寄り道 解けない問題 HALT

有限な文字列

有限な文字列

⇒Pも x も同じ

- 入力: プログラムPとデータ x
- 質問: プログラムPにデータ x を与えた時に有限時間で停止しますか?

仮定: HALTを解くアルゴリズムQが存在

⇒ アルゴリズムQでは,
Qの正当性を計れないことを証明
(対角線論法)



すべての
クレタ人は
嘘つきだ!

クレタ人

Nondeterministic Polynomial-time Solvable

クラスNP

- 答えがYESである証拠が多項式時間で確認できる**決定問題** ➡

入力サイズの

- 例: (決定問題)
22時間以内に終了する加工順序はある?

– (証拠)加工順序を1つ示す

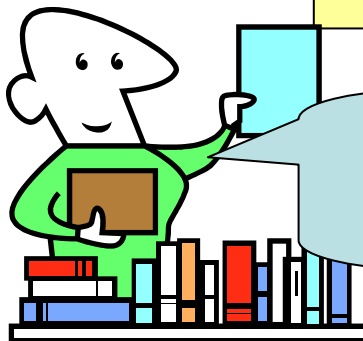
22時間以内に終了するかは製品数(n)程度で確認可能

クラスNPに属する

入力サイズ $O(n)$

総当り法(素朴な方法)で解ける決定問題はクラスNPに属す

現実に出会う問題の(決定問題版)はほぼクラスNP

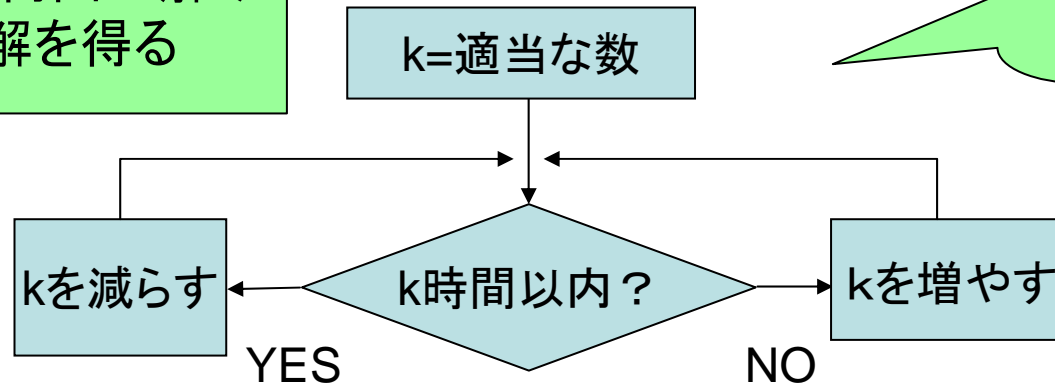


決定問題

- **決定問題**: YES/NOで答える問題
 - (最適化問題)
最適加工順序を求めよ
 - (決定問題)
22時間以内に終了する加工順序はある？
- **最適化問題** ← (変換可能) → **決定問題**

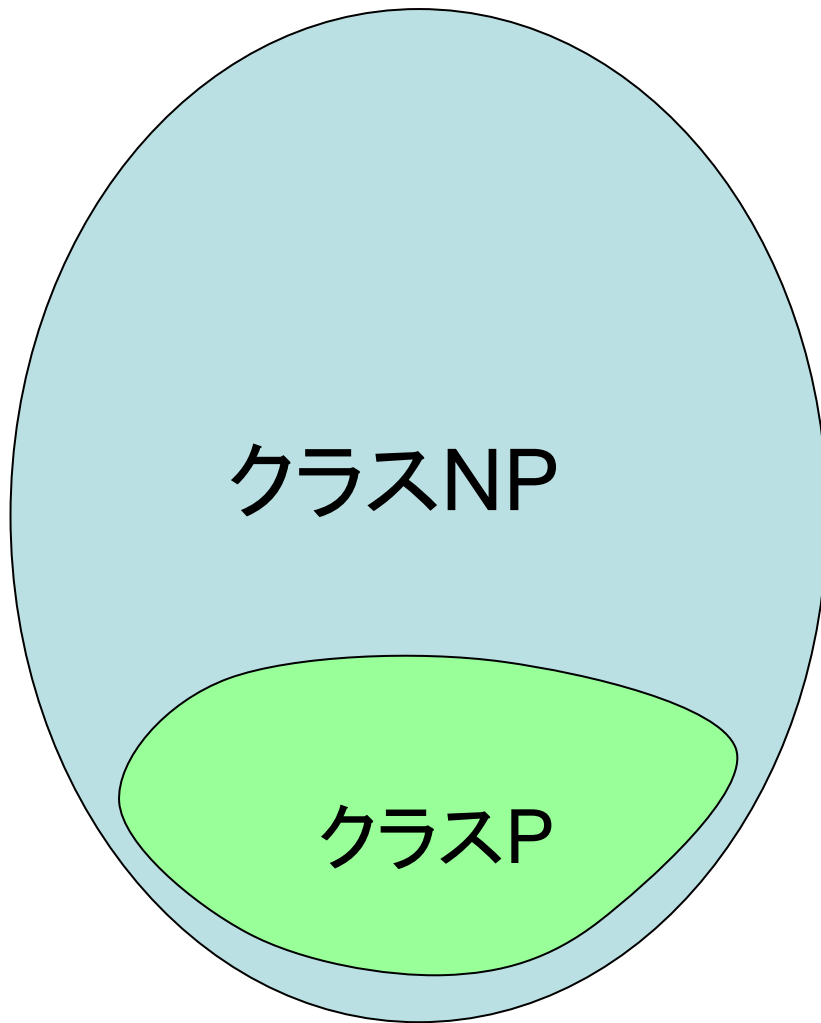


決定問題を何回か解けば最適解を得る



それ以上減らすと答えがNOになるぎりぎりのkを見つける

クラスPとクラスNP



最適解を多項式時間で
見つけることが可

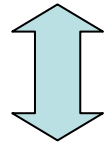
クラスPに属す決定問題は
必ずクラスNPに属す

YESの証拠を多項式
時間で確認可



寄り道：クラス co-NP

- クラスNP: Yesの証拠を多項式時間で確認可



Noの証拠を多項式時間で確認可

⇒ クラスco-NP

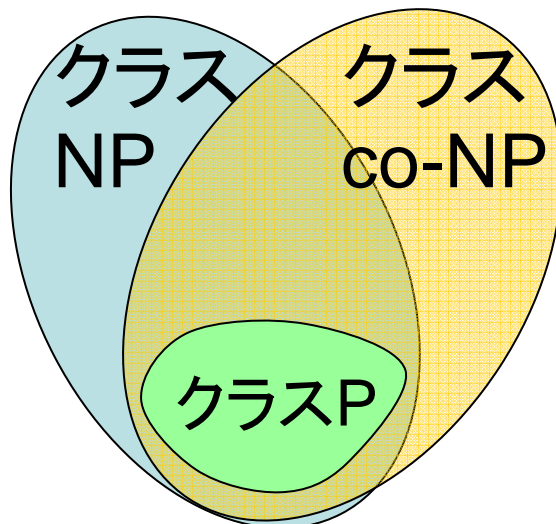
2002年までco-NPに属していた問題

整数nは素数ですか?(PRIME)

Yes 素数です: どう確認する?

No 合成数です: 多項式時間で確認可能

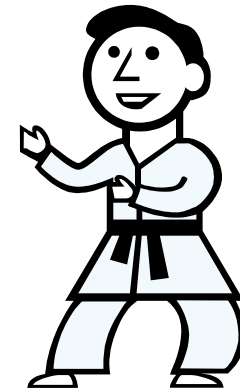
Agrawal達:
PRIME in P(2002)
クラスPだよ!



(まだ)クラスPではないクラスNPの問題たち

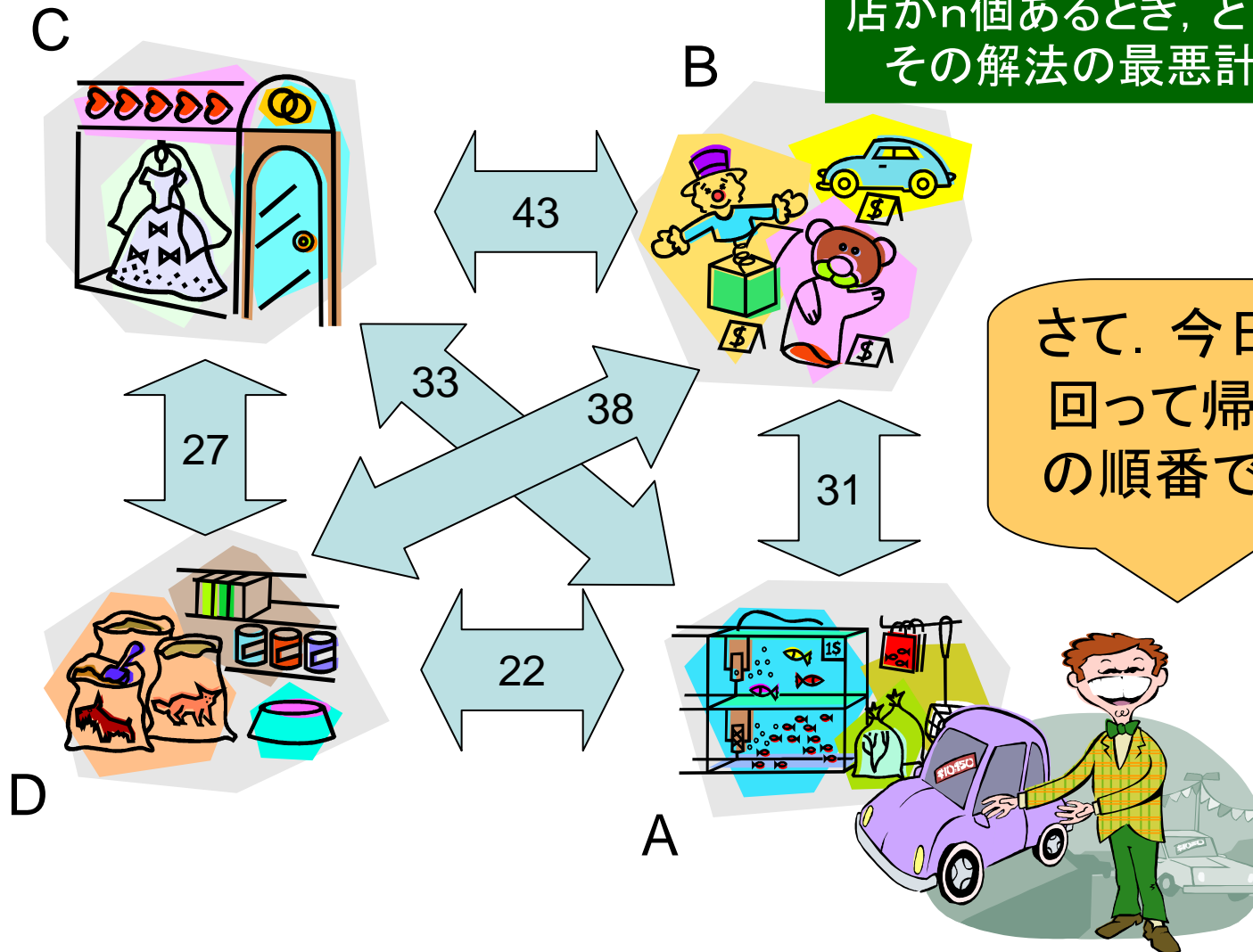
- 配送便の配達経路. 最短の配達経路は？
 - 巡回セールスマン問題
- 限られた積載量. 利益最大積荷選択方法は？
 - ナップサック問題
- ある県の営業区域. 平等な区域割りとは？
 - 集合分割問題

他にも多数の問題がある



巡回セールスマン問題 traveling salesman problem (TSP)

店がn個あるとき, どのような方法で解く?
その解法の最悪計算量は?



さて, 今日3つの店を
回って帰ってこよう. どの
順番で回ると最短?

ナップサック問題



- 貨物船で以下の在庫を輸出し利益を得たい
- 貨物船の最大積載重量: 100t
- 在庫管理の都合上, 輸出する製品は在庫すべてを積む

製品名	小麦	米	大豆	コーン	澱粉
在庫量 (t)	30	45	35	10	50
利益見込	25	15	30	10	20

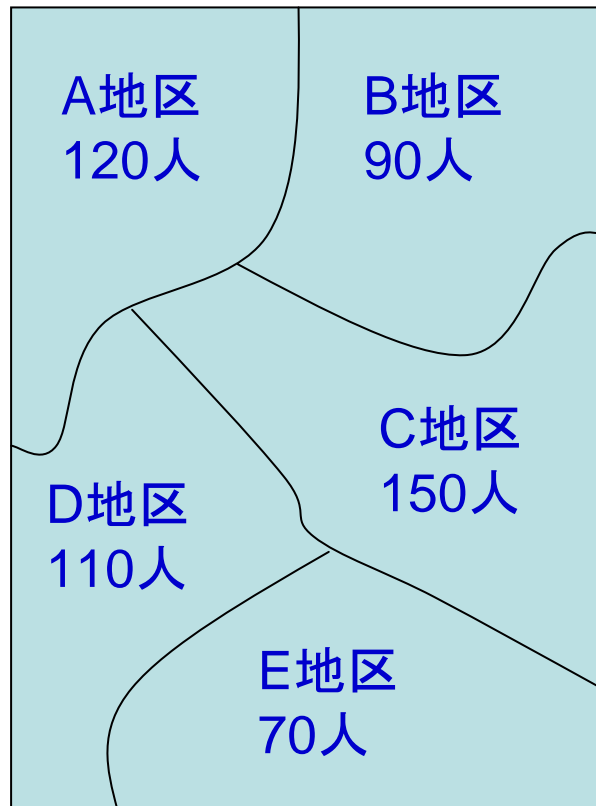
在庫すべてを輸出
した場合

Q. 総利益を最大にするには, 何を積む?

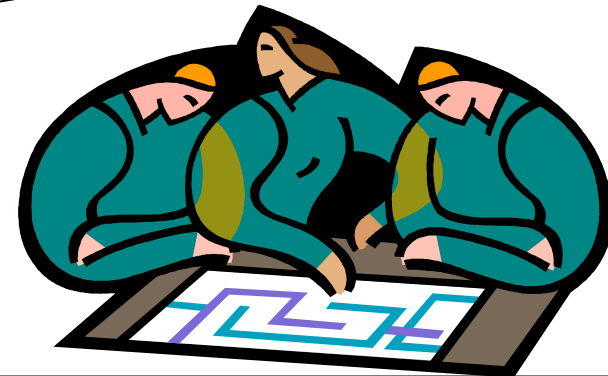
製品数が n 個の時, どんな解法で解く?
その解法之最悪計算量は?



集合分割問題



- 5地区を3人の営業マンが担当する
- 1地区は1人だけで担当
- 隣接しない地区を1人が併せて担当することはできない
- 3人の負担をなるべく平等にする担当地区の割当を考えてくれ！

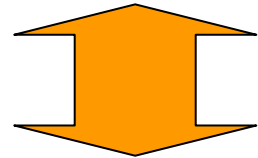


地区数が n 個の時、
どんな解法で解く？
その解法の最悪計算量は？

クラスNPでの大発見

Cook博士の発見(1971年)の大雑把な解釈

クラスNPに属する**すべての問題**はTSP(の決定問題)に簡単に(多項式時間の手間で)変形可能



TSPはクラスNPに属する問題の中で**最も難しい**

TSPに対して多項式時間解法があれば、クラスNPに属する問題はすべて多項式時間で解ける

更なる事実(Karp博士)

TSP ⇔ ナップサック問題

TSP ⇔ 集合分割問題

⋮

TSP ⇔ 充足可能性問題

両者は同じ位難しい

TSPの仲間たち

※ Cookの定理は、全問題の充足可能性問題への帰着を証明

NP完全問題

帰着可能性

問題Aの答えQ

Aを解くのは面倒



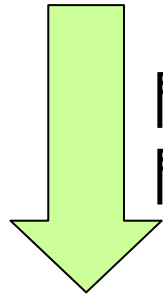
問題Aの複雑さ

|∧

変形の手間

+

問題Bの複雑さ



問題Aを変形すると
問題Bになる

問題Bの答えf(Q)

Bを解けばいいよ

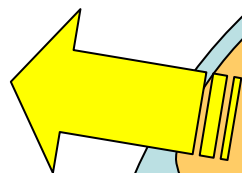


Cook博士の仕事: NP完全問題の存在性を示した
Karp博士の仕事: NP完全問題の仲間たちを見つけた

クラスPとクラスNPとNP完全問題

決定問題に限らない

NP困難問題



NP完全問題

TSP
ナップサック問題
集合分割問題
最適加工順序問題
等多数

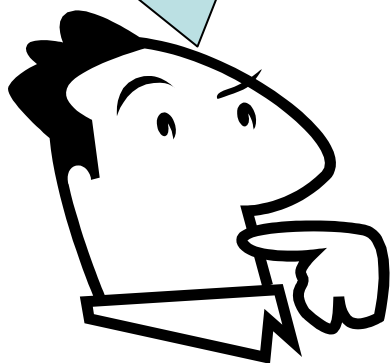
クラスNP

NP完全問題がクラスPに属するのかわかれない問題もたくさんある

NP完全問題は
(今のところ)
多項式時間解法が
無い問題なんだ。

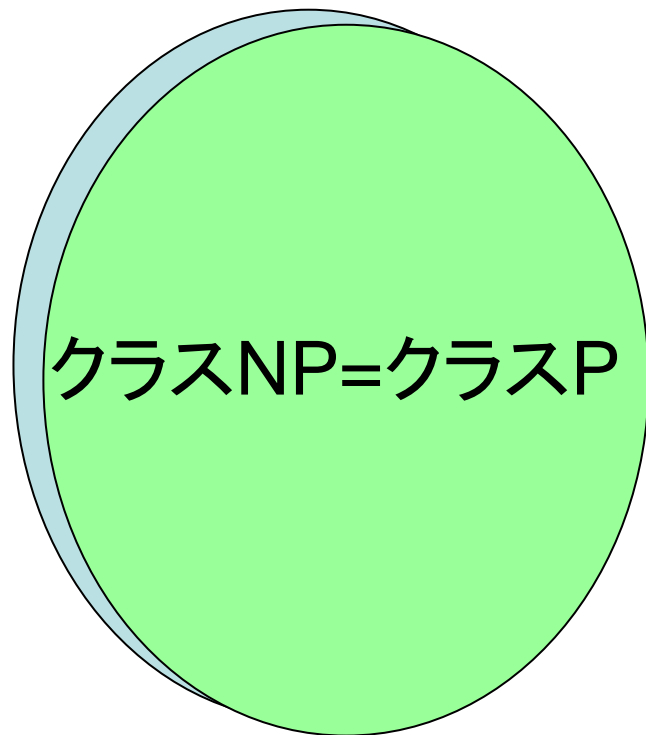
クラスP

最短路問題
最大流問題
ソート
等多数



P=NP?

- NP完全問題のひとつに対して多項式時間解法が存在したら...



多くの研究者は
NP≠Pと思っている



NP≠Pも未だ謎

誰も示していない。
未だ謎

NP完全問題

近似解法や
分枝限定法での
アプローチが得策

- NP完全問題 = 難しい? ← たぶん本当



まとめ

- 問題の難しさには階層がある
 - 解けない問題
 - クラスNP
 - クラスP
- クラスNPの中にも難しさの階層がある
 - NP完全問題
- 問題への解法を考える際は、まず問題の難しさのレベルに気を配るべき

